Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 8

Vibrations forcées

Excitation Impulsive Triangulaire

Exemple 8 **Jeudi 04.01.2024**

Objectif

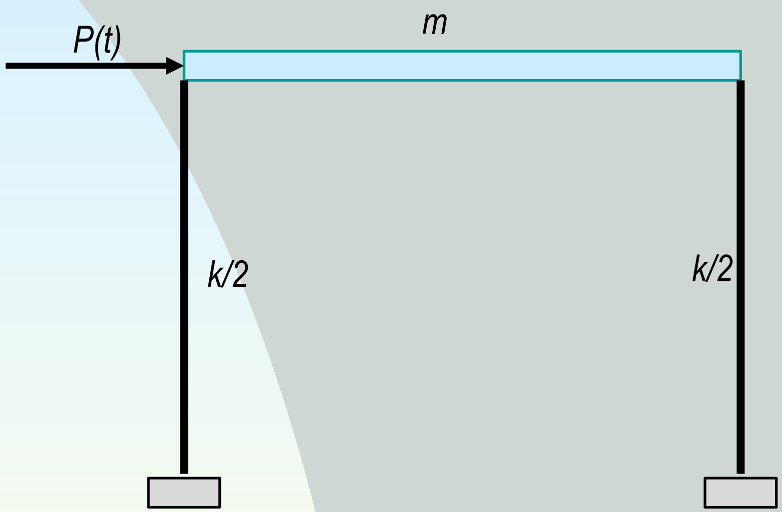
Le but de cette application est de calculer la réponse d'un système à un seul degré de liberté soumis à une excitation de type impulsive triangulaire.

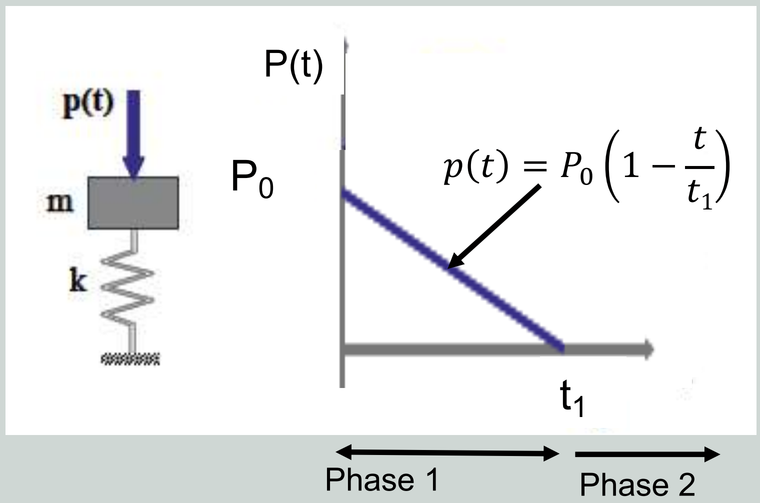
Etablissement des équations du mouvement

Recherche du déplacement maximal selon la phase de l'excitation.

Exemple 1

On donne un système à un seul DDL soumis à la force montrée en figure ci-dessous. On donne : m=300t ; k=1,75 10^9 N/m P_0=5 10^6 N et t_1=0,05 s





i. **Calculer le déplacement maximal du portique. En déduire la force élastique maximale**

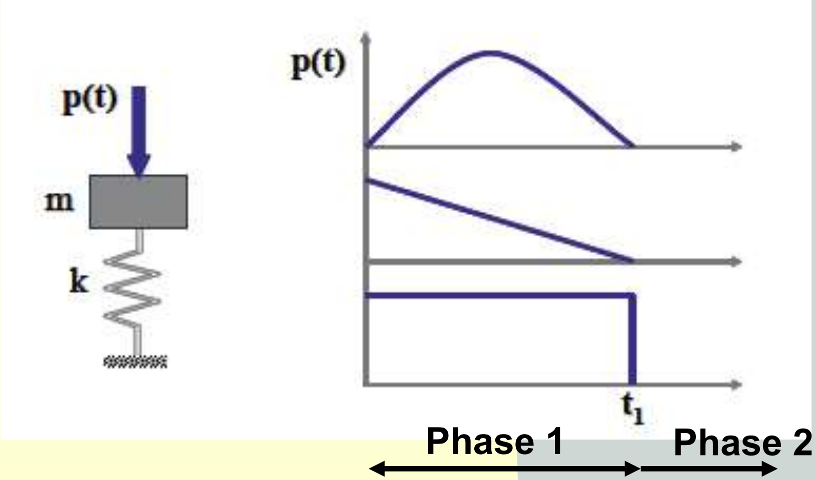
ii. **Si la durée de l'impulsion a été 10 fois moindre (t_1=0,005 s), quelle serait la force élastique maximale ?**

Solution

Rappel (Voir chapitre 5 §5)

Excitation impulsive ?

