Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 2

Vibrations libres non amorties

Calcul de la réponse

Exemple 2 **Lundi 01.01.2024**

Introduction

Le but de cette application est de calculer la réponse d’un système libre non amorti à un seul degré de liberté.

Calcul des caractéristiques propres

Calcul de la réponse dynamique due à un mouvement initial.

Exemple

On considère le portique montré ci-dessous. En supposant :

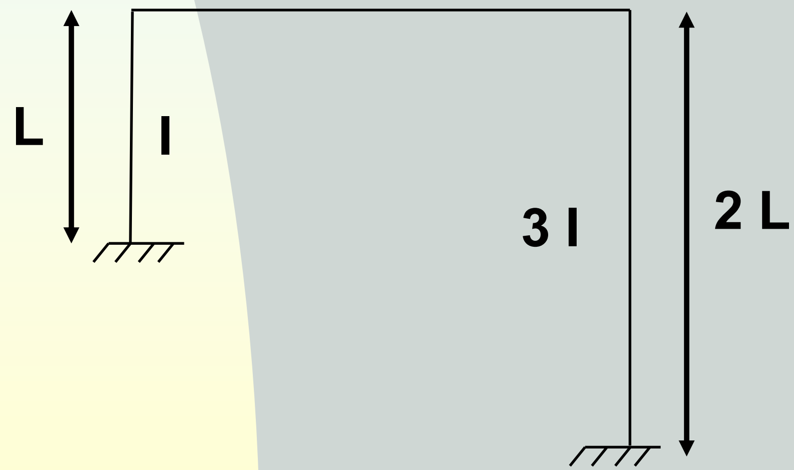
Que la poutre est infiniment rigide par rapport aux montants

Qu'il n'y a pas d'amortissement

Déterminer

1) La fréquence et période propres du système
2) Le déplacement au temps « t » si la poutre subit un déplacement horizontale de «δ » mm puis relâché soudainement au temps t=1s.

On donne E (N/mm^2) module d'élasticité.



Solution

Calcul des caractéristiques propres

Rappel On aura: $\ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$

On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ **Ou** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rd/s)

Appelée pulsation propre du système.

On peut avoir alors:

La fréquence propre du système: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (cycles/s), Hertz

La période propre du système:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ (s)

$\boldsymbol{k}$????

Solution

Souvent pour calculer « k », on passe par « f » ?

