Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 2: Systèmes à plusieurs DDL.

Application 12

Vibrations Forcées

Calcul par superposition modale

Exemple 12 **Samedi 13.01.2024**

Objectif

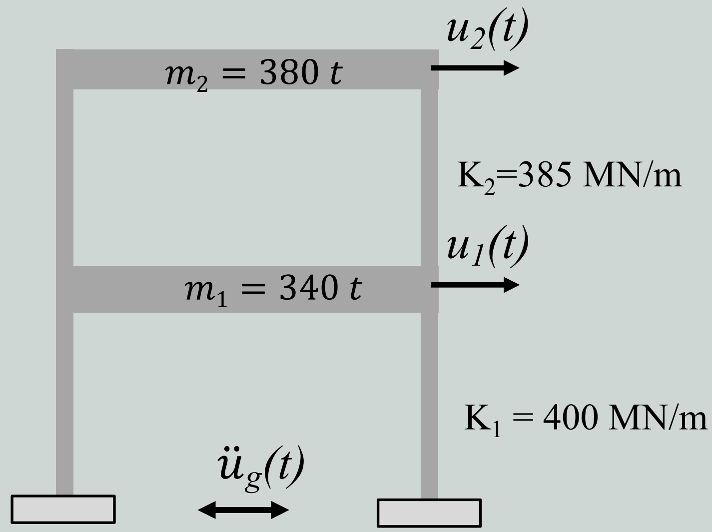
Le but de cette application est de :

- **Calculer les réponses dynamiques d'un SPDDL pour des systèmes amortis ou non amortis**
- **Utilisation de la méthode de superposition modale pour la résolution**
- **Calculer les efforts à la base par les différentes méthodes de combinaison (Valeurs absolues, SRSS,…) .**

Exemple 1

On donne le portique à 02 niveaux montré en figure ci-contre. La structure est soumise à une accélération harmonique du support $\ddot{u}_g(t) = 0{,}25\, g \sin 30\, t$ où « g » est l'accélération de la pesanteur et « t » est exprimé en secondes. Le système est initialement au repos.

On suppose d'abord que le système est non amorti.



i) Calculer les fréquences et modes propres de vibration.

ii) Calculer les déplacements exacts à t=0,2 s

iii) Calculer les forces élastiques et l'effort tranchant à la base à cet instant en utilisant la méthode de superposition modale.

iv) En supposant maintenant que l'amortissement est différent de zéro et que les facteurs d'amortissement des deux modes sont égaux à 5%.

Calculer les déplacements maxima en régime permanent et en déduire l'effort tranchant maximum à la base de la construction pour les 02 cas suivants

a. Cas 1 : En ne considérant que le 1er mode

b. Cas 2 : En considérant les 02 modes et en superposant les modes à l'aide des différentes formules (Somme valeurs absolues et SRSS)

Rappel

$$M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = P(t)$$

02 grandes méthodes pour la résolution des SPDDL forcés

Méthode de la superposition modale

- Toute position déformée d'une structure est la combinaison linéaire des modes de vibration.
- Transforme un système d'équations différentielles couplées en un système d'équations différentielles découplées.
- Avantage : Facile à utiliser
- Inconvénients : recherche d'un nombre important de modes propres.
- Valable uniquement pour les systèmes élastiques linéaires.

Méthode Pas-à-Pas

- Diviser la réponse en intervalle de temps.
- Calcul de la déformée à la fin du 1^er^ intervalle sur la base des CI et du chargement durant le 1^er^ intervalle.
- Solution du 1^er^ intervalle devient CI du 2^ème^ intervalle et ainsi de suite jusqu'au temps voulu.
- Valable pour les systèmes élastiques linéaires et les systèmes non linéaires

- On utilise les modes de vibration pour changer de base de coordonnées.
- Les modes représentent « n » allures de déplacements indépendantes, dont les amplitudes servent de coordonnées généralisées représentant un déplacement quelconque. (On pense comme le cas de développement en série de Fourier).
- Les mêmes avantages : Orthogonalité et bonne convergence avec quelques termes.

$$M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = P(t)$$

On pose $\{U\} = [\Phi\,]\{Y\}$ (1) $\{U\} = \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_2\}y_2 + \cdots + \{\phi_i\}y_i + \cdots + \{\phi_n\}y_n$

$$\{U\} = \sum_{i=1}^{n} \{\phi_i\} y_i$$

- $[\Phi\,]$: Matrice modale (nxn) ayant les vecteurs modaux en colonnes et sont indépendants.
- D'où $[\Phi\,]$ est régulière et inversible.
- Généralement on évite d'inverser $[\Phi\,]$ pour calculer les $\{Y\}$
- On passe par la propriété d'orthogonalité pour résoudre le problème.

Le plus souvent, on utilise l'orthogonalité par la matrice masse

Pré multiplions (1) $\{U\} = [\Phi\,]\{Y\}$ par $\{\phi_n\}^T M$ de part et d'autre:

$$\{\phi_n\}^T M\,\{U\} = \{\phi_n\}^T M [\Phi\,]\{Y\}$$

$$\{\phi_n\}^T M\,\{U\} = \{\phi_n\}^T M\,\{\phi_1\}y_1 + \{\phi_n\}^T M\,\{\phi_2\}y_2 + \cdots + \{\phi_n\}^T M\,\{\phi_i\}y_i + \cdots + \{\phi_n\}^T M\,\{\phi_n\}y_n$$

Méthode de superposition modale

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = P(t)}$$

$$\{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi_1}\}\boldsymbol{y_1} + \{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi_2}\}\boldsymbol{y_2} + \cdots + \{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi_i}\}\boldsymbol{y_i} + \cdots + \{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi_n}\}\boldsymbol{y_n}$$