- Elle ne se répète pas dans le temps.
- Elle est de très courte durée.
- L'amortissement n'aura pas le temps de se développer durant l'excitation.
- Il y a toujours 02 phases: La 1ère le système est forcé par une excitation très courte et la 2ème le système est en oscillations libres due au déplacement et la vitesse finaux de la 1ère phase.
- Elle peut prendre des formes variées, sinusoïdale, triangulaire, rectangulaire…

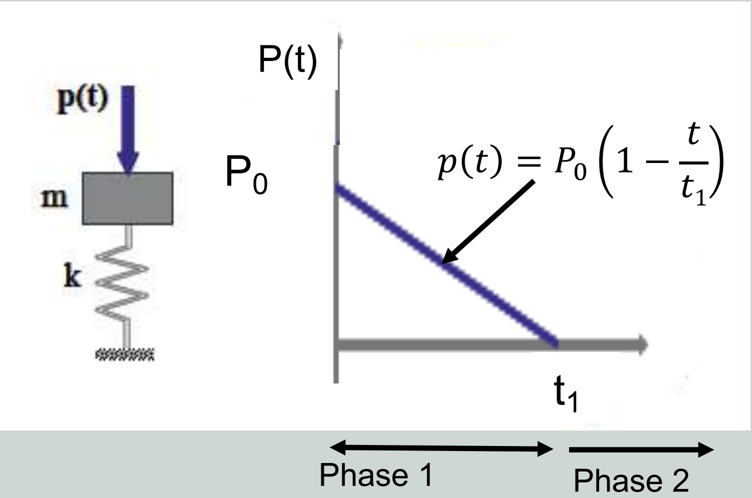


Ex. Choc/Impact du à une collision, une explosion, joints du pont, parcs d'attraction...

Solution

Impulsion triangulaire

Phase 1: $t \leq t_1$



Système soumis à une force linéaire décroissante (impulsion)

D'où: $$m\,\ddot{u}_1(t) + k u_1(t) = P_0\left(1-\frac{t}{t_1}\right)$$

Solution : (Voir Chap 3) : $u_1(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $u_c(t) = [(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)]$ $\quad u_p(t) = \frac{P_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_1}\right)$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_1}\right) + [(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)]$$

Soit les CI: $u_1(0) = u_0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

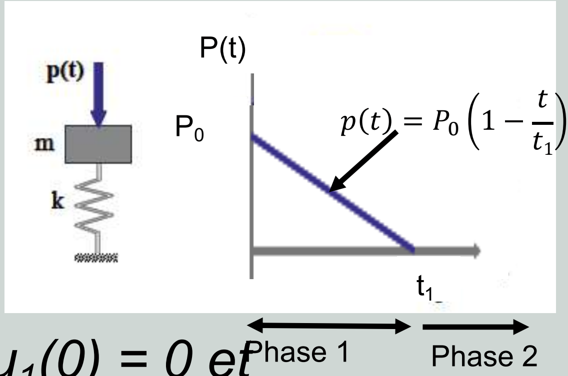
$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_1}\right) + \left[\left(u_0 - \frac{P_0}{k}\right)\cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\left(\dot{u}_0 + \frac{P_0}{k t_1}\right)\sin\omega_0 t\right] \quad \textbf{(1)}$$

Si le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1}\sin\omega_0 t\right) \quad \textbf{(2)}$$

Solution

Impulsion triangulaire



Réponse maximale en phase 1 ?

