Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 2: Systèmes à plusieurs DDL.

Application 10

Vibrations libres Non Amortis

Formulation des équations et calcul des valeurs et vecteurs propres

Exemple 10 **Samedi 13.01.2024**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Objectif

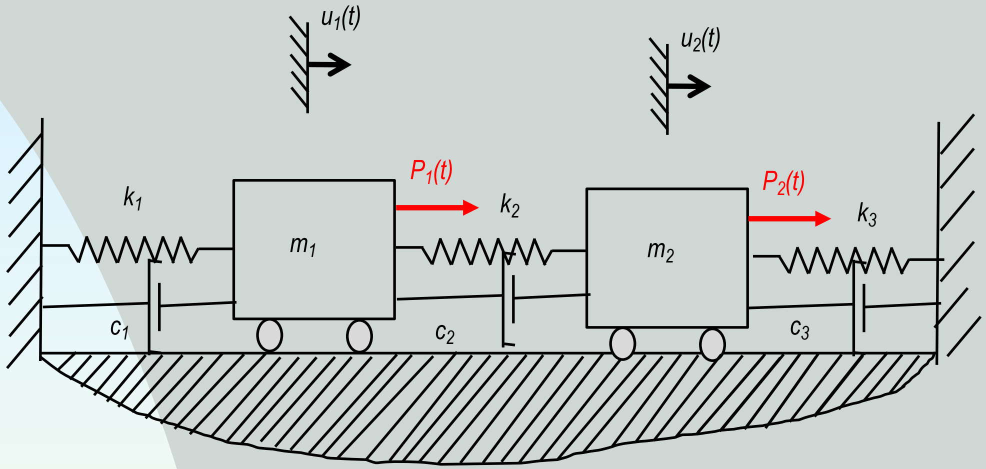
Le but de cette application est de :

- **Formuler les équations du mouvement d’un système à plusieurs DDL.**
- **Calculer les matrices masse, rigidité et amortissement d’un SPDDL**
- **Calculer les fréquences et modes propres de vibration**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Exemple 1

On donne le modèle suivant montré en figure ci-dessous. On vous demande



i) **Déterminer les matrices $[M]$, $[K]$ et $[C]$ en passant par les équations de mouvement.**

ii) **Pour le cas particulier, $k_1=k_2=k_3=k$; $m_1=m_2=m$ et $c_1=c_2=c_3=0$, calculer les fréquences et modes de vibration du système.**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Solution

(Voir chapitre 8 §2)

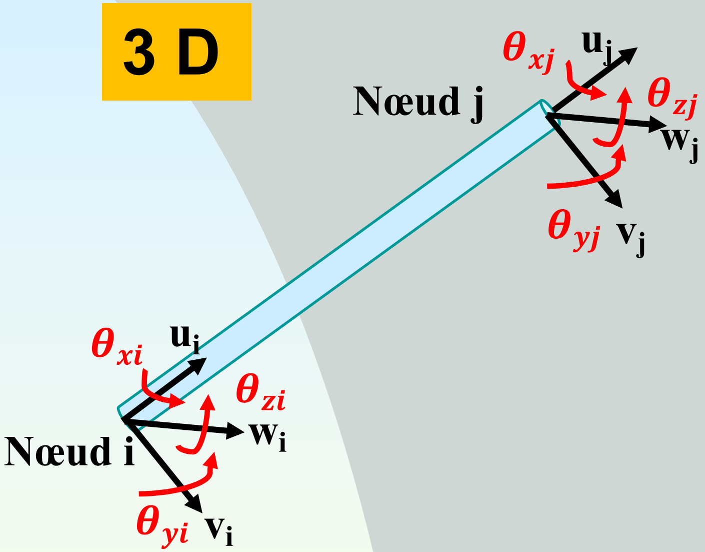
Equations de mouvement ?