- **Due à l'orthogonalité, tous les termes s'annulent sauf le terme « n ». Soit:**

$$\{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi_n}\}\boldsymbol{y_n}$$

D'où

$$\boldsymbol{y_n} = \frac{\{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{U}\}}{\{\boldsymbol{\phi_n}\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi_n}\}} \qquad \textbf{(2)}$$

C'est l'équivalent des coefficients des séries de Fourier

Posons $\boldsymbol{U = \Phi\,Y}$ **alors** $\boldsymbol{\dot{U} = \Phi\dot{Y}}$ **et** $\boldsymbol{\ddot{U} = \Phi\ddot{Y}}$ **Ainsi, on aura:**

$$\phi_n^T M \Phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T C \Phi_n \dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{n}} + \phi_n^T K \Phi_n y_n = \phi_n^T p(t)$$

(1xn) (nxn) (nx1) (1x1)

D'où:

$$M_n \ddot{y}_n + C_n \dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{n}} + K_n y_n = P_n \qquad \textbf{(3)}$$

Avec

$$M_n = \phi_n^T M \Phi_n$$
$$C_n = \phi_n^T C \Phi_n$$
$$K_n = \phi_n^T K \Phi_n$$
$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

Pour chaque valeur de « n », on aura une équation.
Toutes les équations sont découplées (indépendantes)

Méthode de superposition modale

$$M_n\ddot{y}_n + C_n\dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{n}} + K_n y_n = P_n$$

En divisant le tout par M_n :

$$\ddot{y}_n + \frac{C_n}{M_n}\dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_n}{M_n}y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

Comme pour les S1DDL :

$$\frac{C_n}{M_n} = \boldsymbol{2\xi_n\omega_n} \quad \textbf{et} \quad \frac{K_n}{M_n} = \boldsymbol{\omega_n^2}$$

Ainsi, on aura:

$$\boxed{\ddot{y}_n + \boldsymbol{2\xi_n\omega_n\dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2}y_n = \frac{P_n}{M_n}} \qquad \textbf{(4)}$$

Résolution de cette équation = S1DDL
Duhamel, Pas-à-Pas, Harmonique, …

Problème des valeurs maximales ?

Sachant que : $\{U\} = [\Phi\ ]\{Y\}$ est valable pour un « t » fixe.

Or les valeurs maximales de $\{Y\}$ ne se produisent pas pour le même « t », il faut passer par des approximations (prendre les bornes supérieures):

02 méthodes:

1. **Méthode de la somme des valeurs absolues.** **(Surestime)**

$$u_{imax} = |\emptyset_{i1} y_{1max}| + |\emptyset_{i2} y_{2max}| + ... + |\emptyset_{ii} y_{imax}| + ... + |\emptyset_{in} y_{nmax}| \quad (5)$$

2. **Méthode de racine carrée de la somme des carrés (SRSS).**

$$u_{imax} = \sqrt{(\emptyset_{i1} y_{1max})^2 + (\emptyset_{i2} y_{2max})^2 + \cdots + (\emptyset_{ii} y_{imax})^2 + \cdots + (\emptyset_{in} y_{nmax})^2}$$

La plus utilisée **(6)**

Résumé de la méthode de superposition modale

1. Calcul des matrices K, C et M et du vecteur force extérieure.
   Equation du mouvement $\boldsymbol{M\ \ddot{U} + C\ \dot{U} + K\ U = P(t)}$

2. Calcul des fréquences et modes propres de vibration
   $(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$ avec $|\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}| = 0$

3. Calcul de la masse et du chargement généralisés pour le découplage
   $M_n = \phi_n^T M \phi_n$ et $P_n = \phi_n^T p(t)$

4. Equations découplées

$$\ddot{y}_n + \boldsymbol{2\xi_n\omega_n\dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

5. Calcul des réponses modales au chargement imposé
   - Calcul de $y_i(t)$ pour chaque mode (1SDDL : Duhamel, Harmonique,…) (Chap 6)

$$y_i(t) = \frac{1}{\omega_{ai}}(\dot{y}_{i\boldsymbol{\tau}_1} + \xi_i\boldsymbol{\omega_i} y_{i\boldsymbol{\tau}_1})\boldsymbol{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\boldsymbol{\tau}_1)} sin\omega_{ai}(t-\boldsymbol{\tau}_1) + (y_{i\boldsymbol{\tau}_1})\boldsymbol{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\boldsymbol{\tau}_1)} cos\omega_i(t-\boldsymbol{\tau}_1) + \frac{1}{M_i\omega_{ai}}\int_{\boldsymbol{\tau}_1}^{t} P_i(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\boldsymbol{\tau})} sin(\omega_{ai}(t-\tau))d\boldsymbol{\tau}$$

   - CI : U(0) et $\dot{U}$ (0) connues. Il faut calculer $y_i(0)$ et $\dot{y}i$ (0)

$$\boldsymbol{y_i} = \frac{\{\boldsymbol{\phi_i}\}^T\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{U}\}}{\boldsymbol{M_i}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\dot{y}_i} = \frac{\{\boldsymbol{\phi_i}\}^T\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\dot{U}}\}}{\boldsymbol{M_i}}$$

   - Pour des CI nulles :

$$y_i(t) = \frac{1}{M_i\omega_{ai}}\int_{\boldsymbol{\tau}_1}^{t} P_i(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\boldsymbol{\tau})} sin(\omega_{ai}(t-\tau))d\boldsymbol{\tau}$$

6. **Réponse en coordonnées géométriques.**

$\{U\} = [\Phi]\{Y\}$ **Soit** $\{U\} = \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_2\}y_2 + \cdots + \{\phi_i\}y_i + \cdots + \{\phi_n\}y_n$