Prenons le cas simple où le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Pour obtenir la max. on annule la dérivée % temps

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t + \frac{\omega_0 cos\omega_0 t}{\omega_0 t_1}\right) = 0$$

Soit

$$\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t + \frac{\omega_0 cos\omega_0 t}{\omega_0 t_1}\right) = 0$$

Ou bien

$$\left(\frac{cos\omega_0 t}{\omega_0 t_1} + sin\omega_0 t\right) = \frac{1}{\omega_0 t_1} \qquad \textbf{(3)}$$

Or

$$A\cos\omega_0 t + B\, sin\omega_0 t = \sqrt{(A)^2 + (B)^2}\left(\frac{A}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}}\cos\omega_0 t + \frac{B}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

Solution

Impulsion triangulaire

$$\left(\frac{cos\omega_0 t}{\omega_0 t_1} + sin\omega_0 t\right) = \frac{1}{\omega_0 t_1} \qquad \textbf{(3)}$$

$$A\cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t = \sqrt{(A)^2 + (B)^2}\left(\frac{A}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}}\cos\omega_0 t + \frac{B}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

Soit

$$\sqrt{(A)^2 + (B)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_0 t_1}\right)^2 + (1)^2} = \frac{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}}{\omega_0 t_1}$$

Soit (3)

$$\frac{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}}{\omega_0 t_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}} cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 t1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}} sin\omega_0 t\right) = \frac{1}{\omega_0 t_1}$$

Soit

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}} cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 t1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}} sin\omega_0 t\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Solution

Impulsion triangulaire

Soit

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}} cos\omega_0 t + \frac{\omega_0 t1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}} sin\omega_0 t\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\cos\alpha \qquad\qquad \sin\alpha \qquad\qquad \cos\alpha$$

D'où $(\cos\alpha\ \ cos\omega_0 t + \sin\alpha\ \ sin\omega_0 t) = \cos\alpha$

$cos(\omega_0 t - \boldsymbol{\alpha}) = \cos\alpha$ ➡ **solution**

$(\omega_0 t - \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + 2\pi n$ **ou bien** $(\omega_0 t - \boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\alpha} + 2\pi n$ **A rejeter donne t=0**

D'où $(\omega_0 t - \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + 2\pi n$ **1er terme n=0**

$$\boxed{t_{max} = \frac{2\,\alpha}{\omega_0}}$$

Avec :

$$\alpha = sin^{-1}\frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}} = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}}$$

Solution

Impulsion triangulaire

$$\boldsymbol{t_{max} = \frac{2\,\alpha}{\omega_0}}$$

Or

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t\right)$$

Et comme :

$$D = \frac{u_{1max}}{u_{stat}} = \left(1 - \frac{\boldsymbol{2\,\alpha}}{\boldsymbol{\omega_0} t_1} - cos\boldsymbol{2\,\alpha} + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\boldsymbol{2\,\alpha}\right)$$

Avec: $cos\boldsymbol{2\,\alpha} = \boldsymbol{cos^2}\alpha - \boldsymbol{sin^2}\alpha$ **et** $sin\boldsymbol{2\,\alpha} = \boldsymbol{2\,cos\,\alpha}\,\mathrm{sin}\boldsymbol{\alpha}$

Sachant que $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}}$ **et** $\boldsymbol{sin\,\alpha} = \frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}}$

$$\boldsymbol{D} = 1 - \frac{\boldsymbol{2\,\alpha}}{\boldsymbol{\omega_0} t_1} - cos\boldsymbol{2\,\alpha} + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\boldsymbol{2\,\alpha} = \boldsymbol{2} - \frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{\omega_0 t_1}} = \boldsymbol{2} - \frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{2\pi\frac{t_1}{T}}}$$

Avec :

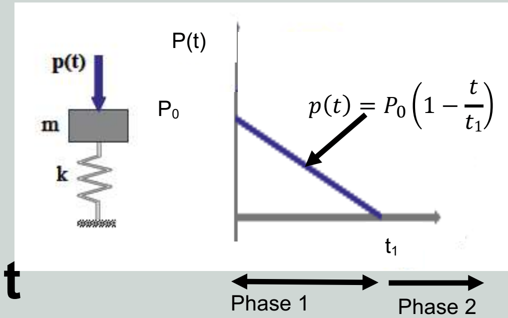
$$\boldsymbol{\alpha = sin^{-1}} \frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}} = \boldsymbol{cos^{-1}} \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}}$$