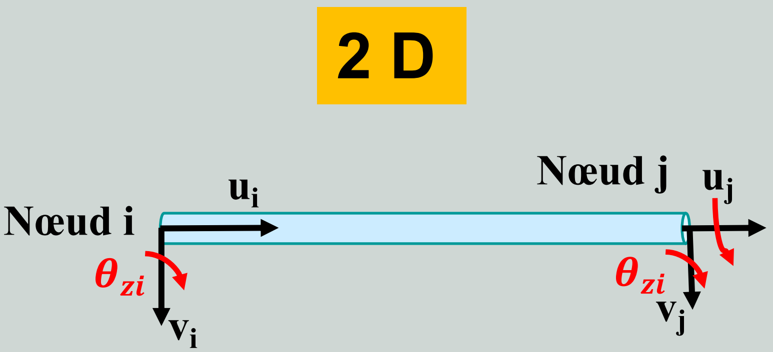
- **Système à plusieurs DDL : Mouvement est décrit par plusieurs variables (déplacements ou rotations)**
- **Système d'équations différentielles**
- **Le nombre de DDL est égal au nombre des composants de déplacements requis pour exprimer les forces d'inertie**
- **On utilise la notion de nœud.**
- **Les nœuds possèdent une (ou plusieurs) masse(s)**
- **En général, un nœud à 06 DDL (03 translations et 03 rotations).**
- **Le nombre total de DDL de la structure = Nbr Nœud x 6**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Solution

Elément poutre ?





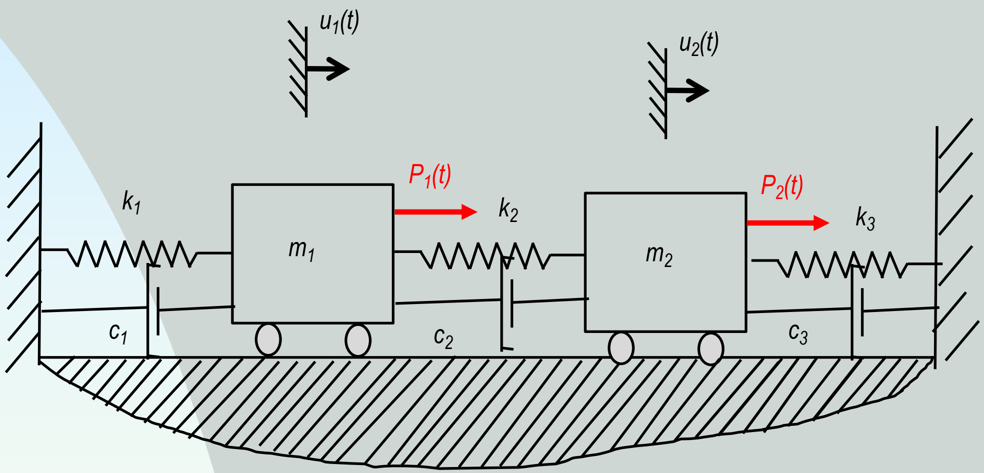
- 06 DDL (03 translations et 03 rotations) / nœud.

- 03 DDL (02 translations et 01 rotation) / nœud.

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Solution

i) Déterminer les matrices $[M]$, $[K]$ et $[C]$ en passant par les équations de mouvement