7. **Calcul des déplacements maximums**

- **Détermination des déplacements maximum généralisés Y_{max}**
  A partir des solutions $y_i(t)$, déterminer pour chaque mode y_{imax}
- **Méthode AVS :** $u_{imax} = |\emptyset_{i1}y_{1max}| + |\emptyset_{i2}y_{2max}| + \ldots + |\emptyset_{ii}y_{imax}| + \ldots + |\emptyset_{in}y_{nmax}|$
- **Méthode SRSS :**

$$u_{imax} = \sqrt{(\emptyset_{i1}y_{1max})^2 + (\emptyset_{i2}y_{2max})^2 + \cdots + (\emptyset_{ii}y_{imax})^2 + \cdots + (\emptyset_{in}y_{nmax})^2}$$

8. **Calcul des forces élastiques**

- **Soit** $F_s = K\,U = K\Phi Y$

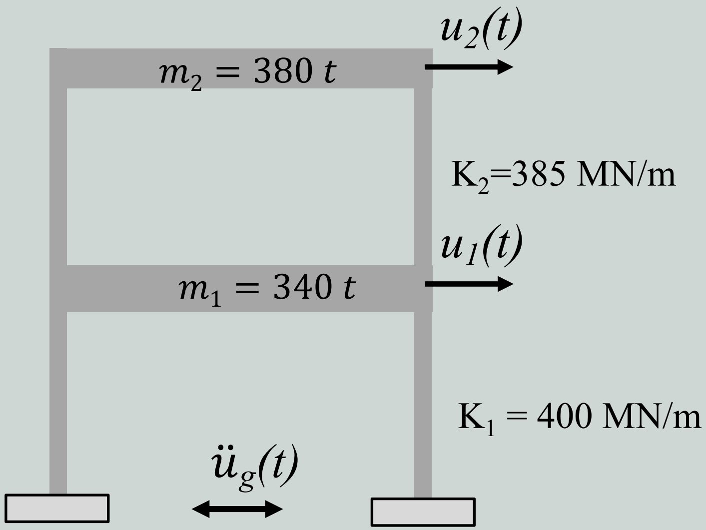
$$\{F_s\} = K\{\phi_1\}y_1 + K\{\phi_2\}y_2 + \cdots + K\{\phi_n\}y_n$$

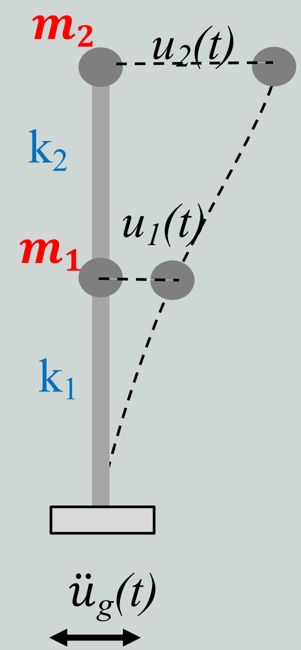
- **Ou bien :** $F_s = K\,U = K\Phi\,Y = \omega_i^2 M\Phi\,Y$

$$\{F_s\} = \omega_1^2 M\{\phi_1\}y_1 + \omega_1^2 M\{\phi_2\}y_2 + \ldots + \omega_n^2 M\{\phi_n\}y_n$$

Solution

Notre cas ?



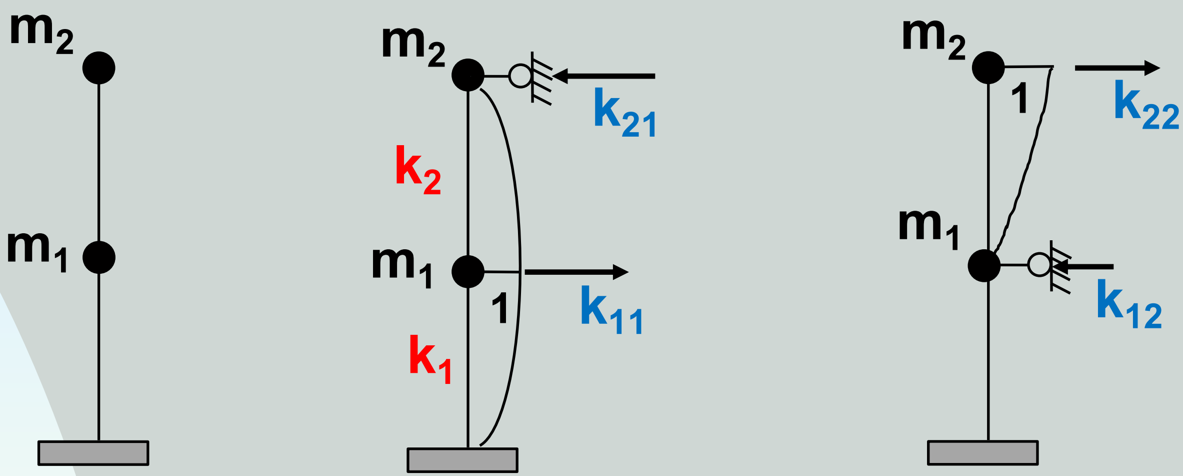


- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- ✓ **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 02 niveaux.**

Solution

Matrices ? (Attention à l'ordre de la numérotation)

Rigidité ?



$k_{11} = k_1 + k_2$

$k_{21} = -k_2$

$k_{12} = -k_2$

$k_{22} = k_2$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 400 + 385 & -385 \\ -385 & 385 \end{bmatrix} MN/m = \begin{bmatrix} 785 & -385 \\ -385 & 385 \end{bmatrix} 10^3\ KN/m$$

Masse ?