Pour $\frac{t1}{T} > \boldsymbol{0.4}$

Solution

Impulsion triangulaire

Phase 2: t ≥ t_1



Système en oscillations libres dues au déplacement et vitesse finaux de la phase 1

D'où: $$m\,\ddot{u}_2(t) + k u_2(t) = 0$$

Avec CI: $u_2(t_1) = u_1(t_1) = u_{t1}$ *et.* $\dot{u}_2(t_1) = \dot{u}_1(t_1) = \dot{u}_{t1}$

Si on suppose que le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

$$\boxed{u_2(t) = \left[u_{t1}\,cos\omega_0(t - t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t - t_1)\right]} \qquad \textbf{(3)}$$

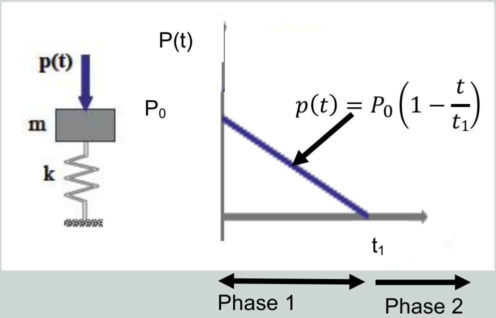
Où. u_{t1} **et** $\dot{u}_{t1}$ **sont obtenus en utilisant l'éq. 2. pout « t=t_1 »**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t\right) \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t\right)$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) \text{ et } \dot{u}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Solution

Impulsion triangulaire



$$u_2(t) = \left[u_{t1}\, cos\omega_0(t - t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t - t_1)\right] \quad \textbf{(3)}$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-\,cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) \qquad \dot{u}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right) \quad \textbf{(4)}$$

En remplaçant (4) dans (3)

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}\left(-\,cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) cos\omega_0(t - t_1) + \frac{P_0}{\omega_0 k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right) sin\omega_0(t - t_1)\right]$$

(5)

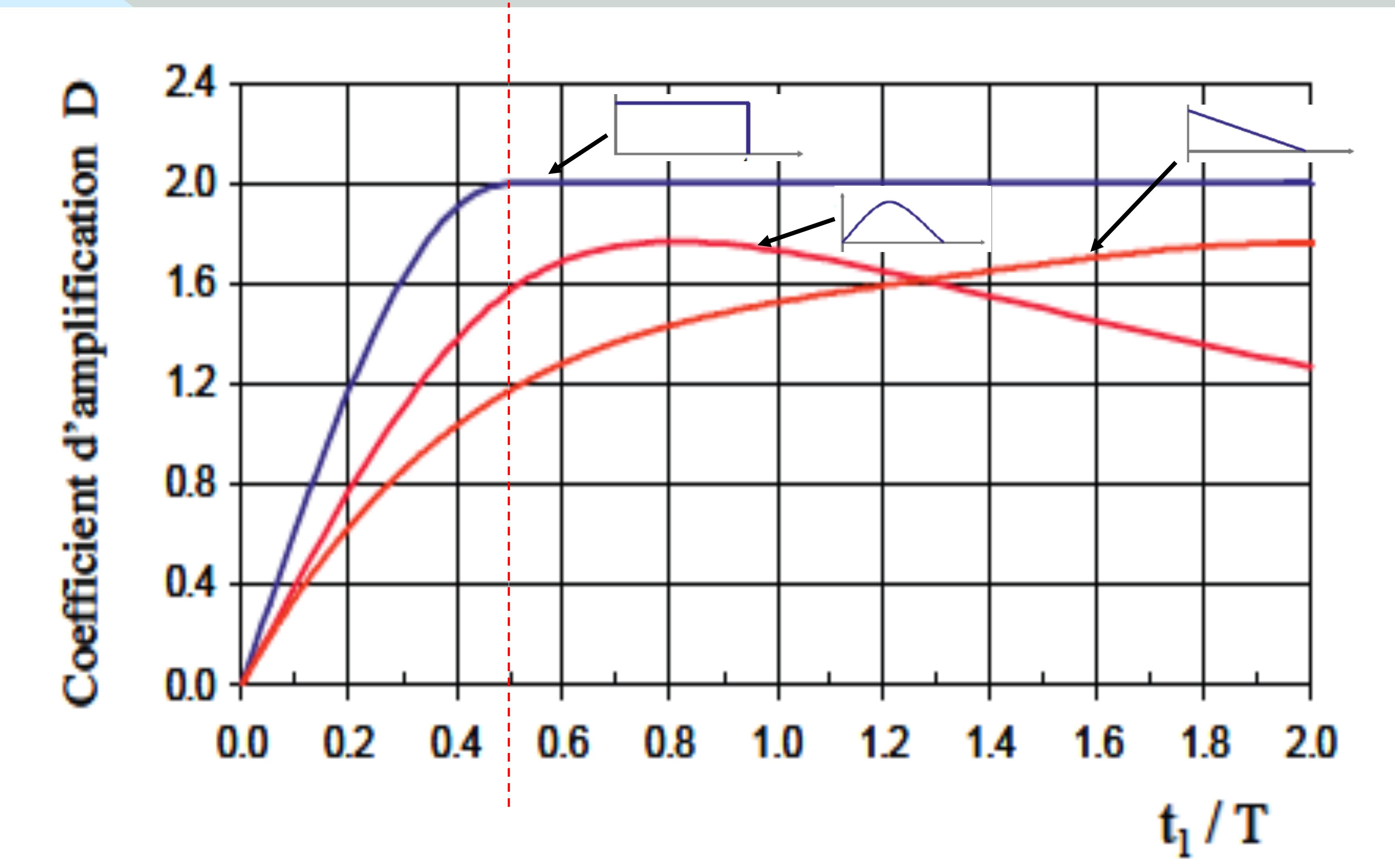
La réponse maximale en phase 2, sera:

$$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)^2} \qquad \textbf{pour} \qquad \frac{t1}{T} < \mathbf{0.4} \qquad \textbf{(6)}$$

$$D = \frac{u_{2max}}{u_{stat}} = f\left(\frac{t1}{T}\right)$$

Solution

Spectres de réponse ou spectre de choc



Solution **Notre cas**

i. **Calculer le déplacement maximal du portique. En déduire la force élastique maximale.**
m=300t ; k=1,75 10^9 N/m P_0=5 10^6 N et t_1=0,05 s

$$\frac{t_1}{T}\ ?$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{300\ 10^3}{1{,}75\ 10^9}} = \mathbf{0,082\ s}$$

D'où : $\frac{t_1}{T} = \frac{0{,}05}{0{,}082} = \mathbf{0,61} > \mathbf{0,4}$ **Réponse max en phase 1**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1}\sin\omega_0 t\right)$$

Or : $\boldsymbol{D = 2 - \frac{2\alpha}{\omega_0 t_1} = 2 - \frac{2\alpha}{2\pi\frac{t_1}{T}}}$ Avec : $\boldsymbol{\alpha = \sin^{-1}\frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2}}}$

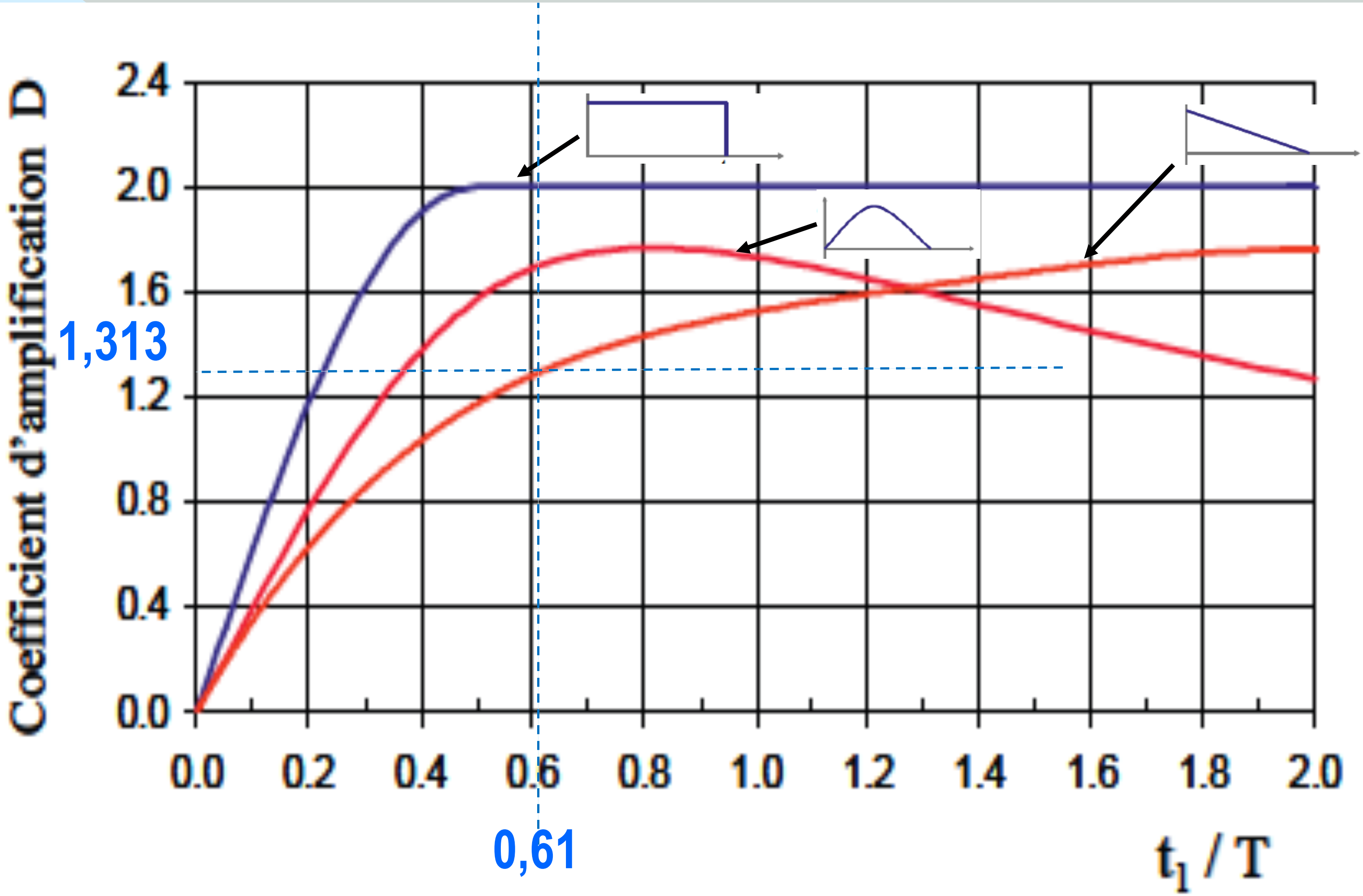
$\omega_0 t_1 = 2\pi\frac{t_1}{T} = 2\pi\ 0{,}61 = 3{,}832$ D'où $\boldsymbol{\alpha = 1,3155}$

et: $\boldsymbol{D = 2 - \frac{2\alpha}{\omega_0 t_1} = 2 - \frac{2\ x\ 1,3155}{3,832} = 1,313}$

Du spectre ?

Solution

Spectres de réponse ou spectre de choc



Solution

Notre cas

Avec $D = 1{,}313$

D'où :

$$u_{1max} = D.\frac{P_0}{k} = 1{,}313.\frac{5\ 10^6}{1{,}75\ 10^9} \qquad u_{1max} = 3{,}75\ mm$$

$$\boldsymbol{F_{emax} = k.u_{1max} = 1,75\ 10^9\ x\ 3,75\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F_{emax} = 6,565\ \ 10^6\ N}}$$

Solution

Notre cas

Pour t_1=0,005 s ?.

D'où : $\frac{t1}{T} = \frac{0{,}005}{0{,}082} = \mathbf{0,061} < \mathbf{0,4}$ **Réponse max en phase 2**

$$u_2(t) = \left[u_{t1}\,cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t-t_1)\right]$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right)$$

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) cos\omega_0(t-t_1) + \frac{P_0}{\omega_0 k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right) sin\omega_0(t-t_1)\right]$$

$$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)^2}$$

$$u_{2max} = \sqrt{\left(\frac{P_0}{k}\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right)\right)^2 + \left(\frac{\frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right)}{\omega_0}\right)^2}$$

$$u_{2max} = \frac{P_0}{k}\sqrt{\left(\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right)\right)^2 + \left(\frac{\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right)}{\omega_0}\right)^2}$$