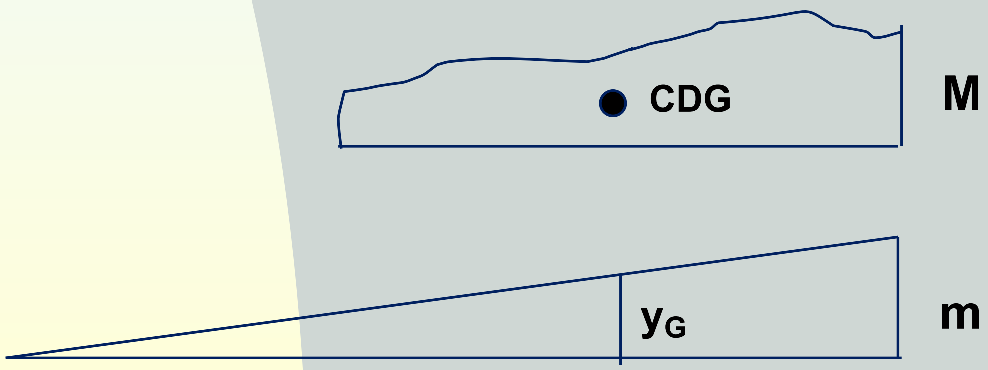
On calcule un déplacement

Exemple : Méthode de multiplication des diagrammes

Rappel

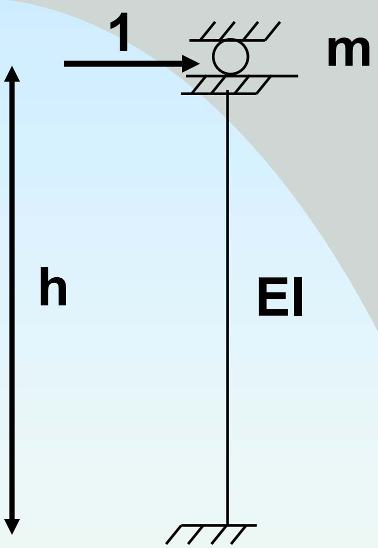
$$x_{st} = \frac{1}{EI}\int M\,m\,dx$$

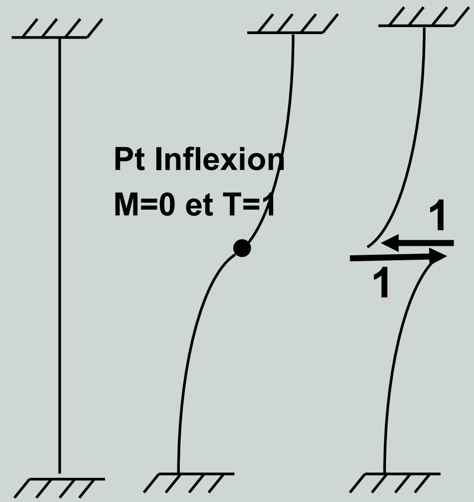
$$x_{st} = \frac{1}{EI} A\,y_G$$

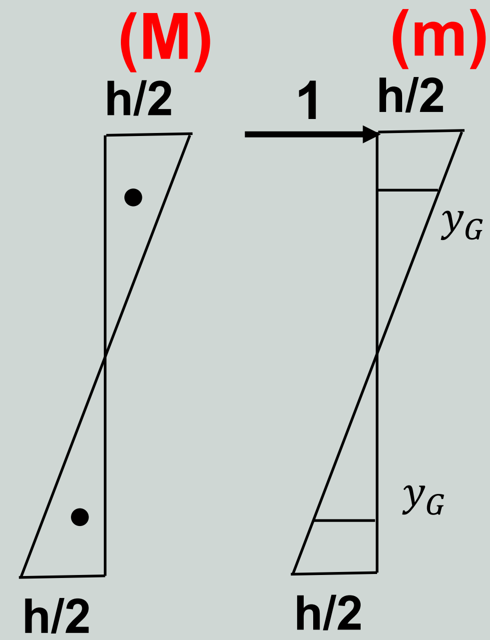


Solution

Rappel : Poutre encastrée aux poteaux







$$\frac{y_G}{h/2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{h}{2}}{h/2} = 2/3$$

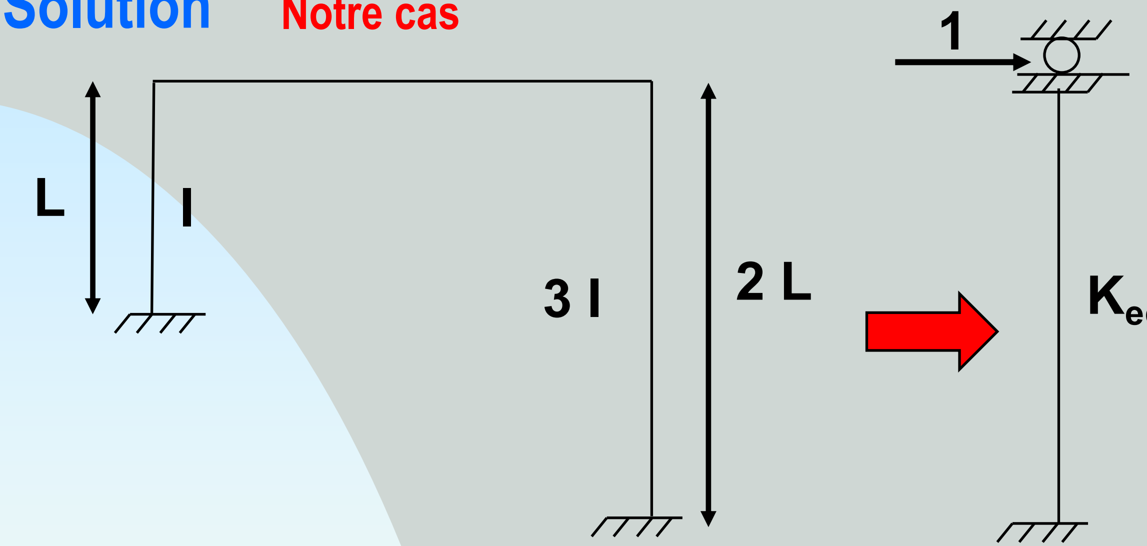
Ainsi

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{EI}\, A\, y_G$$

$$\boldsymbol{f} = 2.\frac{1}{EI}\,½\,\frac{h}{2}\frac{h}{2}.\frac{2}{3}\frac{h}{2} = \frac{h^3}{12(EI)}$$