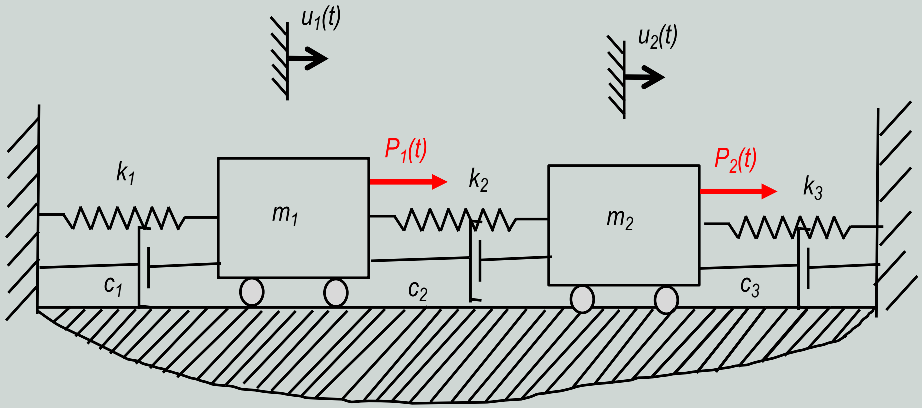


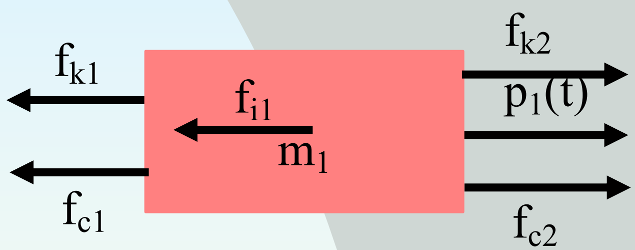
Système à 02 DDL

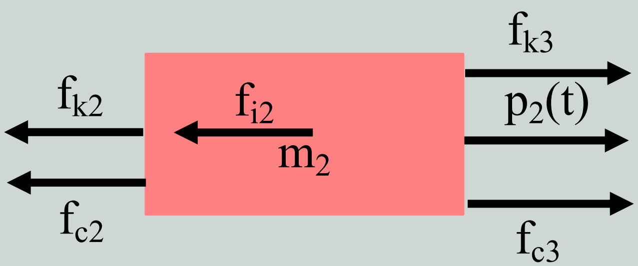
Isolons chaque mass à part

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Solution







On applique la 2ème loi de Newton pour chaque masse

$$\textbf{Masse 1 :} \quad f_{i1} = m_1 \ddot{u}_1(t) = p_1(t) - f_{k1} - f_{c1} + f_{k2} + f_{c2}$$

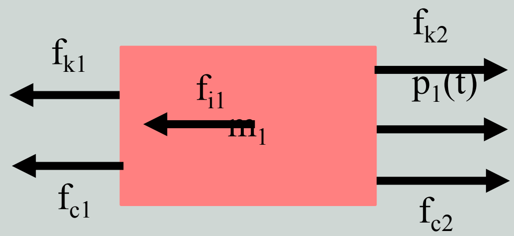
$$\textbf{Masse 2 :} \quad f_{i2} = m_2 \ddot{u}_2(t) = p_2(t) - f_{k2} - f_{c2} + f_{k3} + f_{c3} \qquad (1)$$

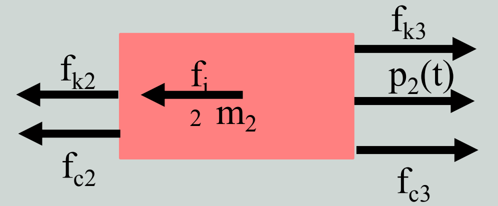
Les forces élastiques sont proportionnelles aux extensions des ressorts (à ne pas confondre avec déplacements) dans le cas élastique linéaire.

Les forces d'amortissement sont proportionnelles aux différences de vitesses des amortisseurs (à ne pas confondre avec vitesses) dans le cas élastique linéaire.

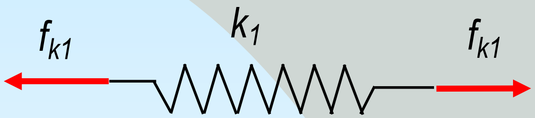
© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

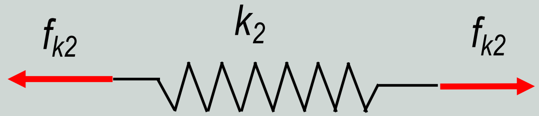
Equation du mouvement

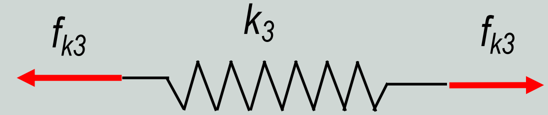




Soit





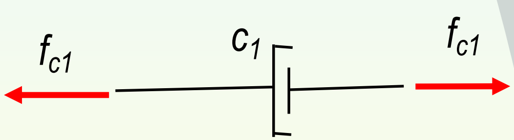


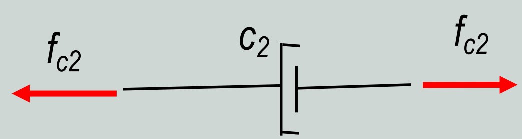
$$f_{k1} = k_1 e_1 \qquad f_{k2} = k_2 e_2 \qquad f_{k3} = k_3 e_3$$

