Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 3

Vibrations forcées non amorties

Excitation harmonique

Exemple 3 **Lundi 01.01.2024**

Introduction

Le but de ces applications est de calculer la réponse d'un système forcé non amorti à un seul degré de liberté avec une excitation de type harmonique.

Calcul des réponses dynamiques dues à une excitation harmonique

Notion de réponse statique équivalente et du coefficient d'amplification dynamique.

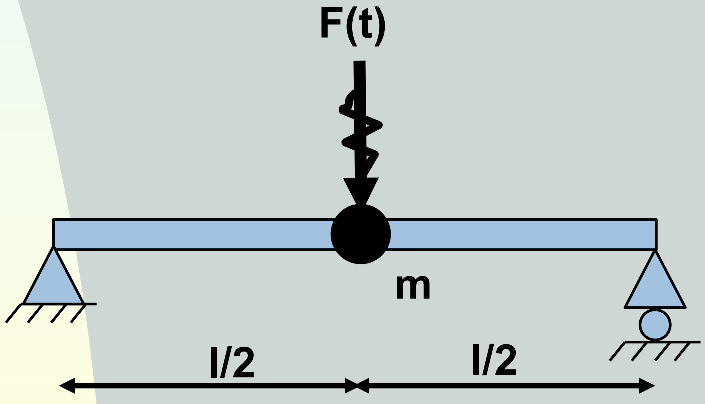
Superposition des effets statique et dynamique pour un système à 1SDDL.

Exemple 1

On considère la poutre ci-dessous soumise à l'action simultanée de la charge statique Q=mg et la force perturbatrice de type harmonique $\mathrm{F(t)} = F_0 \, sin \, \Omega t$.

On demande de tracer les diagrammes des moments fléchissants M^{+}_{max} et M^{-}_{max} de cette poutre

AN. Q=4 tf, F_0=3 tf, Ω=30 rd/s, EI= 3000 tf.m^2. et l=6.0 m

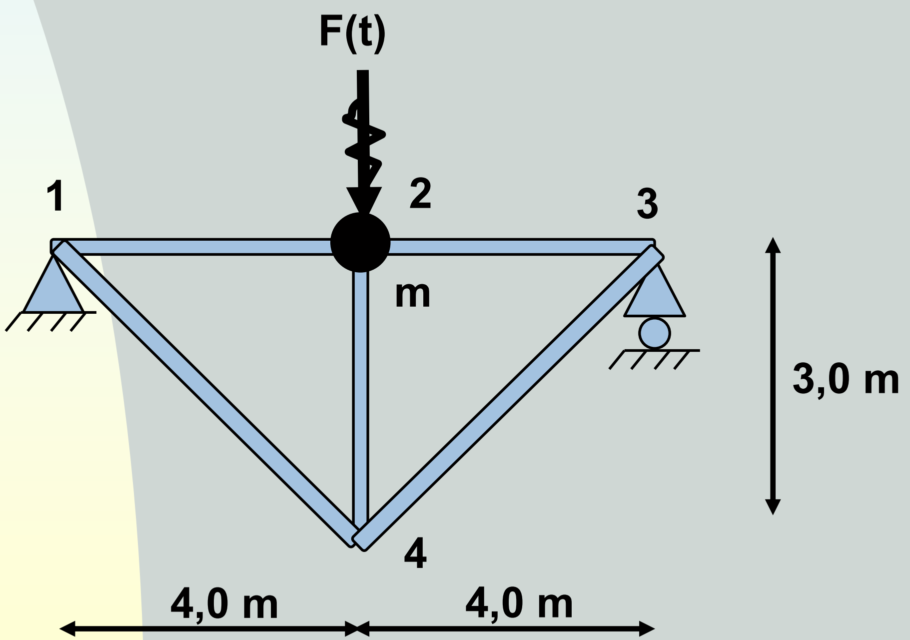


Exemple 2

On considère la poutre en treillis ci-dessous soumise à l'action simultanée de la charge statique gravitationnelle Q=mg et la force perturbatrice de type harmonique $\mathrm{F(t)} = F_0 \, sin \, \Omega t$.

