Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 2: Systèmes à plusieurs DDL.

Application 11

Vibrations libres Non Amortis

Formulation des équations et calcul des valeurs et vecteurs propres

Exemple 11 **Samedi 13.01.2024**

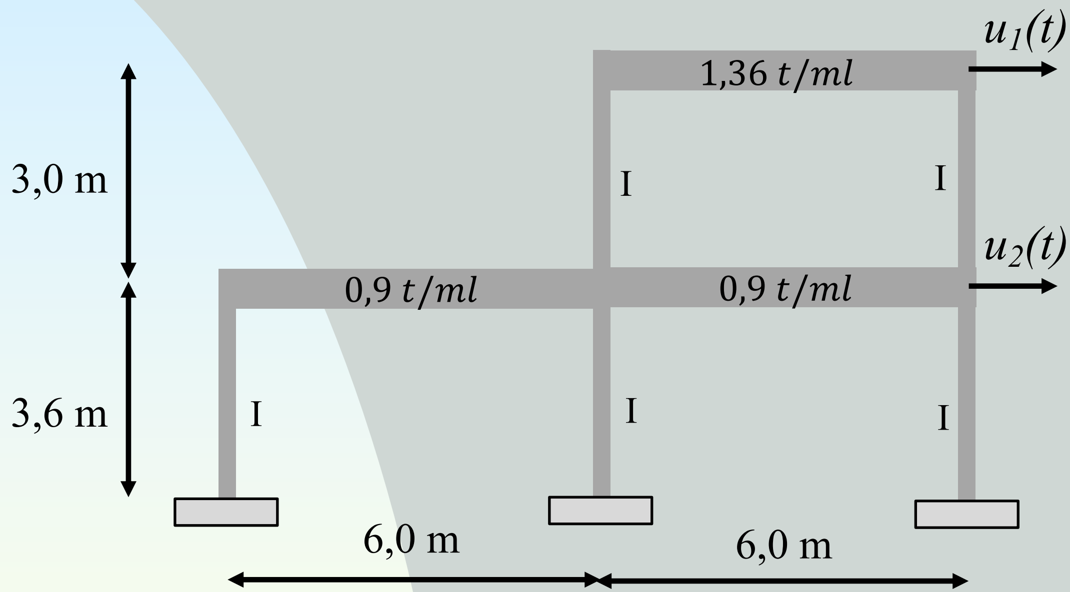
Objectif

Le but de cette application est de :

- **Calculer les matrices masse et rigidité d'un SPDDL**
- **Calculer les fréquences et modes propres de vibration**
- **Calculer la matrice d'amortissement à partir des matrices M et K**

Exemple 1

On donne le portique à 02 niveaux suivant montré en figure ci-dessous. On vous demande



Pour tous les poteaux:

