Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 6

Vibrations forcées amorties

Excitation harmonique par déplacement du support

Exemple 6 **Jeudi 04.01.2024**

Objectif

Le but de cette application est de calculer la réponse d'un système amorti à un seul degré de liberté soumis à un déplacement du support de type harmonique.

Calcul des réponses dynamiques dues au déplacement du support harmonique

Etablissement de l'équation du mouvement

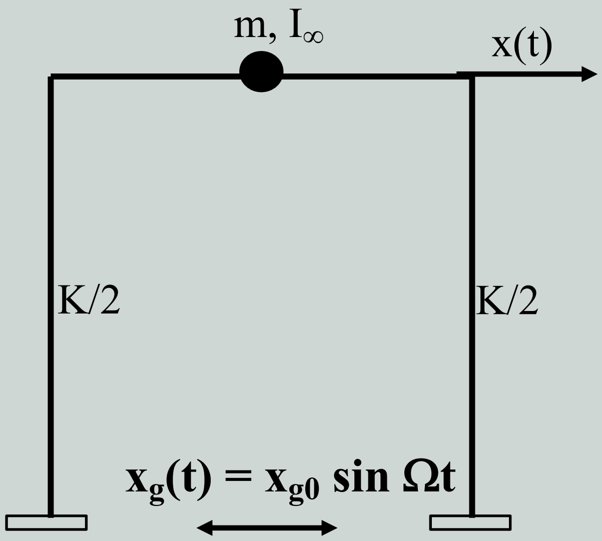
Influence de la valeur de l'amortissement.

Exemple 1

Le portique à un étage de la figure est soumis à un déplacement du support $x_g(t) = x_{g0} \sin \Omega t$. On considère que la masse est concentrée au sommet et que le système est amorti.

Avec les données suivantes : x_{g0}=25 cm ; Ω=3.50 rd/s ; K=13.12 10^4 N/m ; m=1750 kg et ξ=0.2 On vous demande :

i. **Écrire l'équation du mouvement de ce système.**
ii. **Calculer le déplacement maximal en régime permanent de ce système.**
iii. **Si on augmente l'amortissement de ce système de ξ=0.2 à ξ=0.7, en gardant la rigidité et la masse inchangées, quelle serait la valeur du déplacement maximal. Commenter le résultat obtenu.**



Solution

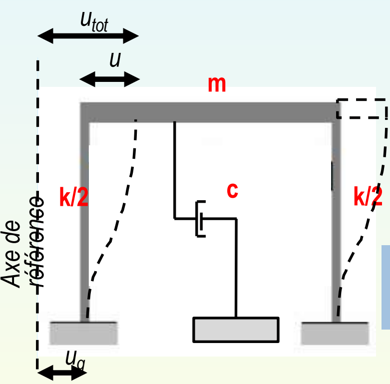
i. Equation du mouvement.

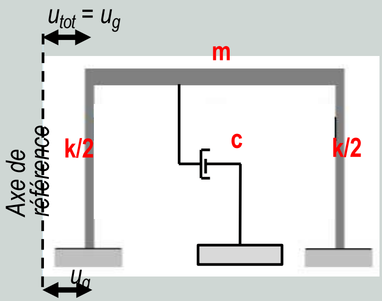
Rappel (Voir chapitre 2 §6) **Déplacement du support ?**

Séisme → **Déplacement du support**

Séisme → **Accélération du support**

Structure → **Flexible** / **Rigide**





Flexible :

- ✓ **Déplacement** (sens du mouvement) avec **déformation** des éléments de la structure.
- ✓ Poutre très rigide.
- ✓ Masse totale concentrée sur la poutre.
- ✓ Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement.
- ✓ Seul DDL, possibilité de flexion des poteaux.

Rigide :

C'est toute la structure qui bouge (**Mouvement de corps rigide**). Pas de déformation des éléments de la structure.

Il n'y a pas d'effet de rigidité et d'amortissement.