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [M] = \begin{bmatrix} 340 & 0 \\ 0 & 380 \end{bmatrix} (t)$$

Solution

Calcul des fréquences et modes propres de vibration ?

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + K\,U = 0}$$

Après introduction de la solution: $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$

Comme. $\{\boldsymbol{\phi}\} \neq \boldsymbol{0}$, il en résulte que le système aura une solution non trivial si :

$$\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0$$

D'où : $\boldsymbol{det}\begin{vmatrix} 785\,10^3 - \lambda\;\; 340 & -385\,10^3 \\ -385\,10^3 & 385\,10^3 - \lambda\;\; 380 \end{vmatrix} = 0$ **Avec « $\lambda = \omega_i^2$ »**

$$(785\,10^3 - \lambda\;\; 340)(385\,10^3 - \lambda\;\; 380) - (-385\,10^3)(-385\,10^3) = 0$$

$$\boldsymbol{p}(\lambda) = 129{,}2\,\lambda^{\,2} - 429200\,\lambda\; + 154000\,10^3 = \boldsymbol{0}$$

Solutions :

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 409{,}216$ **D'où :** $\omega_1 = 20{,}23\; rd/s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 2912{,}765$ **D'où :** $\omega_2 = 53{,}97\; rd/s$

Modes propres ? **Pour chaque ω_i on résout le système $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$**

i. $\omega_i = \omega_1 = 20{,}23\, rd/s$

$$\begin{bmatrix} 785\;10^3 - \lambda_1\;340 & -385\;10^3 \\ -385\;10^3 & 385\;10^3 - \lambda_1\;380 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 785\;10^3 - 409{,}216\;340 & -385\;10^3 \\ -385\;10^3 & 385\;10^3 - 409{,}216\;380 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 645{,}867 & -385 \\ -385 & 229{,}498 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{645,867\;\boldsymbol{\phi_{11}} - 385\;\boldsymbol{\phi_{21}} = 0} \\ \mathbf{-385\;\boldsymbol{\phi_{11}} + 229,498\;\boldsymbol{\phi_{21}} = 0} \end{cases}$$

02 éqs. dépendantes

X (1,677576)

En posant $\boldsymbol{\phi_{21}} = 1$, on aura $\boldsymbol{\phi_{11}} = \frac{\mathbf{385}}{\mathbf{645{,}867}} = \mathbf{0,596}$

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0,596} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

Modes propres ?

Pour chaque ω_i on résout le système $(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\}=0$

ii. $\omega_i = \omega_2 = 53{,}97\ rd/s$

$$\begin{bmatrix} 785\ 10^3 - \lambda_2\ 340 & -385\ 10^3 \\ -385\ 10^3 & 385\ 10^3 - \lambda_2\ 380 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 785\ 10^3 - 2912{,}765\ 340 & -385\ 10^3 \\ -385\ 10^3 & 385\ 10^3 - 2912{,}765\ 380 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -205{,}340 & -385 \\ -385 & -721{,}851 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\mathbf{205,34}\ \boldsymbol{\phi_{12}} - \mathbf{385}\ \boldsymbol{\phi_{22}} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{385}\ \boldsymbol{\phi_{12}} - \mathbf{721,851}\ \boldsymbol{\phi_{22}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

02 éqs. dépendantes

X (1,874937)

En posant $\boldsymbol{\phi_{12}} = \mathbf{1}$, on aura $\boldsymbol{\phi_{22}} = \frac{\mathbf{-205,34}}{\mathbf{385}} = \mathbf{-0,533}$

$$\{\boldsymbol{\phi}_2\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-0,533} \end{Bmatrix}$$

Equation du mouvement

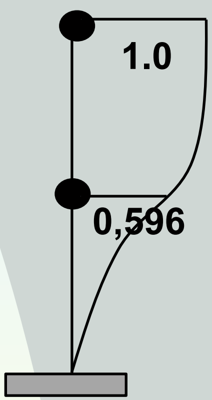
Ainsi

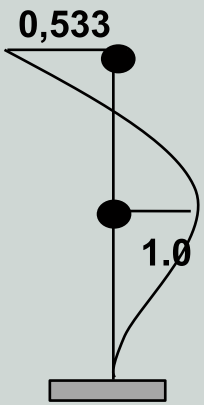
Mode 1

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,596 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Mode 2

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,533 \end{Bmatrix}$$





Finalement

Matrice spectrale

$$\Omega = \begin{bmatrix} 20,23 & 0 \\ 0 & 53,97 \end{bmatrix}$$

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,596 & 1 \\ 1 & -0,533 \end{bmatrix}$$

Solution

ii) Déplacement à t=0,2 s?

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g}$$

U: déplacement relatif

Non amorti ?

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g}$$

Avec $\boldsymbol{U = \Phi\,Y}$ **alors** $\boldsymbol{\ddot{U} = \Phi\ddot{Y}}$

$$\phi_n^T M \phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T C \phi_n \dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{n}} + \phi_n^T K \phi_n y_n = -\phi_n^T \boldsymbol{M}\ddot{U}_g$$

Ou bien

$$\ddot{y}_n + 2\boldsymbol{\xi_n\omega_n\dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = \frac{P_n}{M_n} \qquad \textbf{(7)}$$

Avec : $p(t) = -\boldsymbol{M}\ddot{U}_g$

$P_n = \phi_n^T p(t)$

$$M_n = \phi_n^T M \phi_n$$
$$C_n = \phi_n^T C \phi_n$$
$$K_n = \phi_n^T K \phi_n$$
$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

$\frac{C_n}{M_n} = \boldsymbol{2\xi_n\omega_n}$ **et** $\frac{K_n}{M_n} = \boldsymbol{\omega_n^2}$