On demande de déterminer les efforts axiaux N^{+}_{max} et N^{-}_{max} de cette poutre

AN. Q=3 tf, F_0=3 tf, Ω=30 rd/s et EA=Cte= 25000 tf.



Solution

Rappel (Voir chapitre 4)

Equation du mouvement générale du SSDDL

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t)$$

En supposant, un mouvement forcé (harmonique) non amorti,
On pose c=0 et F(t) ≠ 0.

On aura $$\boxed{m\,\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0\, sin(\Omega t)}$$ **(Ou bien Cos)**

<u>Solution :</u>

Somme d'une solution homogène «u_c » et une solution particulière «u_p ».

Avec:

$$m\,\ddot{u}_c(t) + k\,u_c(t) = 0$$

$$m\,\ddot{u}_p(t) + k\,u_p(t) = P_0\,\sin(\Omega t)$$

(Chap (3)) :

$$u_c(t) = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$$

Et :

$$u_p(t) = U\,sin(\Omega t)$$

Solution

$$m\,\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0\, sins(\Omega t) \qquad (1)$$

$$u_c(t) = A\, cos(\omega_0 t) + B\, sin(\omega_0 t) \qquad (2)$$

$$u_p(t) = U\, sin\,(\Omega t) \qquad (3)$$

« A » et « B » déterminés par les CI
« U » déterminé en remplaçant (3) dans (1)

« U » ???

(Ou bien Cos)

(3) dans (1)

$$-m\,U\,\Omega^2\, sin(\Omega t) + k\,U\, sin(\Omega t) = F_0\, sin(\Omega t)$$

Soit

$$-mU\Omega^2 + kU = F_0$$

D'où

$$U = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \quad \text{où} \quad k\ - m\Omega^2 \neq 0$$

Solution

$$U = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \quad \text{où} \quad k - m\Omega^2 \neq 0 \qquad (4)$$

Posons $U_{stat} = \frac{F_0}{k}$ (5) **Déplacement statique du à F_0** $(F_0 \sin(\Omega t))$

$$U = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\Omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0{}^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} \qquad (6)$$

Où : $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$ **rapport des pulsations**

Remplaçant (5) et (6) dans (3) on aura: $u_p(t) = U \sin(\Omega t)$

$$u_p(t) = U_{stat} \frac{1}{1 - r^2} \sin(\Omega t)$$

Posons : $D = \frac{1}{1 - r^2}$

$$u_p(t) = D\, U_{stat} \sin(\Omega t)$$

D: Coefficient d'amplification dynamique

r<1 : la réponse est en phase avec l'excitation
r>1 la réponse est en opposition de phase avec l'excitation
r=1 : phénomène de résonance

Solution

Ainsi la réponse totale est la somme de la réponse transitoire et la réponse permanente.

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + D\,U_{stat}\sin(\Omega t)$$

Supposons les CI : À t=0, $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + D\,U_{stat}\sin(\Omega t)$$

Et $$\dot{u}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) + DU_{stat}\Omega\cos(\Omega t)$$

La résolution de ces 02 équations nous donne:

$$A = u_0 \text{ et } B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} - r\,D\,U_{stat}$$

La solution:

$$u(t) = (u_0)\cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0} - rD\mathrm{u}_{stat}\right)\sin(\omega_0 t) + DU_{stat}\sin(\Omega t) \qquad (7)$$

Solution

$$u(t) = (u_0)\cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0} - rDu_{stat}\right)\sin(\omega_0 t) + DU_{stat}\sin(\Omega t)$$

Cas particulier : CI nulles ($u(0) = u_0 = 0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = 0$

Solution totale sera:

$$u(t) = \underbrace{D}_{\text{Coefficient d'amplification dynamique}}\ \underbrace{U_{stat}}_{\text{Déplacement statique}}\ (\underbrace{\sin(\Omega t)}_{\text{Réponse permanente (liée à l'excitation)}} - \underbrace{r\sin(\omega_0 t)}_{\text{Réponse transitoire (effet de vibration libre)}}) \qquad (8)$$

Solution

$$u(t) = (u_0)\cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0} - rD\mathrm{u}_{stat}\right)\sin(\omega_0 t) + DU_{stat}\sin(\Omega t)$$

Le système vibre à 2 fréquences: sa fréquence naturelle et la fréquence imposée par l'excitation.