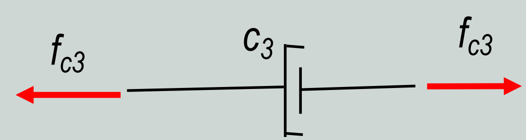
$$e_1 = u_1 \qquad e_2 = u_2 - u_1 \qquad e_3 = \cancel{u_3} - u_2 \qquad (2)$$

$$f_{k1} = k_1 u_1 \qquad f_{k2} = k_2 u_2 - k_2 u_1 \qquad f_{k3} = -k_3 u_2$$

De même pour les forces d'amortissements







$$f_{c1} = c_1 \dot{e}_1 \qquad f_{c2} = c_2 \dot{e}_2 \qquad f_{c3} = c_3 \dot{e}_3$$

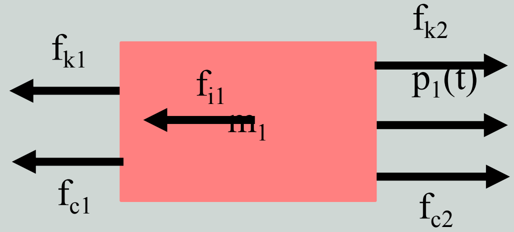
$$\dot{e}_1 = \dot{u}_1 \qquad \dot{e}_2 = \dot{u}_2 - \dot{u}_1 \qquad \dot{e}_3 = \cancel{\dot{u}_3} - \dot{u}_2 \qquad (3)$$

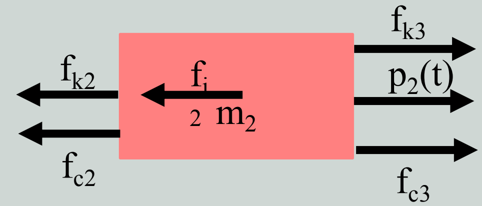
$$f_{c1} = c_1 \dot{u}_1 \qquad f_{c2} = c_2 \dot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 \qquad f_{c3} = -c_3 \dot{u}_2$$

Les forces d'inertie $\quad f_{i1} = m_1 \ddot{u}_1$ **et** $f_{i2} = m_2 \ddot{u}_2 \qquad (4)$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Solution





En remplaçant dans la 2ème loi de Newton pour chaque masse

Masse 1 : $\boldsymbol{f_{i1} = m_1 \ddot{u}_1(t) = p_1(t) - f_{k1} - f_{c1} + f_{k2} + f_{c2}}$

Masse 2 : $\boldsymbol{f_{i2} = m_2 \ddot{u}_2(t) = p_2(t) - f_{k2} - f_{c2} + f_{k3} + f c_3}$ **(1)**

Masse 1 : $\boldsymbol{m_1 \ddot{u}_1(t) + f_{k1} + f_{c1} - f_{k2} - f_{c2} = p_1(t)}$

Masse 2 : $\boldsymbol{m_2 \ddot{u}_2(t) + f_{k2} + f_{c2} - f_{k3} - f_{c3} = p_2(t)}$

Masse 1 : $\boldsymbol{m_1 \ddot{u}_1(t)} + k_1 u_1 + c_1 \dot{\boldsymbol{u}}_1 - (k_2 u_2 - k_2 u_1) - (c_2 \dot{\boldsymbol{u}}_2 - c_2 \dot{\boldsymbol{u}}_1) = \boldsymbol{p_1(t)}$

