Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 4

Vibrations forcées amorties

Excitation harmonique

Exemple 4 **Jeudi 04.01.2024**

Objectif

Le but de ces applications est de calculer la réponse d'un système forcé amorti à un seul degré de liberté avec une excitation de type harmonique.

Calcul des réponses dynamiques dues à une excitation harmonique

Notion de réponse statique équivalente et du coefficient d'amplification dynamique dans le cas de l'harmonique amorti.

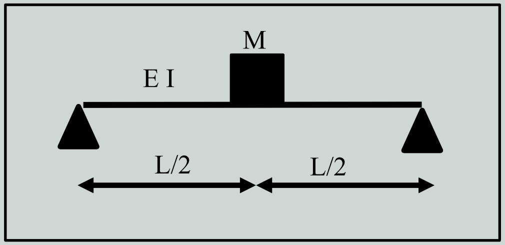
Superposition des effets statique et dynamique pour un système à 1SDDL, en tenant compte de l'amortissement.

Est-ce qu'il est intéressant de réduire la masse ou bien la rigidité pour réduire la période propre ?

Exemple 1

Considérons la poutre de la figure ci-dessous sur laquelle on pose une masse M au milieu. On suppose que la masse de la poutre est négligée et que le seul degré de liberté de cette poutre est le déplacement vertical du centre de gravité de la masse M.

Avec les données suivantes : $L=5.0$ m ; $EI=4000$ tf.m^2 ; $M=5000$ kg et $\xi=20\%$ On vous demande :



i. Calculer la rigidité K par la méthode de multiplication des diagrammes. En déduire la pulsation propre « ω_0 ».

ii. La structure est ensuite soumise à une force harmonique $P(t) = P_0 \cos \Omega t$ appliquée au centre de la poutre.

- **Calculer le déplacement dynamique maximal en régime permanent.**
- **Tracer les diagrammes des efforts internes (M_f et T) maxima$^+$ et maxima$^-$ en régime permanent. (du à l'effet statique et dynamique)**

On donne P_0=40KN et Ω=30 rd/s

Exemple 1

iii. **En gardant la raideur « EI » constante (masse change), et en diminuant la période propre par « 2 », est ce que le déplacement maximal en régime permanent diminue ou augmente ? Justifier.**

iv. **Si maintenant on garde la masse constante (et EI change) et on diminue la période propre par « 2 », est ce que le déplacement maximal en régime permanent diminue ou augmente ? Justifier**

Que peut-on conclure des questions iii) et iv) ?

Solution

Rappel (Voir chapitre 4)

Equation du mouvement générale du SSDDL

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t)$$

En supposant, un mouvement forcé (harmonique) amorti,
On pose c ≠ 0 et P(t) ≠ 0.

On aura $$\boxed{m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0\,cos(\Omega t)}$$ **(Ou bien Sin)**

(1)

<u>Solution :</u>

Somme d'une solution homogène «u_c » et une solution particulière «u_p ».

Avec:

$$m\,\ddot{u}_c(t) + c\dot{u}_c(t) + ku_c(t) = 0$$

$$m\,\ddot{u}_p(t) + c\dot{u}_p(t) + ku_p(t) = P_0\cos(\Omega t)$$

(Chap (3)) : $$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[(A\,cos\omega_a t + B\,sin\omega_a t)\right] \quad \textbf{(2)}$$

Et : $$u_p(t) = U\,cos(\Omega t - \alpha) \quad \textbf{(3)}$$

« U » ???

Exemple 1

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \cos(\Omega t)$$

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t)]$$

$$u_p(t) = U\cos(\Omega t - \alpha)$$

déterminons « U » ?