En général, la réponse due aux conditions initiales (réponse transitoire) disparait rapidement et reste uniquement la réponse permanente.

Pour cela, en général en DDS, on ne s'intéresse qu'à la réponse permanente. Et souvent, on a

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \approx u_p(t) \qquad (9)$$

Ainsi, la solution

$$u(t) = U_{stat}\frac{1}{1 - r^2}\sin(\Omega t)$$

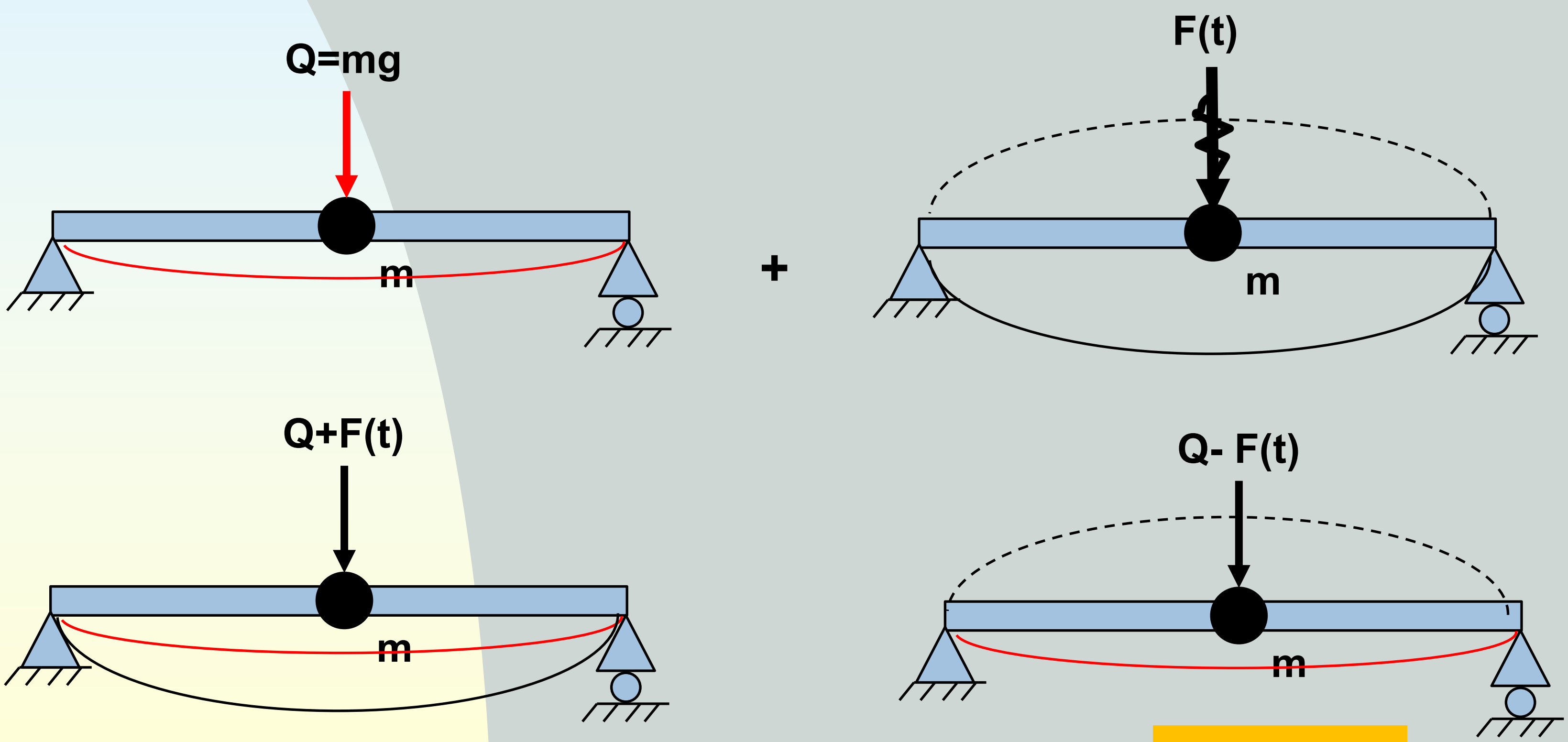
Et le max

$$u_{max} = U_{stat}\frac{1}{1 - r^2} = D.U_{stat} \qquad (10)$$

Solution **Notre cas** **Exemple 1**

Combinaison **G** et **E**

On ne s'intéresse uniquement aux maximums



M^{+}_{max} M^{-}_{max}

Solution Notre cas

Max G Déplacement maximal du à l'effet de « Q=mg »

Max E

Puisque : $$u_{max} = U_{stat}\frac{1}{1 - r^2} = \pm D.U_{stat} = \pm D.\frac{F_0}{k}$$

En multipliant par « k », on aura :

$$k.u_{max} = \pm k.D.\frac{F_0}{k} = \pm D.F_0$$