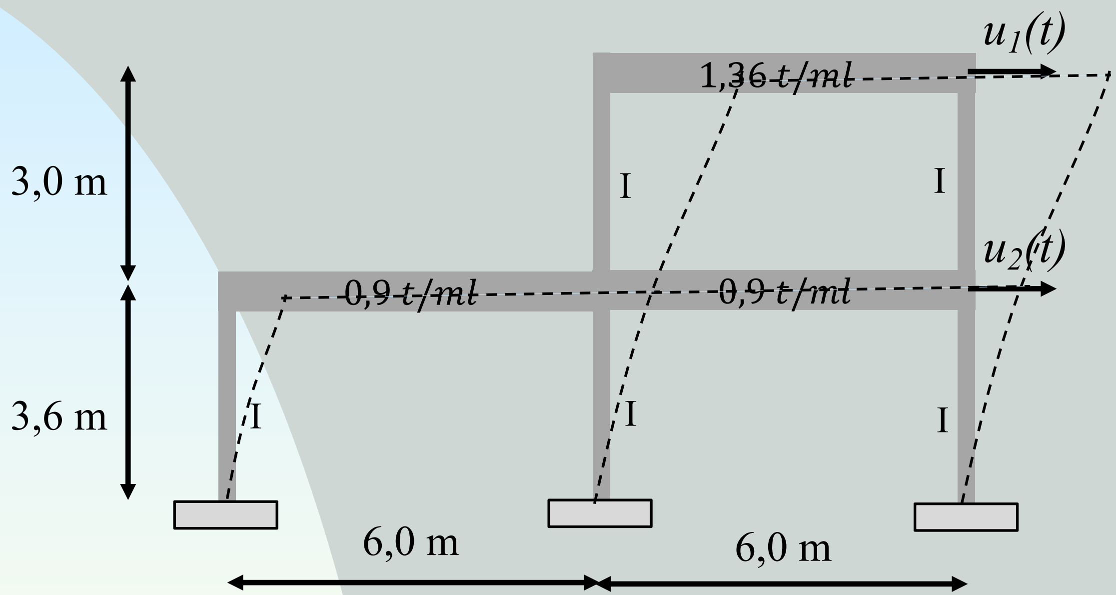
E I = 6,895 10^6 N.m^2

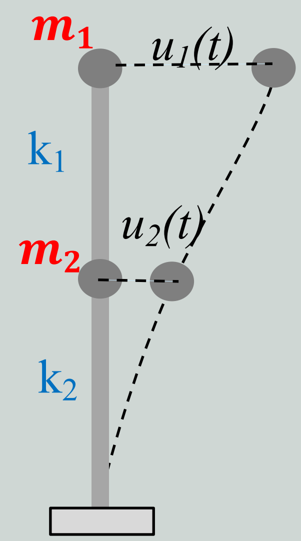
i) **Déterminer les matrices $[M]$ et $[K]$ en passant par les équations de mouvement.**

ii) **Déterminer la matrice d'amortissement $[C]$ en utilisant les valeurs propres du système, si le coefficient d'amortissement de chaque mode est $\xi_j = 0,1$.**

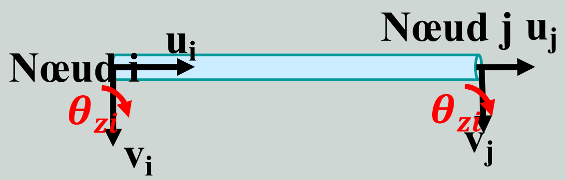
Solution

Equations de mouvement ?





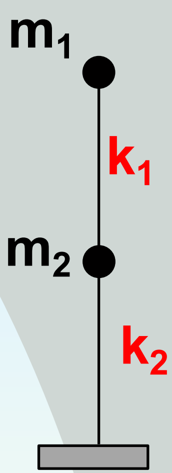
- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- ✓ **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 02 niveaux.**

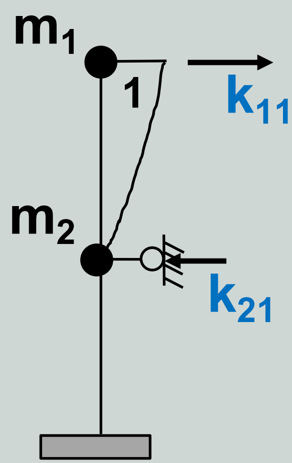


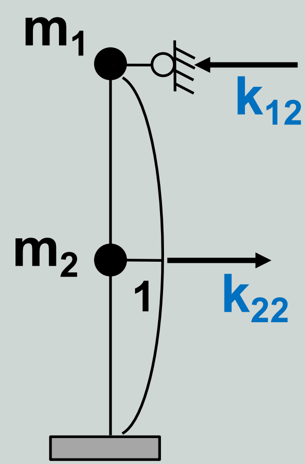
Solution

i) Déterminer les matrices $[M]$ et $[K]$?

Rigidité ?







