Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 5

Vibrations forcées amorties

Excitation harmonique

Exemple 5 **Jeudi 04.01.2024**

Objectif

Le but de cette application est de calculer la réponse d'un système forcé amorti à un seul degré de liberté avec une excitation de type harmonique.

Calcul des réponses dynamiques dues à une excitation harmonique

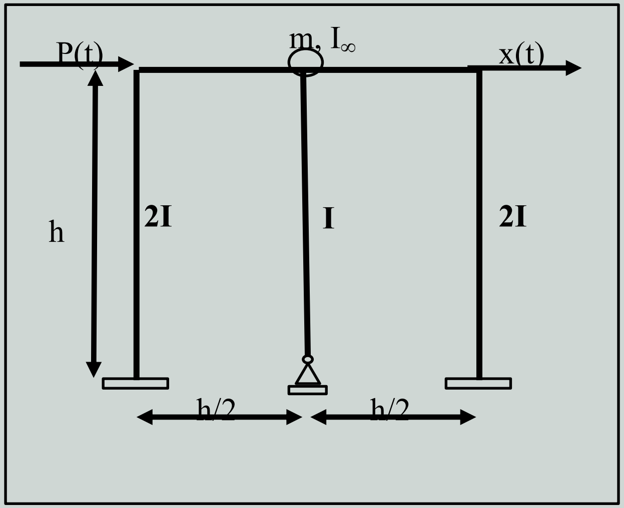
Influence de la pulsation de la force d'excitation

Influence de la valeur de l'amortissement.

Exemple 1

On considère le portique de la figure. Le plancher est considéré infiniment rigide. On s'intéresse au déplacement horizontal du plancher. Les poteaux des extrémités sont encastrés, alors que le poteau intermédiaire est appuyé. L'amortissement n'est pas négligé.

On donne : m=4t ; E=200 GPa ; I=3.0 10^7 mm^4 ; ξ=0.2 et h=3.50 m



i. Dessiner le modèle « masse-ressort » du système fondamental de ce portique.

ii. Calculer la rigidité équivalente «K_{eq}» de ce système. En déduire la pulsation, fréquence et période propres de cette structure.

iii. Si le portique est soumis à une force harmonique $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ appliquée horizontalement au niveau du plancher, calculer le déplacement maximal en régime permanent. On donne P_0=30KN et Ω=30 rd/s

Exemple 1

iv. On considère 03 valeurs de «Ω » (Ω=0 ; $\Omega=\omega_0$ et $\Omega=\infty$) et pour chaque valeur on vous demande de déduire le déplacement maximal en régime permanent. Quels sont vos conclusions quant à l'effet de « Ω ». « I » et m restent inchangées.

v. On veut étudier l'influence de l'amortissement sur la réponse de la structure, on prendra 02 autres valeurs de l'amortissement. On vous demande de calculer le déplacement maximal en régime permanent pour

- ξ=0.5, et
- ξ=0.7

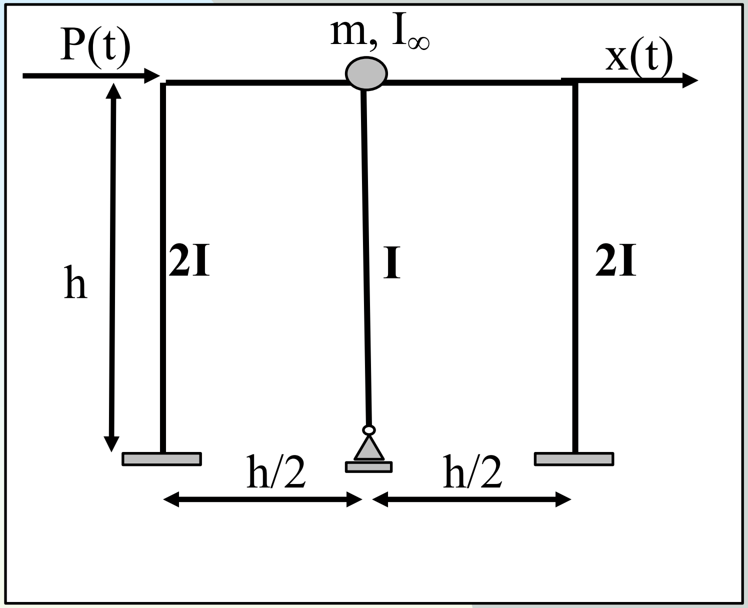
A chaque fois, la rigidité et la masse reste inchangées.