$(F(t) = F_0 \sin(\Omega t))$

$$\boxed{F_d = \pm D.F_0}$$

Solution

$$F_d = \pm D.F_0$$

Avec : $D = \dfrac{1}{1-r^2}$ et $r = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$

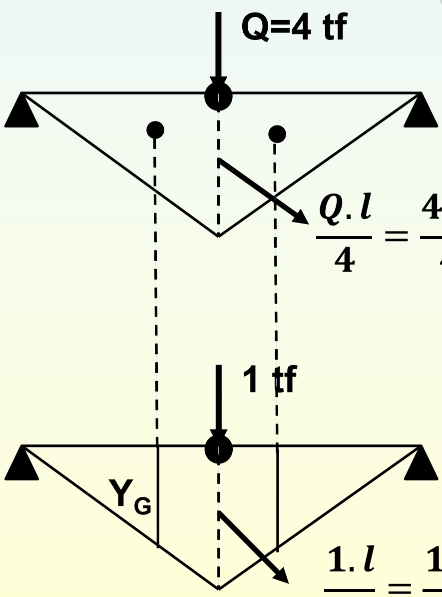
Calcul de ω_0 ? ? ?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m.f}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{Q}{g}.f}} = \sqrt{\frac{g}{Q.f}} = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \qquad \text{(rd/s)}$$

x_{st} ? ? ?

Par multiplication des diagrammes

$$x_{st} = \frac{1}{EI} A\, y_G$$



(M)

$$\frac{Q.l}{4} = \frac{4.6}{4} = 6\ tf.m$$

(m)

$$\frac{1.l}{4} = \frac{1.6}{4} = 1,5\ tf.m$$

$$x_{st} = 2.\frac{1}{EI}\left(½\,\frac{Q.l}{4}\,\frac{l}{2}.\frac{2}{3}\frac{l}{4}\right) = \frac{Q.h^3}{48(EI)}$$

Q=4 tf
l = 6,0 m

$$x_{st} = \frac{18}{(EI)} = 0,006\ m$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,006}} = 40,44\ rd/s$$