Les termes à droite de l'équation (7) sont tous proportionnels à l'accélération du support (Même fonction) alors que dans le cas général, p(t) peut changer d'un DDL à un autre.
Problème plus simple à résoudre

Méthode de superposition modale

Cas de l'excitation du support

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

Sous une autre forme, sachant que le terme de droite s'écrit:

$$-\phi_n^T M\ddot{U}_g = -\phi_n^T M\{1\}\ddot{u}_g$$

$$\{1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En posant

$$\Gamma_i = -\phi_n^T M\{1\}$$

Γ_i : Facteur de participation modale

On aura:

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \Gamma_n\,\ddot{u}_g \qquad (11.14)$$

Avec:

Pour le cas général

$$\Gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji}^2} \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad (8)$$

Pour des modes propres normalisés

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji} \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad (9)$$

Solution

Pour notre cas :

$$\ddot{y}_n + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = \Gamma\, \ddot{u}_g \qquad \Gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji}^2}$$

Ou bien:

$$\mathrm{M_n}\ddot{y}_n + K_n y_n = -\phi_n^T \boldsymbol{M} \ddot{U}_g$$

Avec

Mode 1

$$M_1 = \{0{,}596 \quad 1{,}0\} \begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}596 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 500{,}8\ (t)$$

$$K_1 = \{0{,}596 \quad 1{,}0\} \begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}596 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 204\,924{,}56\ \ (KN/m)$$

$$P_1 = -\{0{,}596 \quad 1{,}0\} \begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} 0{,}25\, g \sin 30\, t = -145{,}66\, g \sin 30\, t = -1429 \sin 30\, t\ \ (KN)$$

$$\mathrm{M_1}\ddot{y}_1 + K_1 y_1 = -\phi_1^T \boldsymbol{M} \ddot{U}_g = P_1(t)$$

Mode 2

$$M_2 = \{1{,}0 \quad -0{,}533\} \begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}533 \end{Bmatrix} = 447{,}95\ (t)$$

$$K_2 = \{1{,}0 \quad -0{,}533\} \begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}533 \end{Bmatrix} = 1304784{,}27 (KN/m)$$

$$P_2 = -\{1{,}0 \quad -0{,}533\} \begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} 0{,}25\, g \sin 30\, t = -34{,}365\, g \sin 30\, t = -337{,}12 \sin 30\, t\ \ (KN)$$

$$\mathrm{M_2}\ddot{y}_2 + K_2 y_2 = -\phi_2^T \boldsymbol{M} \ddot{U}_g = P_2(t)$$

Solution

D'où

$$M_1\ddot{y}_1 + K_1 y_1 = -\phi_1^T M\ddot{U}_g = P_{1(t)} = -1429 \sin 30\, t \ \ (KN)$$

$$M_2\ddot{y}_2 + K_2 y_2 = -\phi_2^T M\ddot{U}_g = P_{2(t)} = -337{,}12 \sin 30\, t \ \ (KN)$$

S1DDL non amorti soumis à une excitation harmonique (Chap 3)

$$\boldsymbol{y_i(t) = y_{ic}(t) + y_{ip}(t)}$$

Avec $\boldsymbol{y_{ic}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ $\boldsymbol{y_{ip}(t) = Y\sin(\Omega t)}$

D'où

$$\boxed{\boldsymbol{y_i(t) = (y_{i0})\cos(\omega_{i0} t) + \left(\frac{\dot{y}_{i0}}{\omega_0} - r\,D\,y_{istat}\right)\sin(\omega_{i0} t) + D\,y_{istat}\sin(\Omega t)}}$$

Cas particulier : CI nulles ($u(0) = u_0 = 0 = y_{i0}$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = 0 = \dot{y}_{i0}$

Solution totale sera:

$$\boldsymbol{y_i(t) = D\,y_{i\,stat}\,(\sin(\Omega t) - r\sin(\omega_0 t))}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_i(t) = \frac{1}{1-{r_i}^2}\frac{P_{i0}}{k_i}(\sin(\Omega t) - r_i\sin(\omega_{i0} t))}}$$

$$\boldsymbol{r_i = \frac{\Omega}{\omega_{i0}}}$$

Solution

D'où

$$y_i(t) = \frac{1}{1-r_i^2}\frac{P_{i0}}{k_i}(\sin(\Omega t) - r_i \sin(\omega_{i0} t))$$

Mode 1

$$r_1 = \frac{\Omega}{\omega_{10}} = \frac{30}{20{,}23} = 1{,}483$$

$$y_1(0{,}2) = \frac{1}{1-1{,}483^2}\frac{1429}{204\,924{,}56}(\sin(30\ 0{,}2) - 1{,}483 \sin(20{,}23\ 0{,}2))$$

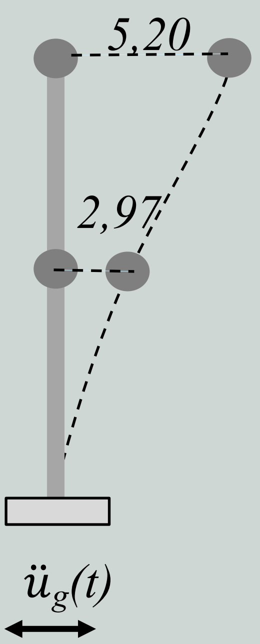
$$y_1(0{,}2) = -5{,}15\ mm$$

Mode 2

$$r_2 = \frac{\Omega}{\omega_{20}} = \frac{30}{53{,}97} = 0{,}5559$$

$$y_2(0{,}2) = \frac{1}{1-0{,}5559^2}\frac{337{,}12}{1304784{,}27}(\sin(30\ 0{,}2) - 0{,}5559 \sin(53{,}97\ 0{,}2))$$

$$y_2(0{,}2) = 0{,}10\ mm$$



Or

$$\{U\} = [\Phi]\{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(0{,}2) \\ u_2(0{,}2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}596 & 1 \\ 1 & -0{,}533 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -5{,}15 \\ 0{,}1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2{,}97 \\ -5{,}20 \end{Bmatrix}\ (mm)$$

Solution

iii) Les forces élastiques et l'effort tranchant à la base à t=0,2 s en utilisant la méthode de superposition modale?