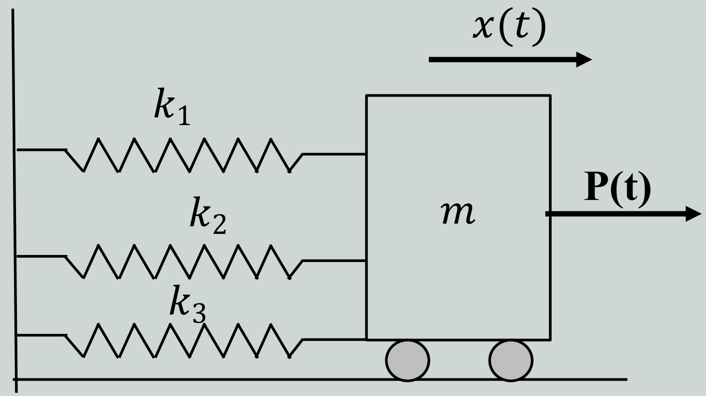
Commenter le résultat obtenu.

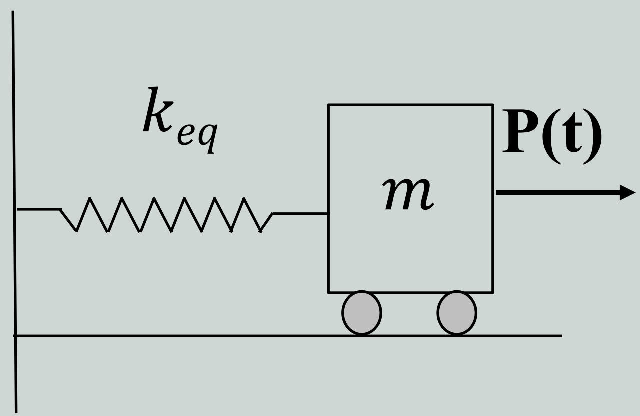
Solution

i. **Dessiner le modèle « masse-ressort » du système fondamental de ce portique.**

Masse-Ressorts ?

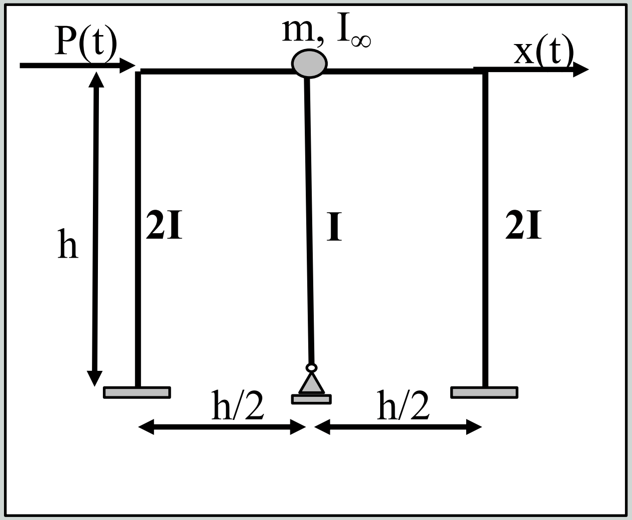






Solution

ii. Rigidité équivalente. Pulsation, fréquence et période propres



m=4t ; E=200 GPa ; I=3.0 10^7 mm^4 et h=3.50 m

Rappel Chapitre 2 §7

Poteaux en //

$$\boldsymbol{k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3}$$

Poteaux (1) et (3) encastré-encastré $k_1 = \dfrac{12E(2I)}{(h)^3} = k_3$

Poteau (2) encastré-appuyé $k_2 = \dfrac{3E(I)}{(h)^3}$

Ainsi: $$\boldsymbol{k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 = \frac{24EI}{(h)^3} + \frac{3EI}{(h)^3} + \frac{24EI}{(h)^3} = \frac{51EI}{(h)^3}}$$

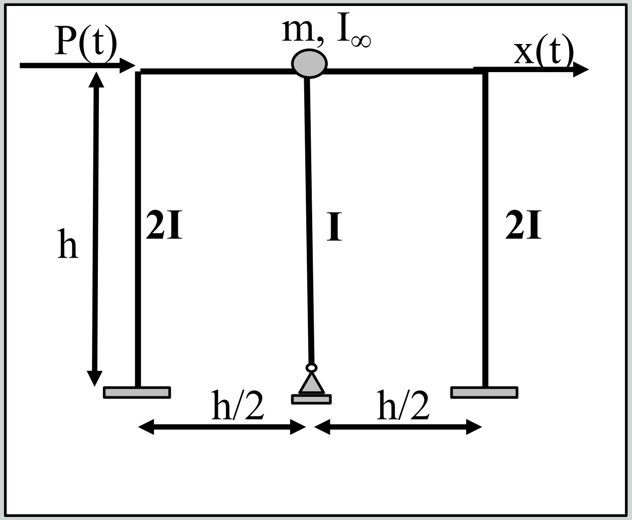
$$\boldsymbol{k_{eq} = \frac{51EI}{(h)^3} = \frac{51\ \ 200\ 10^9\ \ 3\ 10^{-5}}{(3,5)^3} = 7,137\ 10^6\ N/m}$$