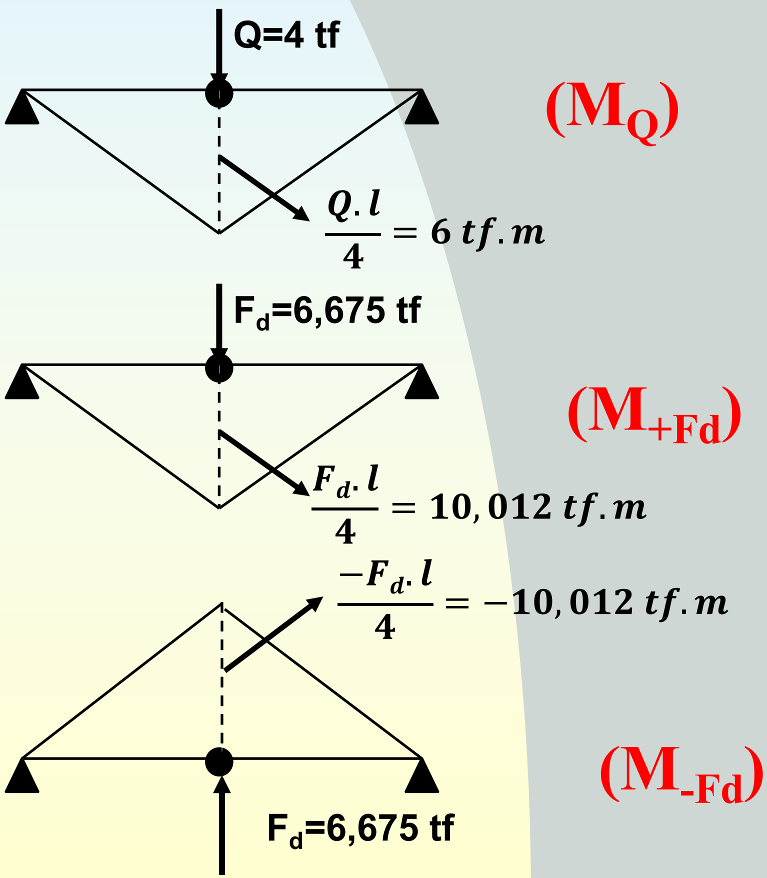
Solution

Avec : $\omega_0 = 40,44\ rd/s$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{30}{40,44} = 0,742 \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{1-r^2} = 2,225$$

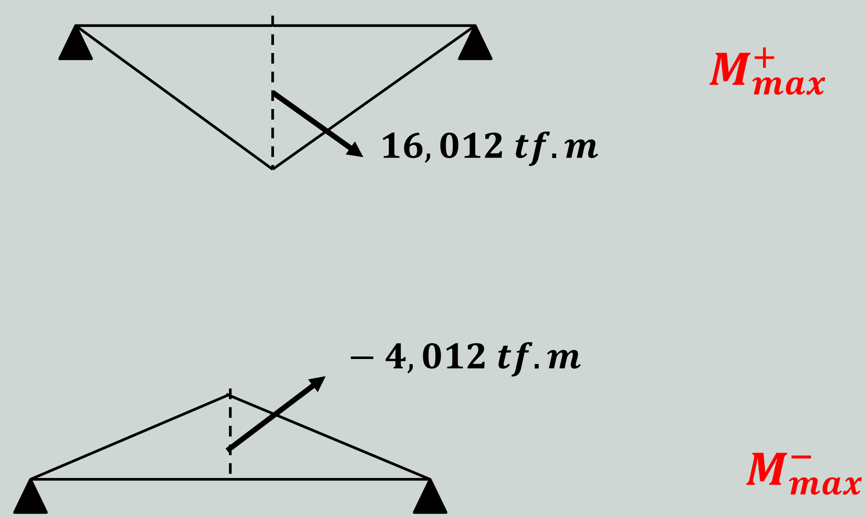
d'où $\quad F_d = \pm D.F_0 \qquad F_d = \pm 2,225\,.3 \qquad \boxed{F_d = \pm 6,675\ tf}$