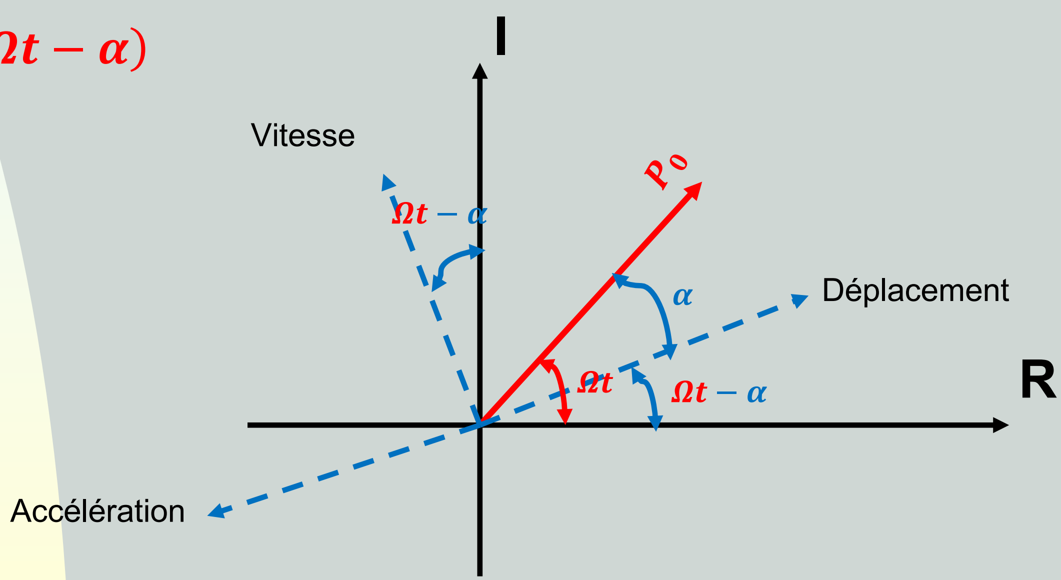
Ex: par représentation vectorielle

$$u_p(t) = U\cos(\Omega t - \alpha)$$

$$\dot{u}_p(t) = -U\Omega \sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -U\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha)$$

(4)



Exemple 1

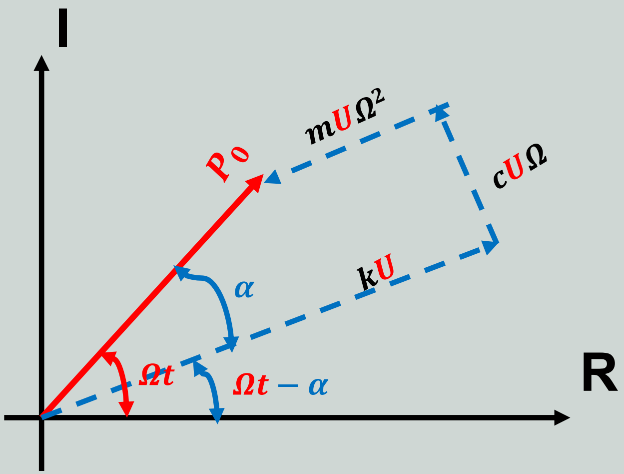
En substituant

$u_p(t) = U\cos(\Omega t - \alpha)$ $\quad \dot{u}_p(t) = -U\Omega \sin(\Omega t - \alpha)$ $\quad \ddot{u}_p(t) = -U\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha)$

dans $$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \cos(\Omega t)$$

On aura
$$-mU\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) - cU\Omega \sin(\Omega t - \alpha) + kU\cos(\Omega t - \alpha) = P_0 \cos(\Omega t)$$

En polygone de vecteurs, on peut tirer:



$$P_0^2 = (kU - mU\Omega^2)^2 + (cU\Omega)^2$$

$$tg\alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \qquad (5)$$

On peut tirer:

$$U = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \qquad (6)$$

Exemple 1

En faisant des transformations,

$$U = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\Omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\Omega}{k}\right)^2}}$$

Sachant que: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ **et** $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$