Pulsation, fréquence et période propres. $$\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{7.137\ 10^6}{4000}} = \boldsymbol{42.24\ r\ d/s}$$

$$\boldsymbol{f_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \boldsymbol{6.723\ Hz} \qquad \boldsymbol{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boldsymbol{0.148\ s}$$

Solution

iii. Si le portique est soumis à une force harmonique $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ appliquée horizontalement au niveau du plancher, calculer le déplacement maximal en régime permanent. On donne P0=30KN et Ω=30 rd/s



$k_{eq} = 7,137\ 10^6\ N/m$

Rappel (Voir chapitre 4)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \sin(\Omega t)$$

$$u_p(t) = U \sin(\Omega t - \alpha)$$

« U » ??? = U_{max}

Par représentation vectorielle

$$U = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

et

$$tg\alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$U = U_{stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = U_{stat}\, D$$

Solution

P0=30KN et Ω=30 rd/s

$k_{eq} = 7,137\ 10^6\ N/m$

$$U = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$U = U_{stat}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = U_{stat}\,D$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{30}{42{,}24} = 0{,}71 \qquad D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = 1{,}75$$

$$U_{max} = D\,\frac{P_0}{k_{eq}} = 1.75\,\frac{30000}{7.137\ 10^6}$$

$$U_{max} = 7.36\ mm$$

$U_{max} = 7.36\, mm$

Solution

iv) On considère 03 valeurs de «Ω » (Ω=0 ; Ω=ω_0 et Ω=∞) et pour chaque valeur on vous demande de déduire le déplacement maximal en régime permanent. Quels sont vos conclusions quant à l'effet de « Ω ». « I » et m restent inchangées.

S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique. $u_p(t) = U\cos(\Omega t - \alpha)$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = U_{stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$ avec $U_{stat} = \frac{P_0}{k_{eq}}$ et $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$

Avec : ξ=0.2 ; K_{eq}=7,137 10^6; P_0=30KN et Ω= varie on aura :

Cas 1: $\Omega = 0$ $\quad r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0 \quad D = \frac{1}{\sqrt{(1 - (0)^2)^2 + (2\ 0,2\ 0)^2}} = 1,0$

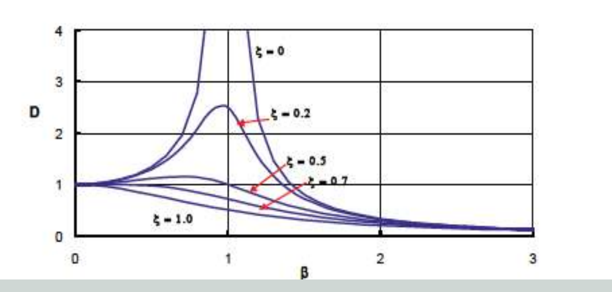
$$U_{max} = U_{stat}\, D = U_{stat}\, x\, 1 = \frac{P_0}{k} = \frac{30\ 000}{7,137\ 10^6} = 4,21\ mm$$

Cas 2: $\Omega = \omega_0$ $\quad r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 1 \quad D = 2,5$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = \frac{P_0}{k} D = \frac{30\ 000}{7,137\ 10^6} 2,5 = 10,52\ mm$$

Cas 3: $\Omega = \infty$ $\quad r = \infty \quad D = 0$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = 0\ mm$$