Diagramme des moments



$$M^{+}_{max} = M_Q + M_{+F_d}$$

$$M^{-}_{max} = M_Q + M_{-F_d}$$

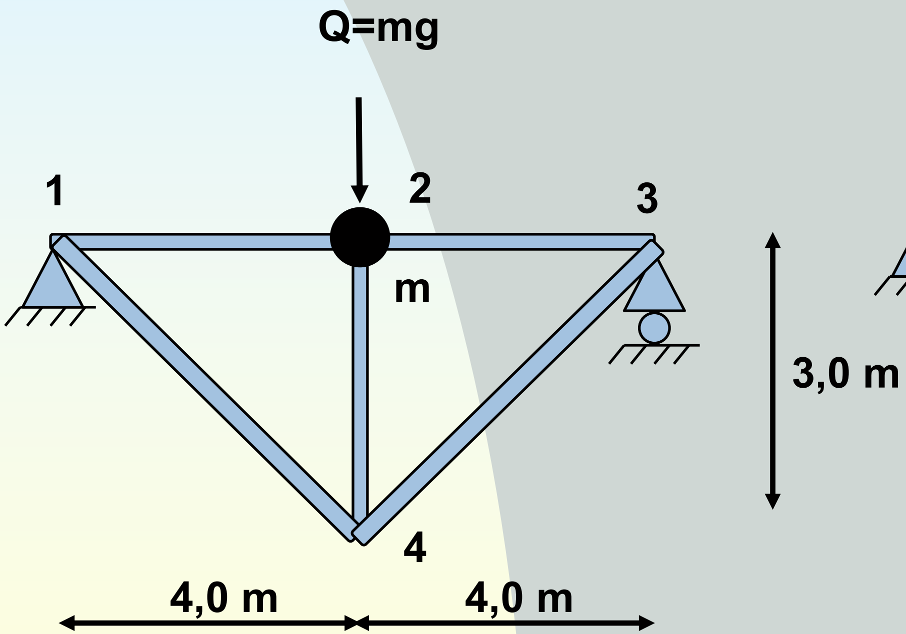


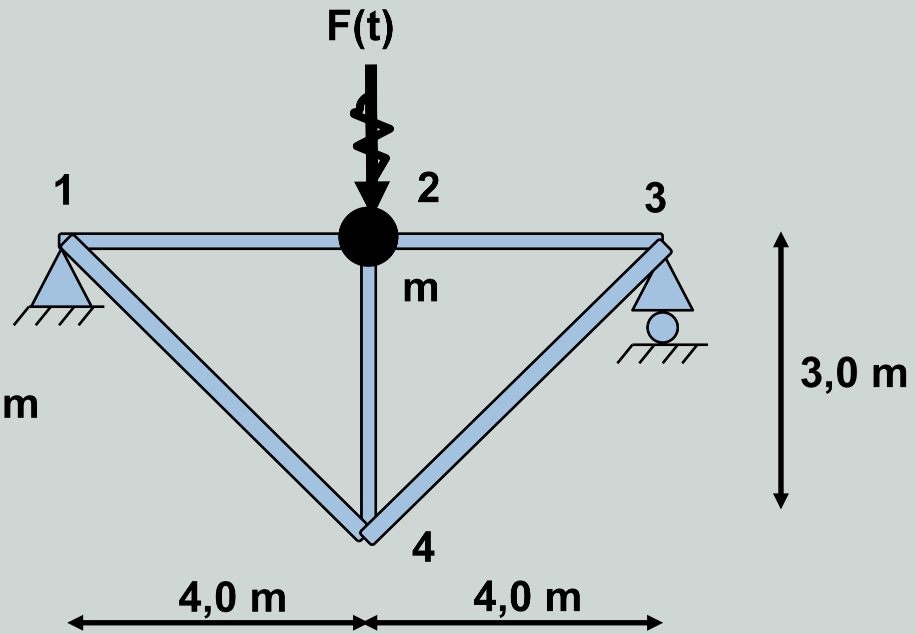
Solution Notre cas Exemple 2

Même principe

Combinaison G et E

On ne s'intéresse uniquement aux maximums





$\cancel{M^{+}_{max}}$ N^{+}_{max} $\cancel{M^{-}_{max}}$ N^{-}_{max}

Solution

$$\boxed{F_d = \pm D.F_0}$$

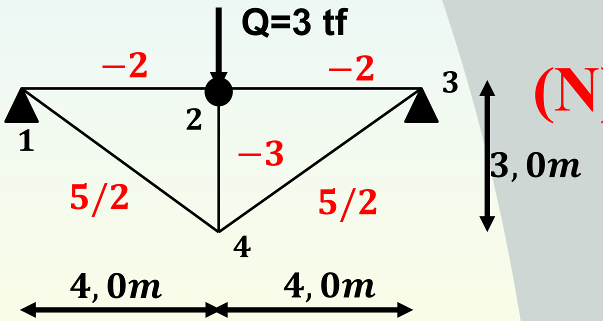
Avec : $D = \dfrac{1}{1 - r^2}$ **et** $r = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$

Calcul de ω_0 ? ? ?