On aura $$U = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \qquad (7)$$

Posons: $U_{stat} = \frac{P_0}{k}$ **et** $$\boxed{D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}} \qquad (8)$$

$$\boxed{U = U_{stat}\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = U_{stat}\, D} \qquad (9)$$

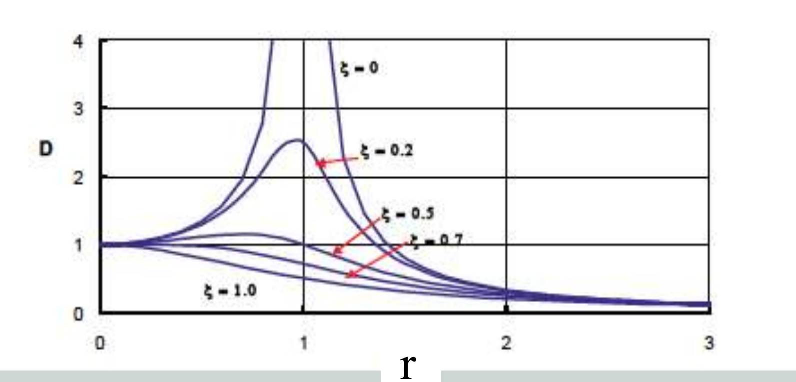
U_{stat}: Déplacement statique du à P_0

D(r, ξ): Coefficient d’amplitude dynamique pour un 1SDDL amorti soumis à une excitation harmonique

Exemple 1

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

- Pour $r = \Omega/\omega_0$ tend vers « 0 », le coefficient « D » approche « 1 ». D'où, si la fréquence de l'excitation ($f_e = \Omega/2\pi$) est petite devant la fréquence propre du système ($f = \omega_0/2\pi$), la charge est considérée comme statique.
- Pour $\Omega >> \omega_0$ l'amplitude de la réponse tend vers 0 (r grand)
- i.e l'excitation change de sens (signe) tellement rapidement que le système n'a pas le temps de répondre aussi rapidement à cause de son inertie « m ».
- Pour $C/C_{cr} < 0.5$, D est maximum quand le rapport « r » est juste inférieur à « 1 ».
- pour $\Omega \approx \omega_0$ phénomène de résonance est atteint pour (ξ=0, système non amorti)

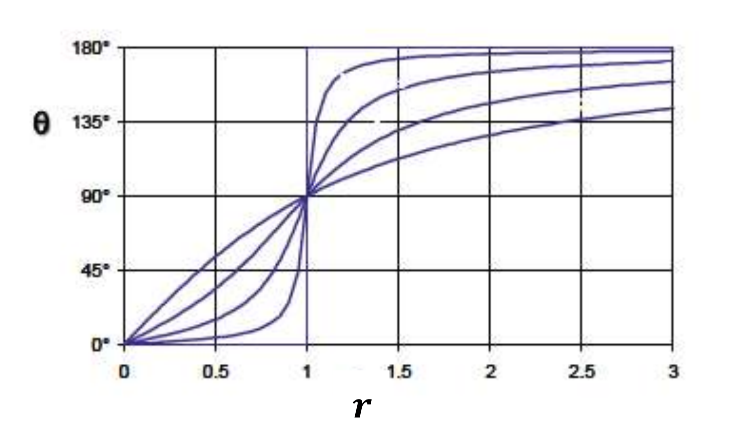


Angle de phase en fonction de « r »

$$tg\alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

$$\alpha(r) = arctg\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = arctg\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right)$$

- A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation.
- A la résonance (r=1), il y a un déphasage de 90° entre force appliqué et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale et vice-versa.
- A haute fréquence, le déplacement est maximale, en valeur absolue, au même instant que la force mais dans une direction opposée à la force.