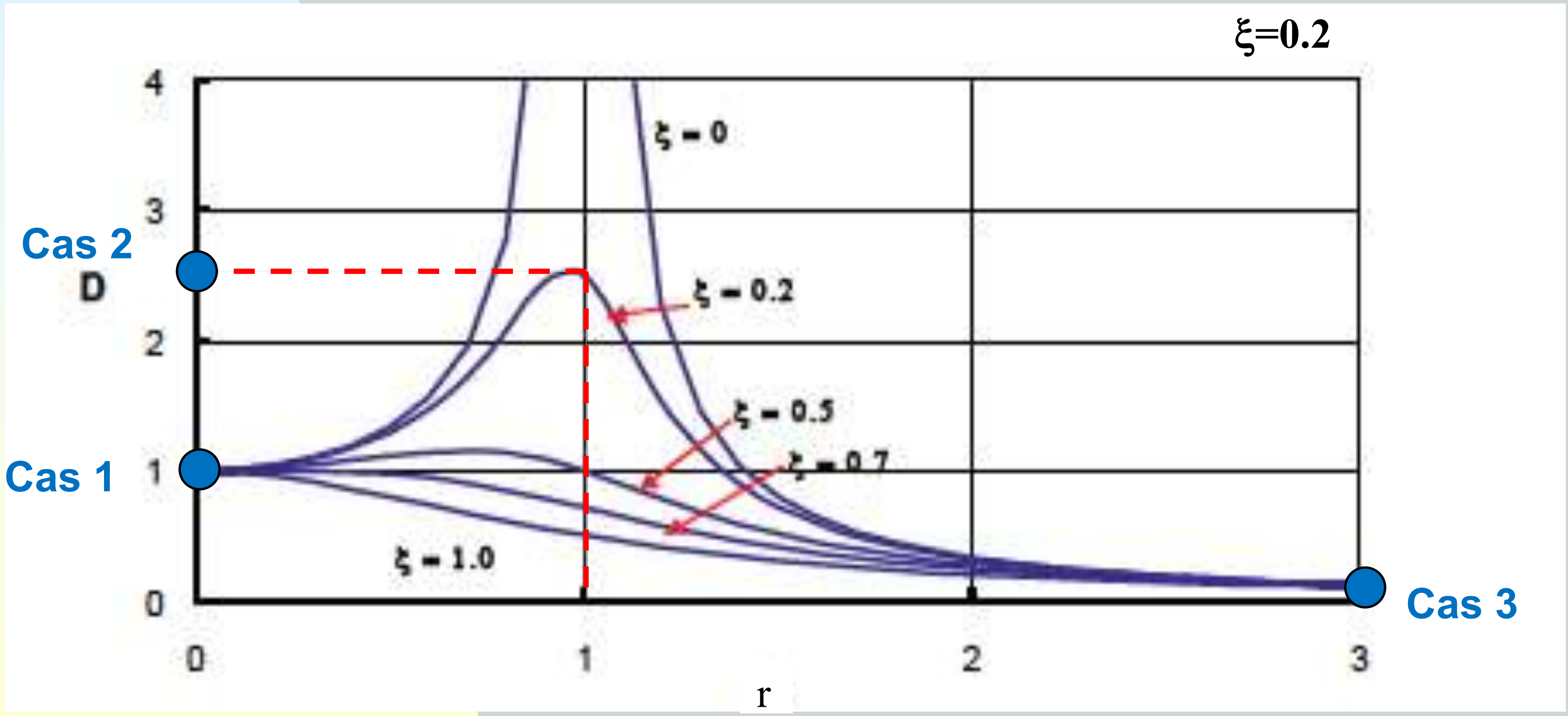
Solution

S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique.

Cas 1: $\Omega = 0$ $\quad r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0$ $\quad D = 1,0$

Cas 2: $\Omega = \omega_0$ $\quad r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 1$ $\quad D = 2,5$

Cas 3: $\Omega = \infty$ $\quad r = \infty$ $\quad D = 0$



$\omega_0 = 42.24\ rd/s$ $U_{max} = 7.36\ mm$

Solution

v) Influence du coefficient d'amortissement

S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique. $u_p(t) = U\cos(\Omega t - \alpha)$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = U_{stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

avec $U_{stat} = \frac{P_0}{k_{eq}}$ et $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$

Avec : ξ=varie ; K_{eq}=7,137 10^6; P_0=30KN et Ω= 30rd/s on aura :

Cas 1 : $\xi = 0,5$ $r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0,71$ $D = \frac{1}{\sqrt{(1 - (0,71)^2)^2 + (2\ 0,5\ 0,71)^2}} = 1,155$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = \frac{P_0}{k} D = \frac{30\ 000}{7,137\ 10^6} 1,155 = 4,86\ mm$$

Cas 2 : $\xi = 0,7$ $r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0,71$ $D = 0,9$