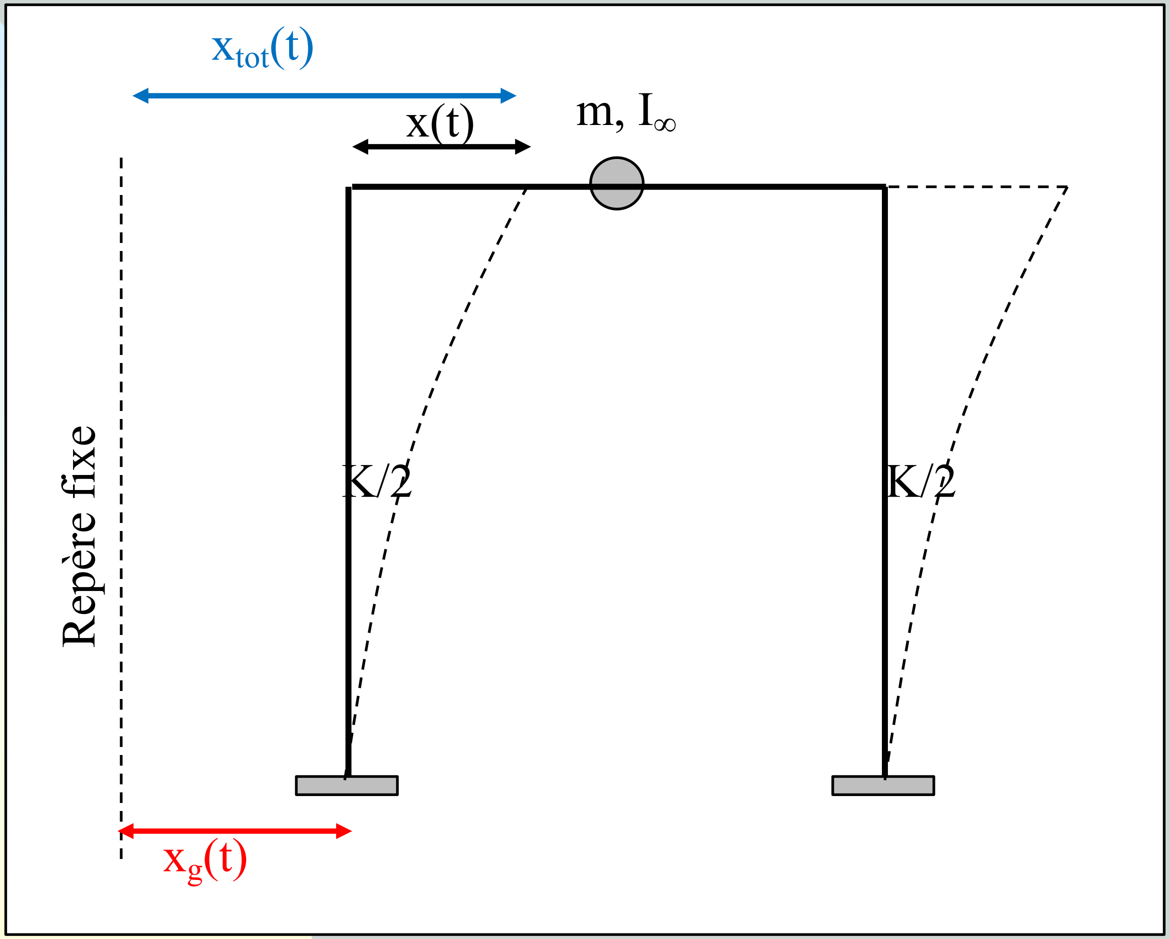
On parle directement de l'effort tranchant à la base (selon les codes).

Exemple: $V = \frac{w}{g}\ddot{u}_g = C.w$

Avec : C : rapport entre l'accélération du sol et la pesanteur. (C = 0.12 – 0.15)

Solution

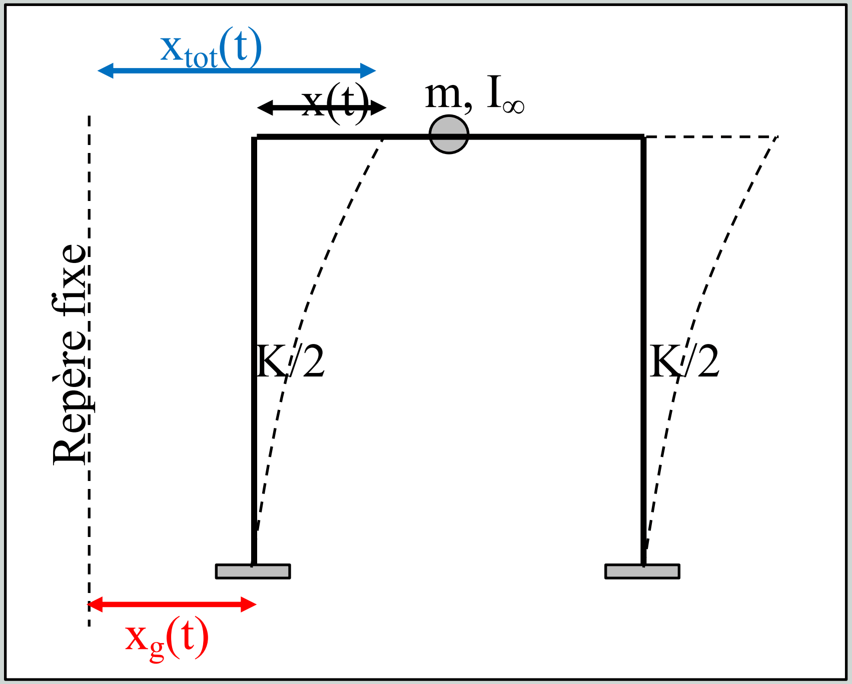
Structure flexible ?