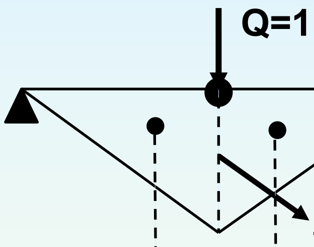
Solution

i. **Calculer la rigidité K par la méthode de multiplication des diagrammes. En déduire la pulsation propre « ω_0 ».** L=5.0 m ; EI=4000 tf.m2 ; M=5000 kg

Calcul de k ??? de f

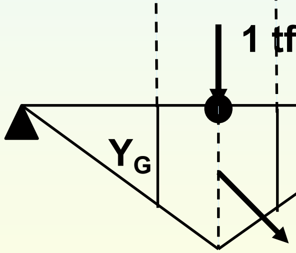
Par multiplication des diagrammes

$$f = \frac{1}{EI} A\, y_G$$



(M)=(m)

$$\frac{1.L}{4} = \frac{1.5}{4} = 1,25\; tf.m$$



(m)

$$\frac{1.L}{4} = \frac{1.5}{4} = 1,25\; tf.m$$

$$f = \frac{1}{k} = 2.\frac{1}{EI}\left(½\,\frac{1.L}{4}\,\frac{L}{2}.\frac{2}{3}\frac{L}{4}\right) = \frac{1.L^3}{48(EI)}$$

$$k = \frac{48(EI)}{L^3}$$

$$k = \frac{48(4000\,.\,10)}{5^3} = 15360\ \text{KN/m}$$

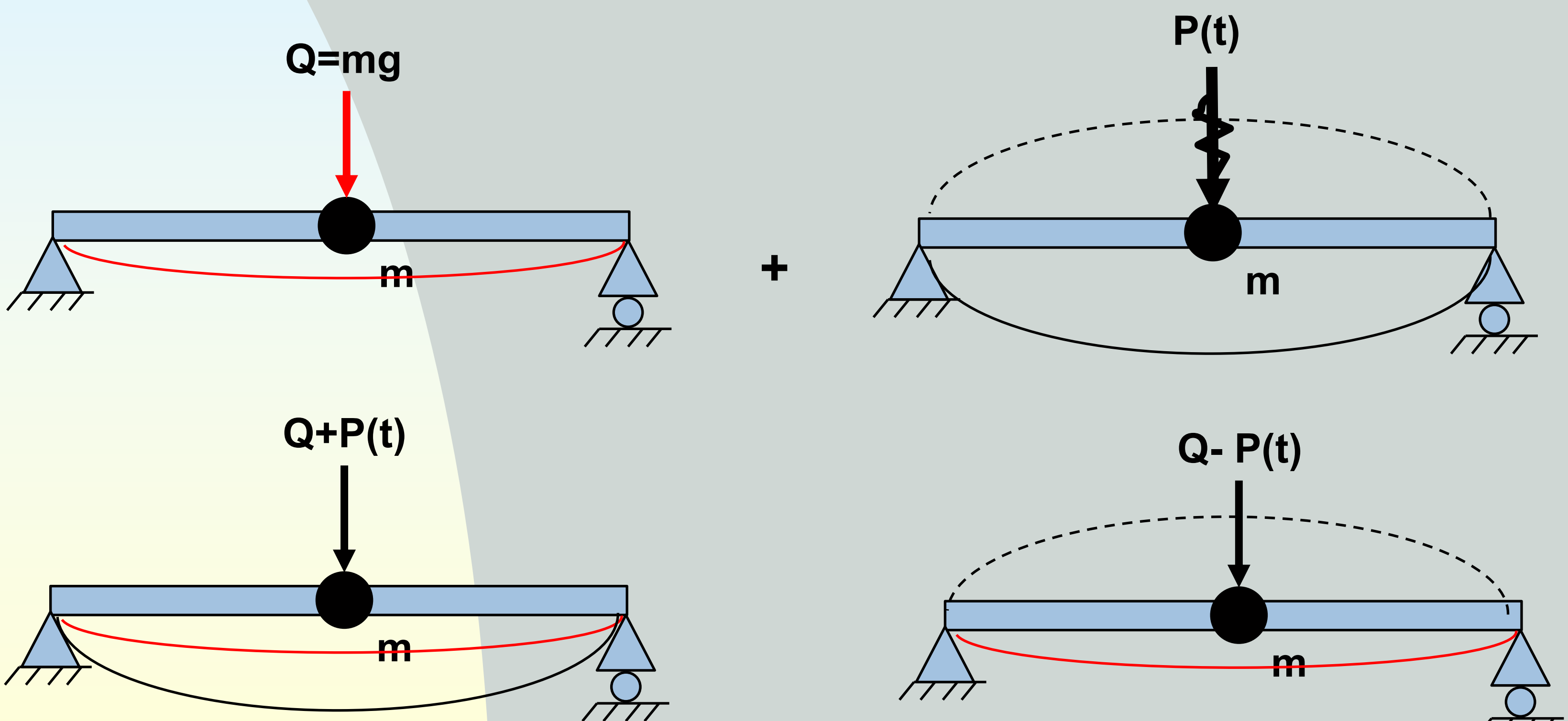
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15360}{5}}$$