Avec :

$$\begin{Bmatrix} u_1(0{,}2) \\ u_2(0{,}2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2{,}97 \\ -5{,}20 \end{Bmatrix} \;(\boldsymbol{mm})$$

1. Par les déplacements relatifs ou bien déplacements généralisés

$$\boldsymbol{F_s} = \boldsymbol{K\,U} = \boldsymbol{K\Phi\,Y} = \omega_i^2 \boldsymbol{M\Phi\,Y}$$

$$\{\boldsymbol{F_s}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} -2{,}97 \\ -5{,}20 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -329{,}45 \\ -858{,}55 \end{Bmatrix} (KN)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = -329{,}45 - 858{,}55 = -1188\;KN$$

Ou bien

$$\{F_s\} = \omega_1^2 M\{\phi_1\}y_1 + \omega_1^2 M\{\phi_2\}y_2$$

$$\{\boldsymbol{F_s}\} = 409{,}216 \begin{bmatrix} 340 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 380 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}596 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} (-5{,}15\;10^{-3}) + 2912{,}765 \begin{bmatrix} 340 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 380 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.533 \end{Bmatrix} (0{,}1\;10^{-3})\;(KN)$$

$$\{\boldsymbol{F_s}\} = \begin{Bmatrix} -427{,}056 \\ -800{,}835 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 99{,}034 \\ -58{,}995 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -328{,}022 \\ -859{,}83 \end{Bmatrix} (KN)$$

1er Mode   2ème Mode

Même résultats

Solution

iv) Amortissement différent de zéro?

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g}$$

U: déplacement relatif

Amorti ?

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g}$$

Avec $U = \Phi\,Y$ **alors** $\ddot{U} = \Phi\ddot{Y}$

$$\phi_n^T M \phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T C \phi_n \dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{n}} + \phi_n^T K \phi_n y_n = -\phi_n^T \boldsymbol{M}\ddot{U}_g$$

Ou bien

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n} \qquad \textbf{(7)}$$

Avec :

$$p(t) = -M\ddot{U}_g$$
$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

$$M_n = \phi_n^T M \phi_n$$
$$C_n = \phi_n^T C \phi_n$$
$$K_n = \phi_n^T K \phi_n$$
$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

$$\frac{C_n}{M_n} = 2\xi_n\omega_n \quad \textbf{et} \quad \frac{K_n}{M_n} = \omega_n^2$$

Les termes à droite de l’équation (7) sont tous proportionnels à l’accélération du support (Même fonction) alors que dans le cas général, p(t) peut changer d’un DDL à un autre.
Problème plus simple à résoudre

Solution

Pour notre cas :

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = \Gamma\,\ddot{u}_g \qquad \Gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji}^2}$$

Ou bien:

$$\mathrm{M_n}\ddot{y}_n + C_n\dot{y}_n + K_n y_n = -\phi_n^T \boldsymbol{M}\ddot{U}_g$$

Mode 1

$$M_1 = \{0{,}596 \quad 1{,}0\}\begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}596 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 500{,}8\ (t)$$

$$K_1 = \{0{,}596 \quad 1{,}0\}\begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}596 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 204\,924{,}56\ \ (KN/m)$$

$$P_1 = -\{0{,}596 \quad 1{,}0\}\begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} 0{,}25\ g \sin 30\ t = -145{,}66\ g \sin 30\ t = -1429 \sin 30\ t\ \ (KN)$$

Mode 2

$$M_2 = \{1{,}0 \quad -0{,}533\}\begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}533 \end{Bmatrix} = 447{,}95\ (t)$$

$$K_2 = \{1{,}0 \quad -0{,}533\}\begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}533 \end{Bmatrix} = 1304784{,}27(KN/m)$$

$$P_2 = -\{1{,}0 \quad -0{,}533\}\begin{bmatrix} \mathbf{340} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{380} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} 0{,}25\ g \sin 30\ t = -34{,}365\ g \sin 30\ t = -337{,}12 \sin 30\ t\ \ (KN)$$

$$\mathrm{M_1}\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 + K_1 y_1 = -1429\ sin\ 30\ t$$

$$\mathrm{M_2}\ddot{y}_2 + C_2\dot{y}_2 + K_2 y_2 = -337{,}12\ \ sin\ 30\ t$$

Solution

$$M_1\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 + K_1 y_1 = -1429\, sin\, 30\, t$$

$$M_2\ddot{y}_2 + C_2\dot{y}_2 + K_2 y_2 = -337{,}12\, sin\, 30\, t$$

Mouvement amorti soumis à une excitation harmonique (Chap 4)

$$\boldsymbol{y_{imax} = Y_{i\,stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r_i{}^2)^2 + (2\xi_i r_i)^2}} = Y_{i\,stat} D_i}$$