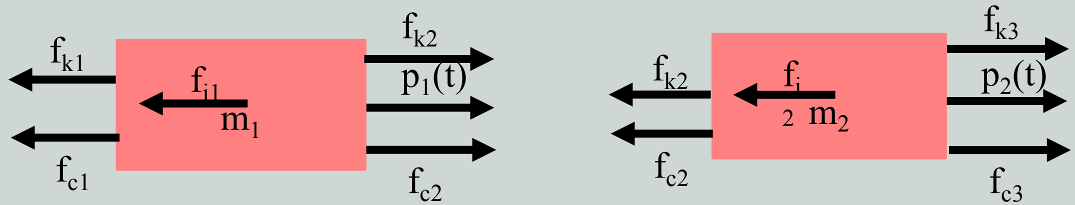
Masse 2 : $\boldsymbol{m_2 \ddot{u}_2(t)} + (k_2 u_2 - k_2 u_1) + (c_2 \dot{\boldsymbol{u}}_2 - c_2 \dot{\boldsymbol{u}}_1) - (-k_3 u_2) - (-c_3 \dot{\boldsymbol{u}}_2) = \boldsymbol{p_2(t)}$

Masse 1 : $\boldsymbol{m_1 \ddot{u}_1(t)} + (c_1 + c_2)\, \dot{\boldsymbol{u}}_1 - c_2 \dot{\boldsymbol{u}}_2 + (k_1 + k_2)\, u_1 - k_2 u_2 = \boldsymbol{p_1(t)}$

Masse 2 : $\boldsymbol{m_2 \ddot{u}_2(t)} - c_2 \dot{\boldsymbol{u}}_1 + (c_2 + c_3)\, \dot{\boldsymbol{u}}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)\, u_2 = \boldsymbol{p_2(t)}$

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Solution



Masse 1 : $\boldsymbol{m_1}\,\boldsymbol{\ddot{u}_1}(\boldsymbol{t}) + (c_1 + c_2)\,\boldsymbol{\dot{u}}_1 - c_2\boldsymbol{\dot{u}}_2 + (k_1 + k_2)\,u_1 - k_2\,u_2 = \boldsymbol{p_1}(\boldsymbol{t})$

Masse 2 : $\boldsymbol{m_2}\,\boldsymbol{\ddot{u}_2}(\boldsymbol{t}) - c_2\boldsymbol{\dot{u}}_1 + (c_2 + c_3)\,\boldsymbol{\dot{u}}_2 - k_2\,u_1 + (k_2 + k_3)\;u_2 = \boldsymbol{p_2}(\boldsymbol{t})$

Sous forme matricielle, on aura:

$$\begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\dot{u}}_1 \\ \boldsymbol{\dot{u}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Soit

$$[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\ddot{U}}\} + [\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{\dot{U}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\}$$

Avec

$[\boldsymbol{M}] = \begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 \end{bmatrix}$ **Matrice masse**

$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$ **Matrice amortissement**

$[\boldsymbol{K}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$ **Matrice rigidité**

$\{\boldsymbol{\ddot{U}}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$ **Vecteur accélération**

$\{\boldsymbol{\dot{U}}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\dot{u}}_1 \\ \boldsymbol{\dot{u}}_2 \end{Bmatrix}$ **Vecteur vitesse**

$\{\boldsymbol{U}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ **Vecteur déplacement**

$\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$ **Vecteur force extérieure**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Solution

ii) Pour le cas particulier, k1=k2=k3=k ; m1=m2=m et C1=C2=C3=0, calculer les fréquences et modes de vibration du système.

Calcul des fréquences et modes propres de vibration ?

Qlqs points

- **Négliger l'amortissement**
- **Force extérieure nulle**
- **Structure idéale (Théorique). Elle vibre indéfiniment.**
- **En réalité, toute structure a un système de frottement pour l'amortir dans le temps.**
- **Vibration qui dépend de la distribution des masses, de la loi charge-déplacement et de la manière dont la vibration est produite initialement.**
- **On peut imposer des CI non nulles de tel sorte à faire vibrer la structure selon un quelconque mode normal.**
- **Dans chaque mode normal, propre ou naturel, chaque point de la structure exécute un mouvement sinusoïdale autour de sa position d'équilibre.**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

- **Lorsque tous les points atteignent leur maximum, la déformée caractérise un mode normal de vibration.**
- **La fréquence la plus petite est appelée fréquence fondamentale.**
- **En théorie, les problèmes seront résolus en considérant le principe de superposition des modes normaux.**
- **Les modes normaux sont la base de la résolution des systèmes forcés.**
- **Le nombre de mode propre sera égale au nombre total des DDL.**
- **Tous les points passent simultanément par une position d'équilibre et par leur amplitude maximale.**
- **La fréquence de vibration est donc la même pour tous les points de la structure (fréquence propre au mode considéré)**