$$\omega_0 = 55,43\; rd/s$$

Solution Notre cas Exemple 1

Combinaison **G** et **E**

On ne s'intéresse uniquement aux maximums



M_{max}^{+} T_{max}^{+} M_{max}^{-} T_{max}^{-}

Solution   Notre cas

Max G

Déplacement maximal du à l'effet de « Q=mg »

Max E

Puisque :

$$U_{max} = U_{stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \pm U_{stat} D$$

$$U_{stat} = \frac{P_0}{k}$$

En multipliant par « k », on aura :

$$(P(t) = P_0 \cos(\Omega t))$$

$$k.U_{max} = \pm k.D.\frac{P_0}{k} = \pm D.P_0$$

$$\boxed{P_d = \pm D.P_0}$$

Solution

ii) a) Calculer le déplacement dynamique maximal en régime permanent.

S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique.

$$U_{max} = U_{stat}\, D = Us_{tat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \qquad u_p(t) = U\cos(\Omega t - \alpha)$$

avec

$$U_{stat} = \frac{P_0}{k} \quad \text{et} \quad r = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Avec : ξ=0.2 ; P_0=40KN et Ω=30 rd/s on aura :

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{30}{55{,}43} = 0{,}541 \quad \text{et}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - (0{,}541)^2)^2 + (2\ 0{,}2\ 0{,}541)^2}} = 1{,}352$$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = \frac{P_0}{k} D = \frac{40\,000}{15{,}36\ 10^6} 1{,}352$$

$$\boxed{U_{max} = 3{,}52\ mm}$$

Solution — ii) b) Tracer les diagrammes des efforts internes (M_f et T) maxima$^+$ et maxima$^-$ en régime permanent. (du à l'effet statique et dynamique)

On a $P_d = \pm D.P_0$ $\qquad P_d = \pm 1{,}352\ .\ 40$ $\qquad \boxed{P_d = \pm\, 54{,}08\ KN}$

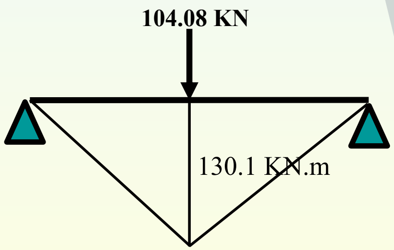
$$F^{+}_{max} = m.g + P_d = 5\,.\,10 + 54{,}08 = +104{,}08$$

$$F^{-}_{max} = m.g - P_d = 5\,.\,10 - 54{,}08 = -\,4{,}08$$

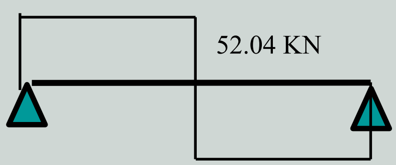
$$M_{max} = \frac{F\,.\,L}{4} \qquad T_{max} = \frac{F}{2}$$

$$M^{+}_{max} = \frac{104.08\ \ 5}{4} = 130.1\ KN.m \quad \text{et.} \quad T^{+}_{max} = \frac{104.08}{2} = 52.04\ KN$$