$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$k_{11} = k_1$

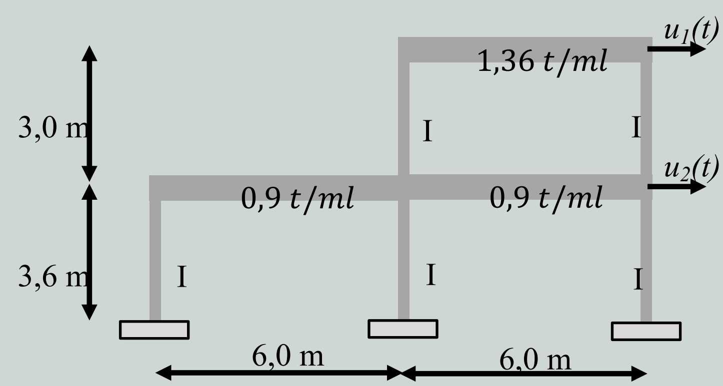
$k_{21} = -k_1$

$k_{12} = -k_1$

$k_{22} = k_1 + k_2$

Poteaux en parallèles

$$k_1 = \frac{12E(2I)}{h_1^3} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{12E(3I)}{h_2^3}$$



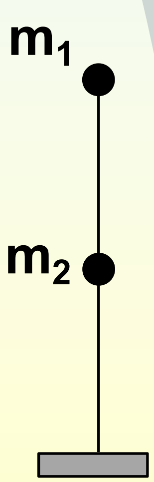
Solution

$$k_1 = \frac{12E(2I)}{h_1^3} \qquad k_2 = \frac{12E(3I)}{h_2^3}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12E(2I)}{h_1^3} & -\dfrac{12E(2I)}{h_1^3} \\ -\dfrac{12E(2I)}{h_1^3} & \dfrac{12E(2I)}{h_1^3} + \dfrac{12E(3I)}{h_2^3} \end{bmatrix}$$

$$[K] = 12EI \begin{bmatrix} \dfrac{2}{h_1^3} & -\dfrac{2}{h_1^3} \\ -\dfrac{2}{h_1^3} & \dfrac{2}{h_1^3} + \dfrac{3}{h_2^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,128 & -6,128 \\ -6,128 & 11,45 \end{bmatrix} 10^6\ N/m$$

Masse ?



$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

avec $m_1 = 1,36\ x\ 6 = 8160\ kg$

$m_2 = 0,9\ x(\ 6 + 6) = 10800\ kg$

$$[M] = \begin{bmatrix} 8160 & 0 \\ 0 & 10800 \end{bmatrix} kg$$

Solution

Calcul des fréquences et modes propres de vibration ?

$$M\,\ddot{U} + K\,U = 0$$

Après introduction de la solution: $(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$

Comme. $\{\boldsymbol{\phi}\} \neq \mathbf{0}$**, il en résulte que le système aura une solution non trivial si :**

$$\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}| = 0$$

D'où : $\boldsymbol{det}\begin{vmatrix} 6{,}128\ 10^6 - \lambda\ \ 8160 & -6{,}128\ 10^6 \\ -6{,}128\ 10^6 & 11{,}45\ 10^6 - \lambda\ \ 10800 \end{vmatrix} = 0$ **Avec «** $\lambda = \omega_i^2$ **»**

$$(6{,}128\ 10^6 - \lambda\ \ 8160)(11{,}45\ 10^6 - \lambda\ \ 10800) - (-6{,}128\ 10^6)(-6{,}128\ 10^6) = 0$$

$$\boldsymbol{p}(\lambda) = 88{,}128\,\lambda^2 - 159614{,}4\,\lambda + 32{,}613216\ 10^6 = \mathbf{0}$$

Solutions :

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 234{,}75$ **D'où :** $\omega_1 = 15{,}32\ rd/s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 1576{,}41$ **D'où :** $\omega_2 = 39{,}70\ rd/s$