Ainsi, le mouvement libre non amorti n'est utile que pour la détermination des caractéristiques propres du système:

Pulsations et modes propres de vibration

02 méthodes pour les calculer:

- **Méthode de la matrice de rigidité**
- **Méthode de la matrice de flexibilité**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Méthode de la matrice de rigidité

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t)$$

Pour les mouvements libre non amorti, on aura:

$$M\ddot{U} + KU = 0 \qquad (5)$$

Une solution particulière de ce système est (voir les S1DDL) :

$$U = \begin{Bmatrix} u_1(t) = \phi_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

D'où:

$$\ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) = -\phi_1 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\phi_2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\phi_i \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\phi_n \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

En remplaçant dans (5), on aura:

$$\begin{Bmatrix} (k_{11} - m_1\omega^2)\phi_1 + k_{12}\phi_2 + \cdots + k_{1n}\phi_n = 0 \\ k_{21}\phi_1 + (k_{22} - m_2\omega^2)\phi_2 + \cdots + k_{2n}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{i1}\phi_1 + ki_2\phi_2 + \cdots (k_{ii} - m_i\omega^2)\phi_i .. + k_{in}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}\phi_1 + kn_2\phi_2 + \cdots + (k_{nn} - m_n\omega^2)\phi_n = 0 \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Sous forme matricielle: $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$ **(9)**

Comme. $\{\boldsymbol{\phi}\} \neq \mathbf{0}$, il en résulte que le système aura une solution non trivial si :

$$\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0 \qquad (10)$$

« M » et « K » sont définies positives, d'où l'équation (10) admet « n » racines réelles « ω_i^2 ».

En posant « $\lambda = \omega_i^2$ », (10) s'écrit : $\boldsymbol{p}(\lambda) = \mathbf{0}$ appelée équation caractéristiques, polynôme de degré « n ».

« n » solutions « ω_i » appelées pulsations propres.

Et $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ **fréquences propres**

Ou:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_i < \ \ldots \lambda_n$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_i < \ \ldots \omega_n \qquad (11)$$

La plus petite «ω_1 » est appelée pulsation fondamentale.

Et «$f_i = \frac{\omega_1}{2\pi}$ » est appelée fréquence fondamentale.

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0 \qquad (9)$$

En remplaçant chaque valeur de « ω_i » dans (9), on trouvera un vecteur $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ définissant une forme d'oscillation.

Le couple « ω_i , $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ » est appelé mode propre ou normal de vibration.

Ainsi pour « ω_i », on aura:

$$\begin{cases} (k_{11} - m_1\omega_i^2)\,\phi_1 + k_{12}\phi_2 + \cdots + k_{1n}\phi_n = 0 \\ k_{21}\phi_1 + (k_{22} - m_2\omega_i^2)\,\phi_2 + \cdots + k_{2n}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{i1}\phi_1 + ki_2\phi_2 + \cdots (k_{ii} - m_i\omega_i^2)\phi_i \ldots + k_{in}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}\phi_1 + kn_2\phi_2 + \cdots + (k_{nn} - m_n\omega_i^2)\phi_n = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Puisque le déterminant (10) est nul, $\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}| = 0$, il s'en suit que le système (12) admet seulement « n-1 » équations actives (Une des équations ne rapporte rien).

Dans ce cas, $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ ne peut être déterminé que sous forme de rapport.

Exemple, on suppose que $\boldsymbol{\phi}_{i1} = \mathbf{1}$ et on calcule les autres composantes en fonction de $\boldsymbol{\phi}_{i1}$.