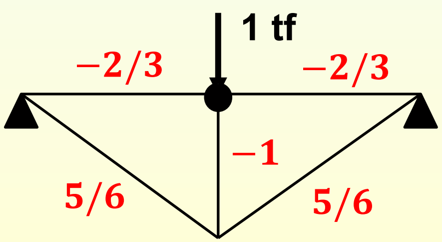
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m.f}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{Q}{g}.f}} = \sqrt{\frac{g}{Q.f}} = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \qquad \text{(rd/s)}$$

x_{st} ? ? ?

Même méthode



(N)



(n)

$$x_{st} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i\, n_i}{E\,A}\, l_i$$

$$x_{st} = \frac{1}{(EA)} \sum_{i=1}^{n} N\, n\, l$$

$$x_{st} = \frac{1}{(25000)} (40,5)$$

$$x_{st} = 0,0016\ m$$

Barre	$N_{Qi}=N_i$	n_i	l_i	N.n.l
1-2	-2	-2/3	4	16/3
1-4	5/2	5/6	5	125/12
2-4	-3	-1	3	9
3-4	5/2	5/6	5	125/12
2-3	-2	-2/3	4	16/3
				40,5

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,0016}} = 78,30\ rd/s$$

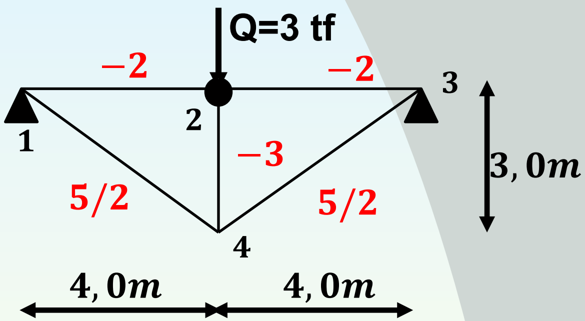
Solution

Avec : $\omega_0 = 78,30\ rd/s$

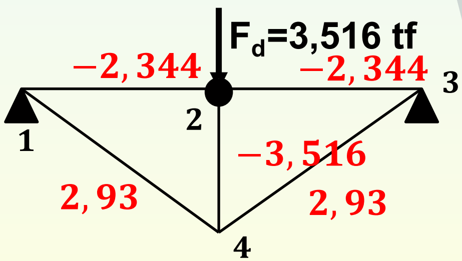
$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{30}{78,30} = 0,383 \qquad \text{et} \qquad D = \frac{1}{1-r^2} = 1,172$$

d'où $\quad F_d = \pm D.F_0 \qquad F_d = \pm 1,172\,.3 \qquad F_d = \pm 3,516\ tf$

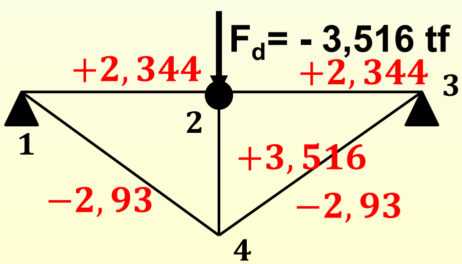
Efforts normaux ?



(N_Q)



(N_{+Fd})



(N_{-Fd})

$$N^+_{max} = N_Q + N_{+F_d} \qquad N^+_{max}$$

$$N^-_{max} = N_Q + N_{-F_d} \qquad N^-_{max}$$

Barre	N_Q	N_{+Fd}	N_{-Fd}	N^+_{max}	N^-_{max}
1-2	-2	-2,344	2,344	**-4,344**	**0,344**
1-4	5/2	2,93	-2,93	**5,43**	**-0,43**
2-4	-3	-3,516	3,516	**-6,516**	**0,516**
3-4	5/2	2,93	-2,93	**5,43**	**-0,43**
2-3	-2	-2,344	2,344	**-4,344**	**0,344**

Merci. Fin de l'Application 3