Modes propres ? **Pour chaque ω_i on résout le système $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$**

i. $\omega_i = \omega_1 = 15{,}32\ rd/s$

$$\begin{bmatrix} 6{,}128\ 10^6 - \lambda_1\ 8160 & -6{,}128\ 10^6 \\ -6{,}128\ 10^6 & 11{,}45\ 10^6 - \lambda_1\ 10800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6{,}128\ 10^6 - 234{,}75\ 8160 & -6{,}128\ 10^6 \\ -6{,}128\ 10^6 & 11{,}45\ 10^6 - 234{,}75\ 10800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4{,}21244\ 10^6 & -6{,}128\ 10^6 \\ -6{,}128\ 10^6 & 8{,}9147\ 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{4{,}21244}\ \boldsymbol{\phi_{11}} - \mathbf{6{,}128}\ \boldsymbol{\phi_{21}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{-6{,}128}\ \boldsymbol{\phi_{11}} + \mathbf{8{,}9147}\ \boldsymbol{\phi_{21}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

02 éqs. dépendantes **X (- 1,454738)**

En posant $\boldsymbol{\phi_{11}} = \mathbf{1}$, on aura $\boldsymbol{\phi_{21}} = \frac{\mathbf{4{,}21244}}{\mathbf{6{,}128}} = \mathbf{0{,}687}$

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0{,}687} \end{Bmatrix}$$

Modes propres ? **Pour chaque ω_i on résout le système $(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\}=0$**

ii. $\omega_i=\omega_2=39{,}70\, rd/s$

$$\begin{bmatrix} 6{,}128\,10^6-\lambda_2\ 8160 & -6{,}128\,10^6 \\ -6{,}128\,10^6 & 11{,}45\,10^6-\lambda_2\ 10800 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\phi}_{12}\\ \boldsymbol{\phi}_{22}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} 6{,}128\,10^6-1576{,}41\ 8160 & -6{,}128\,10^6 \\ -6{,}128\,10^6 & 11{,}45\,10^6-1576{,}41\ 10800 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\phi}_{12}\\ \boldsymbol{\phi}_{22}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} -6{,}7355\,10^6 & -6{,}128\,10^6 \\ -6{,}128\,10^6 & -5{,}57523\,10^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\phi}_{12}\\ \boldsymbol{\phi}_{22}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-6,7355\,\phi_{12}-6,128\,\phi_{22}=0} \\ \boldsymbol{-6,128\,\phi_{12}-5,57523\,\phi_{22}=0} \end{cases}$$ **02 éqs. dépendantes** X (1,099147)

En posant $\boldsymbol{\phi_{22}=1}$, on aura $\boldsymbol{\phi_{12}=\frac{-6,128}{6,7355}=-0,91}$

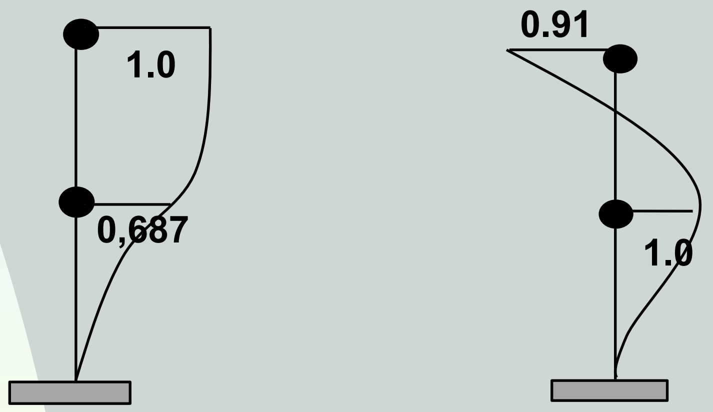
$$\{\boldsymbol{\phi}_2\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\phi}_{12}\\ \boldsymbol{\phi}_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{-0,91}\\ \boldsymbol{1}\end{Bmatrix}$$

Equation du mouvement

Ainsi

Mode 1 $\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,687 \end{Bmatrix}$

Mode 2 $\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,91 \\ 1 \end{Bmatrix}$



Finalement **Matrice spectrale**

$$\Omega = \begin{bmatrix} 15,32 & 0 \\ 0 & 39,7 \end{bmatrix}$$

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -0,91 \\ 0,687 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

ii) Matrice amortissement $[C]$?