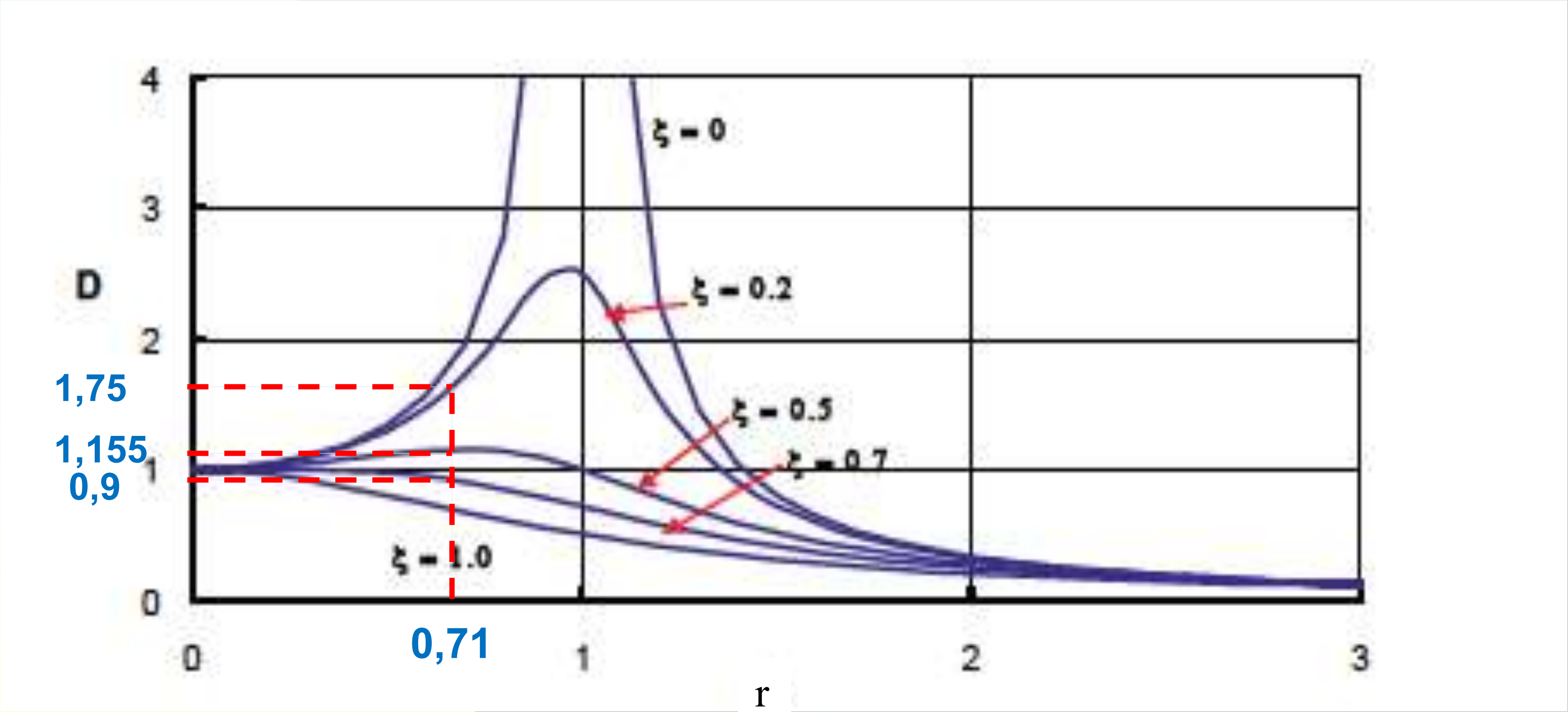
$$U_{max} = U_{stat}\, D = \frac{P_0}{k} D = \frac{30\ 000}{7,137\ 10^6} 0,9 = 3,78\ mm$$

Solution S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique.

Cas 1: $\xi = 0,2$ $r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0,71$ $D = 1,75$

Cas 2 : $\xi = 0,5$ $r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0,71$ $D = 1,155$

Cas 3 : $\xi = 0,7$ $r = 0,71$ $D = 0,9$



Solution

S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique.

Cas 1: $\xi = 0,2$ $U_{max} = 7,36\ mm$

Cas 2 : $\xi = 0,5$ $U_{max} = 4,86\ mm$ **Diminution de 33,96 %**

Cas 3 : $\xi = 0,7$ $U_{max} = 3,78\ mm$ **Diminution de 48,64 %**

L'idée est de voir est ce que ça vaut vraiment l'investissement (qui peut être très important pour passer de 20% à 70%) en équipement d'amortissement.

Ces résultats sont valables uniquement pour r=0.71. Pour d'autres valeurs de « r » les résultats seront autrement.

Merci. Fin de l'Application 5