Mode 1 $r_1 = \frac{\Omega}{\omega_{10}} = \frac{30}{20{,}23} = \mathbf{1,483}$ $\quad \xi_1 = 0{,}05 \quad$ $D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - r_i{}^2)^2 + (2\xi_i r_i)^2}} = \mathbf{0,827}$

$$y_{1max} = 0,827 \frac{1429}{204\,924{,}56} \qquad y_{1max} = 5,76\ mm$$

Mode 2 $r_2 = \frac{\Omega}{\omega_{20}} = \frac{30}{53{,}97} = \mathbf{0,5559}$ $\quad \xi_2 = 0{,}05 \quad$ $D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - r_i{}^2)^2 + (2\xi_i r_i)^2}} = \mathbf{1,443}$

$$y_{2max} = 1,443 \frac{337{,}12}{1304784{,}27} \qquad y_{2max} = 0,37\ mm$$

Solution $y_{1max} = 5,76\ mm$ $y_{2max} = 0,37\ mm$ $\Phi = \begin{bmatrix} 0,596 & 1 \\ 1 & -0,533 \end{bmatrix}$

Les maximums se passent dans le même temps, d'où le résultat des déplacements maxima sera exacte

Cas 1 En considérant le 1er mode

$$\{U\} = [\Phi]\{Y\} \qquad \begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,596 \\ 1 \end{bmatrix} \{5,76\} = \begin{Bmatrix} \emptyset_{11} y_{1max} \\ \emptyset_{21} y_{1max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,433 \\ 5,76 \end{Bmatrix} (mm)$$

$$F_s = K\,U = K\Phi\,Y = \omega_i^2 M\Phi\,Y \qquad \{F_s\} = \begin{bmatrix} 785 & -385 \\ -385 & 385 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 3,433 \\ 5,76 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 477,305 \\ 895,895 \end{Bmatrix} (KN)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 477,305 + 895,895 = 1373,2\ KN$$

Cas 2 En considérant 02 modes

$$\{U\} = [\Phi]\{Y\} \qquad \begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,596 & 1 \\ 1 & -0,533 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5,76 \\ 0,37 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,803 \\ 5,563 \end{Bmatrix} (mm)$$

$$F_s = K\,U = K\Phi\,Y = \omega_i^2 M\Phi\,Y \qquad \{F_s\} = \begin{bmatrix} 785 & -385 \\ -385 & 385 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 3,803 \\ 5,563 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 843,6 \\ 677,6 \end{Bmatrix} (KN)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 843,6 + 677,6 = 1521,2 KN$$

Solution $y_{1max} = 5,76\ mm$ $y_{2max} = 0,37\ mm$ $\Phi = \begin{bmatrix} 0,596 & 1 \\ 1 & -0,533 \end{bmatrix}$

AVS et SRSS ?

Cas 1 En considérant le 1er mode

Méthode AVS : $u_{imax} = |\emptyset_{i1} y_{1max}| + |\emptyset_{i2} y_{2max}| + \ldots + |\emptyset_{ii} y_{imax}| + \ldots + |\emptyset_{in} y_{nmax}|$

$$\begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,596 \\ 1 \end{bmatrix} \{5,76\} = \begin{Bmatrix} |\emptyset_{11} y_{1max}| \\ |\emptyset_{21} y_{1max}| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,433 \\ 5,76 \end{Bmatrix} (mm)$$

Méthode SRSS: $u_{imax} = \sqrt{(\emptyset_{i1} y_{1max})^2 + (\emptyset_{i2} y_{2max})^2 + \cdots + (\emptyset_{ii} y_{imax})^2 + \cdots + (\emptyset_{in} y_{nmax})^2}$

$$\begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,596 \\ 1 \end{bmatrix} \{5,76\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(\emptyset_{11} y_{1max})^2} \\ \sqrt{(\emptyset_{21} y_{1max})^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,433 \\ 5,76 \end{Bmatrix} (mm)$$

$$F_s = K\ U = K\Phi\ Y = \omega_i^2 M\Phi\ Y$$

$$\{F_s\} = \begin{bmatrix} 785 & -385 \\ -385 & 385 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 3,433 \\ 5,76 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 477,305 \\ 895,895 \end{Bmatrix} (KN)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 477,305 + 895,895 = 1373,2KN$$

Solution

$$y_{1max} = 5,76\ mm \qquad y_{2max} = 0,37\ mm \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 0,596 & 1 \\ 1 & -0,533 \end{bmatrix}$$

Cas 2 En considérant les 02 modes

Méthode AVS : $u_{imax} = |\emptyset_{i1} y_{1max}| + |\emptyset_{i2} y_{2max}| + \ldots + |\emptyset_{ii} y_{imax}| + \ldots + |\emptyset_{in} y_{nmax}|$

$$\begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |\emptyset_{11} y_{1max}| + |\emptyset_{12} y_{2max}| \\ |\emptyset_{21} y_{1max}| + |\emptyset_{22} y_{2max}| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,596\ 5,76 + 1\ 0,37 \\ 1\ \ 5,76 + 0,533\ 0,37 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{3,803} \\ \mathbf{5,957} \end{Bmatrix} (\boldsymbol{mm})$$

$$\boldsymbol{F_s = K\,U = K\Phi\,Y = \omega_i^2 M\Phi\,Y} \qquad \{\boldsymbol{F_s}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 3,803 \\ 5,957 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 691,91 \\ 829,29 \end{Bmatrix} (KN)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 691,91 + 829,29 = 1521,2\ KN$$

Méthode SRSS: $u_{imax} = \sqrt{(\emptyset_{i1} y_{1max})^2 + (\emptyset_{i2} y_{2max})^2 + \cdots + (\emptyset_{ii} y_{imax})^2 + \cdots + (\emptyset_{in} y_{nmax})^2}$

$$\begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(\emptyset_{11} y_{1max})^2 + (\emptyset_{12} y_{2max})^2} \\ \sqrt{(\emptyset_{21} y_{1max})^2 + (\emptyset_{22} y_{2max})^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(0,596\ 5,76)^2 + (1\ (0,37))^2} \\ \sqrt{(1\ 5,76)^2 + (0,37\ (-0,533))^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{3,453} \\ \mathbf{5,763} \end{Bmatrix} (\boldsymbol{mm})$$

$$\boldsymbol{F_s = K\,U = K\Phi\,Y = \omega_i^2 M\Phi\,Y} \qquad \{\boldsymbol{F_s}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{785} & \mathbf{-385} \\ \mathbf{-385} & \mathbf{385} \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 3,453 \\ 5,763 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 491,85 \\ 889,35 \end{Bmatrix} (KN)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 491,85 + 889,35 = 1381,2\ KN$$

Solution

En conclusion ?