L'amortissement reste à ce jour tout à fait vague.

Il est évalué empiriquement.

Généralement :

$$C = M \sum_{i=0}^{q} a_i \left(M^{-1}K\right)^i$$

Où:

a_i : Multiplicateur scalaire

q : Nbr arbitraire tel que q < nbr de DDL

Les « a_i » sont généralement déterminés à partir des modes par:

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_i a_i \, \omega_n^{2i}$$

Solution

$$C = M \sum_{i=0}^{q} a_i \left(M^{-1}K\right)^i \qquad \xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_i a_i\, \omega_n^{2i}$$

Pour q=1, on a le modèle de Rayleigh

$$C = a_0\, M + a_1\, K$$

a_0 et a_1 sont reliés à n'importe quel mode « j » par:

$$\xi_j = \frac{a_0}{2\omega_j} + \frac{a_1 \omega_j}{2}$$

Si on connait «ξ_1» (correspondant à ω_1) et «ξ_2» (correspondant à ω_2)

$$\xi_1 = \frac{a_0}{2\omega_1} + \frac{a_1 \omega_1}{2}$$

$$\xi_2 = \frac{a_0}{2\omega_2} + \frac{a_1 \omega_2}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

$$a_1 = \frac{2(\xi_1\omega_1 - \xi_2\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

Les mêmes propriétés que la matrice K

Solution

Pour notre cas, avec : $[K] = \begin{bmatrix} 6,128 & -6,128 \\ -6,128 & 11,45 \end{bmatrix} 10^6\ N/m \quad [M] = \begin{bmatrix} 8160 & 0 \\ 0 & 10800 \end{bmatrix} kg$

$$\boldsymbol{C = a_0\ M + a_1\ K}$$

Calculons a_0 et a_1

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = \frac{2\ 15,32\ 39,7(0,1\ 15,32 - 0,1\ 39,7)}{15,322 - 39,72} = 2,21$$

$$a_1 = \frac{2(\xi_1\omega_1 - \xi_2\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = \frac{2(0,1\ 15,32 - 0,1\ 39,7)}{15,322 - 39,72} = 0,003635$$

Remplaçons a_0 et a_1 $\quad C = a_0\ M + a_1\ K$

$$[C] = 2,21 \begin{bmatrix} 8160 & 0 \\ 0 & 10800 \end{bmatrix} + 0{,}003635 \begin{bmatrix} 6,128 & -6,128 \\ -6,128 & 11,45 \end{bmatrix} 10^6$$

$$\boxed{[C] = \begin{bmatrix} 40308,88 & -22276 \\ -22276 & 65488,75 \end{bmatrix}}$$

On peut toujours vérifier qlqs propriétés des modes

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0,687} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-0,91} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_i\}^T \boldsymbol{M} \{\phi_j\} ?$$

$$\{\phi_1\}^T \boldsymbol{M} \{\phi_2\} = \{1 \quad 0{,}687\} \begin{bmatrix} \mathbf{8160} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10800} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}91 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{8160 \quad 7419{,}6\} \begin{Bmatrix} -0{,}91 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

M-Orthogonalité

$$\{\phi_i\}^T \boldsymbol{K} \{\phi_j\} ?$$

$$\{\phi_1\}^T \boldsymbol{K} \{\phi_2\} = \{1 \quad 0{,}687\} \begin{bmatrix} \mathbf{6,128} & \mathbf{-6,128} \\ \mathbf{-6,128} & \mathbf{11,45} \end{bmatrix} 10^6 \begin{Bmatrix} -0{,}91 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
$$= \{1{,}918064 \quad 1{,}73815\} \begin{Bmatrix} -0{,}91 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

K-Orthogonalité

Merci. Fin de l'Application 11