$$x_{tot}(t) = x(t) + x_g(t)$$

Solution

Equation du mouvement ?



$$f_I + f_a + f_k = 0$$

P(t) = 0 : Pas de force extérieure directe

$f_I = m\ddot{x}_{tot}$ **: Inertie sur le total**

$f_a = c\dot{x}$ **: Amortissement avec le mvt.**

$f_k = k\,x$ **: Rigidité avec le mvt.**

$$x_{tot}(t) = x(t) + x_g(t) \qquad \boxed{\ddot{x}_{tot}(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t)}$$

$$f_I + f_a + f_k = m\ddot{x}_{tot} + C\dot{x} + Kx = m\left(\ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t)\right) + c\dot{x} + k\,x = 0$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

Notre cas: $x_g(t) = x_{g0}\,sin\Omega t.$ on aura $\ddot{x}_g = -x_{g0}\Omega^2 sin\Omega t$

D'où:

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = mx_{g0}\Omega^2 sin\Omega t}$$

Solution

ii. Calculer le déplacement maximal en régime permanent. On donne x_{g0}=25 cm ; Ω=3.50 rd/s ; K=13.12 10^4 N/m ; m=1750 kg et ξ=0.2

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = mx_{g0}\Omega^2 sin\Omega t$$

Système amorti en excitation harmonique ?

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0\, sin(\Omega t)$$

Avec: $P_0 = mx_{g0}\Omega^2$

$$u_p(t) = U\, sin(\Omega t - \alpha)$$

« U » ??? = U_{max}

$$U = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

et

$$tg\alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

$$U = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$U = Ustat\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = U_{stat}\, D$$

Solution

x_{g0}=25 cm ; Ω=3.50 rd/s ;
K=13.12 10^4 N/m ;
m=1750 kg et ξ=0.2

$$U = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$P_0 = m x_{g0}\Omega^2$$

$$U = U_{stat}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = U_{stat}\,D$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0}$$ **et** $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{13{,}12\ \ 10^4}{1750}} = 8{,}658\ rd/s$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{3{,}5}{8{,}658} = 0{,}404$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0{,}404^2)^2+(2\ \ 0{,}2\ \ 0{,}404)^2}} = 1{,}173$$

$$U_{max} = D\,\frac{P_0}{k} = D\,\frac{m x_{g0}\Omega^2}{k} = D\,\frac{x_{g0}\Omega^2}{\omega_0^2} = D\,x_{g0}\,r^2 = 1{,}173\ \ 0{,}25\ \ 0{,}404^2$$

$$\boxed{U_{max} = 4{,}78\ cm}$$

$U_{max} = 4,78\ cm$

Solution

iii) Déplacement maximal en régime permanent pour «ξ=0.7 » .

S1DDL amorti forcé par une excitation harmonique. $u_p(t) = U cos(\Omega t - \alpha)$

$$U_{max} = U_{stat}\, D = U_{stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

avec $r = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$ et $U_{stat} = \dfrac{P_0}{k_{eq}}$ et $P_0 = m x_{g0} \Omega^2$

Cas 2 : $\xi = 0,7$

Avec : x_{g0}=25 cm ; Ω=3.50 rd/s ; K=13.12 10^4 N/m ; m=1750 kg et ξ=0,7

on aura :

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0,404$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0{,}404^2)^2 + (2\ \ 0{,}7\ \ 0{,}404)^2}} = 1,0$$

$$U_{max} = D\,\frac{P_0}{k} = D\,\frac{m x_{g0} \Omega^2}{k} = D\,\frac{x_{g0} \Omega^2}{\omega_0^2} = D\, x_{g0}\, r^2 = 1{,}0\ \ 0{,}25\ \ 0{,}404^2$$

$$U_{max} = 4,08\ cm$$

Solution

S1DDL amorti forcé par déplacement du support en harmonique.

Cas 1: $\xi = 0,2$ $U_{max} = 4,78\ mm$

Cas 3 : $\xi = 0,7$ $U_{max} = 4,08\ mm$ Diminution de 14,65 %

Une grande variation de l'amortissement nous a donné un gain de déplacement de 14,65%. C'est très peu par rapport au grand investissement (Équipements et moyens mis en œuvre) sur l'amortissement.

Ceci est valable uniquement pour ce cas où « r=0.404 ». Pour une autre valeur de « r » ça sera autre chose.

Merci. Fin de l'Application 6