		U_1	U_2	F_{e1max}	F_{e2max}	V_b
Exact	Mode 1	3,433	5,76	477,305	895,895	**1373,2**
	02 modes	3,803	5,563	843,6	677,6	1521,2
AVS	Mode 1	3,433	5,76	477,305	895,895	**1373,2**
	02 modes	3,803	5,957	691,91	829,29	1521,2
SRSS	Mode 1	3,433	5,76	477,305	895,895	**1373,2**
	02 modes	3,453	5,763	491,85	889,35	1381,2

Entre AVS et SRSS ?

Cas 1 : 1er mode — **AVS et SRSS même résultats que l'exact**

Cas 2 : 02 modes — **AVS Surestime (u$_2$ de 6,61%)**

SRSS sous-estime u1 (6,8%) et surestime u2 (3,47%)

Entre 01 mode et 02 modes ?

Exact — **Avec 02 modes : u_1 augmente de 9,73% et u_2 diminue de 3,42 %**

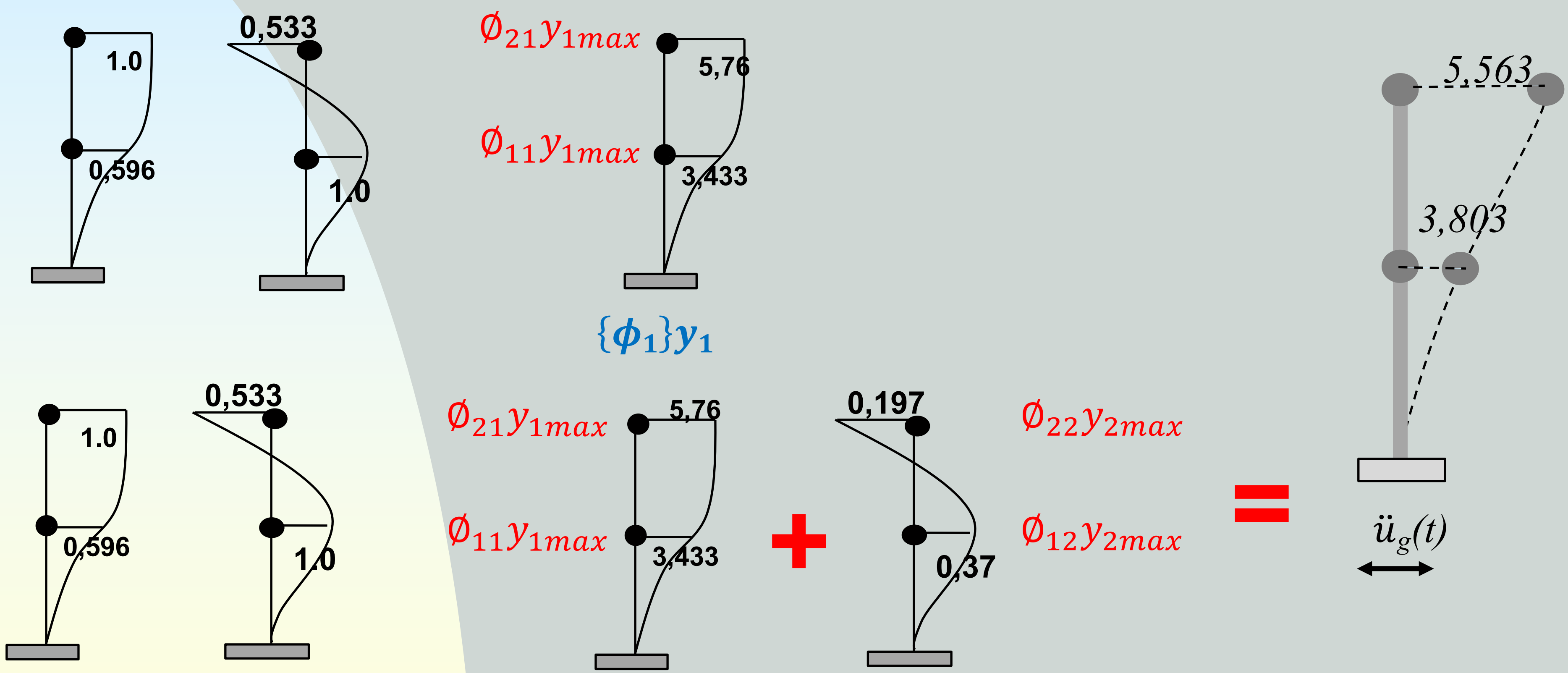
AVS — **Avec 02 modes : u_1 augmente de 9,73% et u_2 de 3,48 %**

SRSS — **Avec 02 modes : u_1 augmente de 2,0% et u_2 de 0,052 %**

Solution $y_{1max} = 5,76\ mm$ $y_{2max} = 0,37\ mm$ $\Phi = \begin{bmatrix} 0,596 & 1 \\ 1 & -0,533 \end{bmatrix}$

Effet du nombre de modes utilisés

Considérons la solution exacte



$\{\phi_1\}$ $\{\phi_2\}$ $\{\phi_1\}y_1$ + $\{\phi_2\}y_2$ = $\{U\} = [\Phi]\{Y\}$

Merci. Fin de l'Application 12