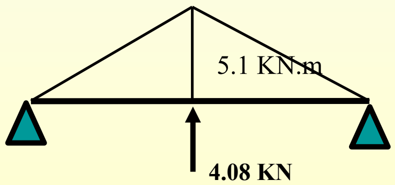
$$M^{-}_{max} = \frac{-4.08\ \ 5}{4} = -5.1\ KN.m \quad \text{et.} \quad T^{+}_{max} = \frac{-4.08}{2} = -2.04\ KN$$



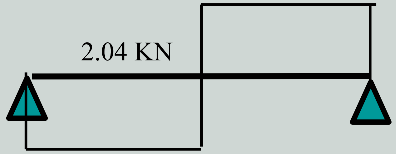
M^{+}_{max}



T^{+}_{max}



M^{-}_{max}



T^{-}_{max}

$U_{max} = 3,52\ mm$

Solution

iii) En gardant la raideur « EI » constante (masse change), et en diminuant la période propre par « 2 », est ce que le déplacement maximal en régime permanent diminue ou augmente ? Justifier.

On a $T_1 = \frac{T_0}{2}$ avec : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et. $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ on aura. : $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 2$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$ et. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ on aura : $m_1 = \frac{m_0}{4}$

Ainsi, si la période diminue de moitié, la masse diminue du quart.

Déplacement maximal en régime permanent. Système amorti en excitation harmonique.

$$U_{1max} = D\,U_{stat} \quad \text{avec} \quad D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\xi r)^2}} \quad \text{et} \quad U_{stat} = \frac{P_0}{k} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{\Omega}{2\omega_0}$$

Avec : ξ=0.2 ; P_0=40KN et Ω=30 rd/s on aura : r_1**=0.2706 ; D=1.072 et**

$$U_{1max} = D\,\frac{P_0}{k} = 1.072\,\frac{40000}{15.36\ 10^6}$$

$$U_{1max} = 2.80\ mm$$

Solution iv) Si maintenant on garde la masse constante (et EI change) et on diminue la période propre par « 2 », est ce que le déplacement maximal en régime permanent diminue ou augmente ? Justifier

On a $T_1 = \frac{T_0}{2}$ avec : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et. $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ on aura. : $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 2$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$ et. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ on aura : $k_1 = 4\ K_0$

Ainsi, si la période diminue de moitié, la rigidité augmente de quatre fois.

Déplacement maximal en régime permanent. Système amorti en excitation harmonique.

$U_{1max} = D\ x_{stat}$ avec $D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$ et $U_{stat} = \frac{P_0}{k}$ et $r_1 = \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{\Omega}{2\omega_0}$

Avec : ξ=0.2 ; P_0=40KN et Ω=30 rd/s on aura : r_1=0.2706 ; D=1.072 et

$$U_{1max} = D\frac{P_0}{k_1} = D\frac{P_0}{4k_0} = 1.072\frac{40000}{4\ x\ 15.36\ 10^6}$$

$$U_{1max} = 0,70\ mm$$

Conclusion. ???

Ainsi

- Une variation de la masse nous a donné un gain de déplacement de 20.45% (de 3.52 mm à 2.80 mm).
- Une variation de la rigidité nous a donné un gain de déplacement de 80.12% (de 3.52 mm à 0.70 mm).

Il est peut-être préférable d'augmenter la rigidité que de diminuer la masse. Mais comme les 02 vont ensemble, il faut trouver l'optimum entre les 02 tout en faisant attention à la stabilité de la structure.

Merci. **Fin de l'Application 4**