Généralement, on choisit la plus grande valeur des composantes de $\{\boldsymbol{\phi i}\}$ et on exprime les autres composantes par rapport à cette valeur.

$$\phi_{k,\,i} = \frac{\phi_k^{(i)}}{\phi_{max}^{(i)}}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

A la fin, on obtient 02 matrices (objectif du mouvement libre non amorti)

Matrice spectrale

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

(13)

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1i} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2i} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \dots & \phi_{ii} & \dots & \phi_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{ni} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

(14)

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Solution   Notre cas

ii) Pour le cas particulier, k1=k2=k3=k ; m1=m2=m et C1=C2=C3=0, calculer les fréquences et modes de vibration du système.

Calcul des fréquences et modes propres de vibration ?

On a déjà trouvé

$$\begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{u}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Avec nos données, on aura

Matrice masse $[\boldsymbol{M}] = \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix}$

Matrice amortissement $[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrice rigidité $[\boldsymbol{K}] = \begin{bmatrix} 2\,k & -k \\ -k & 2\,k \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + K\,U = 0}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Solution   Notre cas

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + K\,U = 0}$$

Ou bien, en introduisant le type de solutions :

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$$

$$\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0$$

D'où :

$$\boldsymbol{det}\begin{vmatrix} 2\,k - \lambda\,m & -k \\ -k & 2\,k - \lambda\,m \end{vmatrix} = 0$$

Avec « $\lambda = \omega_i^2$ »

$$(2\,k - \lambda\,m)(2\,k - \lambda\,m) - (-k)(-k) = \lambda^{\,2} m^2 - 4\,k\lambda\,m + 3k^2 = 0$$

$$\boldsymbol{p(\lambda) = 0}$$

Solutions :

$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{k}{m}$ **D'où :** $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, rd/s$ **et** $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ \ s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{3\,k}{m}$ **D'où :** $\omega_1 = \sqrt{\frac{3\,k}{m}} rd/s$ **et** $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3\,k}}\ s$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Equation du mouvement

Modes propres ? **Pour chaque** ω_i **on résout le système** $(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\}=0$

i. $\omega_i=\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}rd/s$

$$\begin{bmatrix} 2\,k-\lambda_1\,m & -k \\ -k & 2\,k-\lambda_1\,m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{Bmatrix}=0 \qquad \begin{bmatrix} 2\,k-\frac{k}{m}m & -k \\ -k & 2\,k-\frac{k}{m}m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k\,\phi_{11}-k\,\phi_{21}=0} \\ \boldsymbol{-k\,\phi_{11}+k\,\phi_{21}=0} \end{cases}$$

02 éqs. dépendantes

En posant $\boldsymbol{\phi_{11}=1}$**, on aura** $\boldsymbol{\phi_{21}=1}$

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\phi_{11}}\\ \boldsymbol{\phi_{21}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{1}\end{Bmatrix}$$

ii. $\omega_i=\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}rd/s$

$$\begin{bmatrix} 2\,k-\lambda_2\,m & -k \\ -k & 2\,k-\lambda_2\,m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\end{Bmatrix}=0 \qquad \begin{bmatrix} 2\,k-\frac{3k}{m}m & -k \\ -k & 2\,k-\frac{3k}{m}m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-k\,\phi_{12}-k\,\phi_{22}=0} \\ \boldsymbol{-k\,\phi_{12}-k\,\phi_{22}=0} \end{cases}$$

02 éqs. dépendantes

En posant $\boldsymbol{\phi_{12}=1}$**, on aura** $\boldsymbol{\phi_{22}=-1}$

$$\{\boldsymbol{\phi_2}\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\phi_{12}}\\ \boldsymbol{\phi_{22}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{-1}\end{Bmatrix}$$

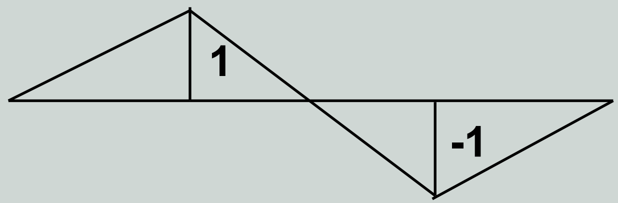
© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Equation du mouvement

Ainsi

Mode 1 $\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$

Mode 2 $\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$



Finalement **Matrice spectrale**

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1i} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2i} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \dots & \phi_{ii} & \dots & \phi_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{ni} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dfrac{k}{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{3\,k}{m} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -1 \end{bmatrix}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Equation du mouvement