Solution **Notre cas**

$$f = 2.\frac{1}{EI}\,½\,\frac{h}{2}\frac{h}{2}.\frac{2}{3}\frac{h}{2} = \frac{h^3}{12(EI)}$$



$K_{eq}=K_1+K_2$

Avec: $K_1 = 1/f_1$ **et** $K_2 = 1/f_2$ $\quad f_1 = \frac{L^3}{12(EI)}$ **et** $f_2 = \frac{(2L)^3}{12(3.EI)}$

D'où :

$$K_{eq} = \frac{12(EI)}{L^3} + \frac{12(3EI)}{(2L)^3} = \frac{132(EI)}{8L^3} = 16,5\frac{(EI)}{L^3} \quad \textbf{(N/mm)}$$

$$K_{eq} = 16500\frac{(EI)}{L^3} \quad \textbf{(N/m)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16500\,EI}{mL^3}} = 128\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{128}\sqrt{\frac{mL^3}{EI}}$$

Solution

Rappel (Voir chapitre 3)

Equation du mouvement générale du SSDDL

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

En supposant, un mouvement libre non amorti (mouvement naturel),
On pose c=0 et p(t) = 0.

On aura $\boxed{m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0}$

Solution, Soit $u(t) = \rho\, cos(\omega_0 t\ -\ \theta)$

Ou bien $u(t) = A\, cos(\omega_0 t) + B\, sin(\omega_0 t)$

ρ, θ ou A, B : constantes à déterminer par les conditions initiales.

θ : Angle de déphasage entre la réponse et l'excitation

Solution

Conditions initiales ?

Origine translaté à t=1s. Dans ce cas, on aura:

$$u(t) = \rho\, cos(\omega_0(t-1) - \theta)$$

Ou bien $$u(t) = A\, cos(\omega_0(t-1)) + B\, sin(\omega_0(t-1)$$

Conditions initiales pour notre cas :

$u(1) = \delta$ **et** $\dot{u}(1) = 0$

D'où $$\dot{u}(t) = -A\,\omega_0\, sin(\omega_0(t-1) + \mathrm{B}\,\omega_0\, cos(\omega_0(t-1))$$

Ainsi, à résoudre:

$$u(1) = A\, cos(\omega_0(1-1)) + B\, sin(\omega_0(1-1) = A = \delta$$

$$\dot{u}(1) = -A\,\omega_0\, sin(\omega_0(1-1) + \mathrm{B}\,\omega_0\, cos(\omega_0(1-1)) = B = 0$$

Solution

Ainsi $$u(t) = A\,cos(\omega_0(t-1)) + B\,sin(\omega_0(t-1))$$

$$\boxed{u(t) = \delta\,cos(\omega_0(t-1))}$$ **(mm)**

$$\boxed{u(t) = \delta.10^{-3}\,cos\left(128\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}(t-1)\right)}$$ **(m)**

Solution

On pouvait utiliser la 2ème forme

$$u(t) = \rho\, cos(\omega_0(t-1)\ -\ \theta)$$

D'où $\dot{u}(t) = -\rho\, \omega_0\, sin(\omega_0(t-1) - \theta)$

Ainsi, à résoudre:

$$u(1) = \rho\, cos(\omega_0(1-1) -\ \theta)\ = \rho\, cos(-\ \theta) = \rho\, cos(\theta) = \delta$$

$$\dot{u}(1) = -\rho\, \omega_0\, sin(\omega_0(1-1) - \theta) = -\rho\, \omega_0\, sin(-\theta) = \rho\, \omega_0\, sin(\theta) = 0$$

Par résolution:

$\theta = 0$ et $\rho\ = \delta$

$\boxed{u(t) = \delta\, cos(\omega_0(t-1)}$ (mm)

$$\boxed{u(t) = \delta.10^{-3}\, cos\left(128\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}(t-1)\right)}\ \text{(m)}$$

Avec $\delta[mm]$ $m[kg]$

$E[N/mm^2]$ $L[mm]$

$I[mm^4]$ $t[s]$

Merci. **Fin de l'Application 2**