Qlqs propriétés des modes

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_i\}^T M \{\phi_j\} \; ?$$

$$\{\phi_1\}^T M \{\phi_2\} = \{1 \quad 1\} \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \{m \quad m\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

M-Orthogonalité

$$\{\phi_i\}^T K \{\phi_j\} \; ?$$

$$\{\phi_1\}^T K \{\phi_2\} = \{1 \quad 1\} \begin{bmatrix} 2k & -\boldsymbol{k} \\ -\boldsymbol{k} & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \{k \quad k\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

K-Orthogonalité

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Equation du mouvement

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix} \qquad \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{Bmatrix}$$

Normalisation par rapport à « M »

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_i = \frac{\{\boldsymbol{\phi}_i\}}{\sqrt{\widehat{M}_i}} \qquad \textbf{avec} \qquad \widehat{M}_i = \{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \, \boldsymbol{M} \, \{\boldsymbol{\phi}_i\}$$

$$\widehat{M}_1 = \{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{M} \, \{\boldsymbol{\phi_1}\} = \{1 \quad 1\} \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{m \quad m\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \widehat{M}_1 = 2\,m \qquad \hat{\phi}_1 = \frac{\{\phi_1\}}{\sqrt{\widehat{M}_1}} = \frac{1}{\sqrt{2\,m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,m}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,m}} \end{Bmatrix}$$

$$\widehat{M}_2 = \{\boldsymbol{\phi_2}\}^T \boldsymbol{M} \, \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \{1 \quad -1\} \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \{m \quad -m\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \widehat{M}_2 = 2\,m$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\{\phi_2\}}{\sqrt{\widehat{M}_2}} = \frac{1}{\sqrt{2\,m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,m}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2\,m}} \end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\,m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Et:

$$[\Phi\,]^T [M][\Phi\,] = \frac{1}{\sqrt{2\,m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\,m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\,m} \begin{bmatrix} m & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Equation du mouvement

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix} \qquad \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{Bmatrix}$$

Normalisation par rapport à « K »

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_i = \frac{\{\boldsymbol{\phi}_i\}}{\sqrt{\widehat{K}_i}} \qquad \textbf{avec} \qquad \widehat{K}_i = \{\boldsymbol{\phi}_i\}^T\ \boldsymbol{K}\ \{\boldsymbol{\phi}_i\}$$

$$\widehat{K}_1 = \{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{K}\ \{\boldsymbol{\phi_1}\} = \{1 \quad 1\}\begin{bmatrix} 2\,k & -\boldsymbol{k} \\ -\boldsymbol{k} & 2\,k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{k \quad k\}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \widehat{K}_1 = 2\,k \qquad \widehat{\phi}_1 = \frac{\{\phi_1\}}{\sqrt{\widehat{K}_1}} = \frac{1}{\sqrt{2\,k}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} \end{Bmatrix}$$

$$\widehat{K}_2 = \{\boldsymbol{\phi_2}\}^T \boldsymbol{K}\ \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \{1 \quad -1\}\begin{bmatrix} 2\,k & -\boldsymbol{k} \\ -\boldsymbol{k} & 2\,k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \{3\,k \quad -3\,k\}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \widehat{M}_2 = 6\,k$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & \dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \end{bmatrix} \qquad \widehat{\phi}_2 = \frac{\{\phi_2\}}{\sqrt{\widehat{K}_2}} = \frac{1}{\sqrt{6\,k}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{6\,k}} \end{Bmatrix}$$

Et:

$$[\Phi\ ]^T[K][\Phi\ ] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\,k & -\boldsymbol{k} \\ -\boldsymbol{k} & 2\,k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & \dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{k}{\sqrt{2\,k}} & \dfrac{k}{\sqrt{2\,k}} \\ \dfrac{3\,k}{\sqrt{6\,k}} & -\dfrac{3\,k}{\sqrt{6\,k}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & \dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,k}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6\,k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Merci. **Fin de l'Application 10**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FTTlemcen*