Solution

Pour t_1=0,005 s ?.

$$u_{2max} = \frac{P_0}{k}\sqrt{\left(\left(-\cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1}\sin\omega_0 t_1\right)\right)^2 + \left(\frac{\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 \sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1}\cos\omega_0 t_1\right)}{\omega_0}\right)^2}$$

$$D = \frac{u_{2max}}{u_{stat}} = \frac{u_{2max}}{\frac{P_0}{k}} = \sqrt{\left(\left(-\cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1}\sin\omega_0 t_1\right)\right)^2 + \left(\frac{\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 \sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1}\cos\omega_0 t_1\right)}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}082} = 76{,}62\ rd/s \qquad \omega_0 t_1 = 2\pi\frac{t_1}{T} = 2\pi\, 0{,}061 = 0{,}383$$

$$D = \sqrt{\left(\left(-\cos 0{,}383 + \frac{1}{0{,}383}\sin 0{,}383\right)\right)^2 + \left(\frac{\left(-\frac{1}{0{,}005} + 76{,}62\sin 0{,}383 + \frac{1}{0{,}005}\cos 0{,}383\right)}{76{,}62}\right)^2}$$

$$D = 0{,}19$$

On peut aussi retrouver la valeur de « D » du graphe ?

Solution

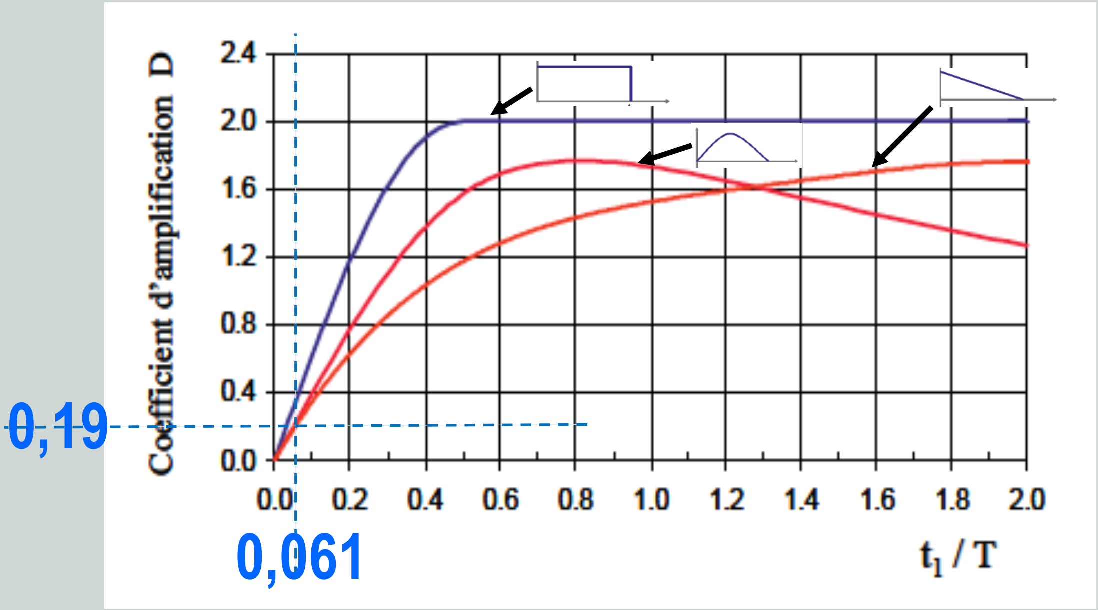
Notre cas

$u_{1max} = 3,75\ mm$

$F_{emax} = 6,565\ 10^6\ N$

Du spectre ?

$D = 0,19$



D'où :

$$u_{2max} = D.\frac{P_0}{k} = 0,19.\frac{5\ 10^6}{1,75\ 10^9} \qquad u_{2max} = 0,54\ mm$$

$$F_{emax} = k.u_{2max} = 1,75\ 10^9\ \ 0,54\ 10^{-3}$$

$$\boxed{F_{emax} = 0,945\ 10^6\ N}$$

Solution

Notre cas

Ainsi

Cas 1 : t_1 = 0,05 s

$$u_{1max} = 3,75\ mm$$

$$F_{emax} = 6,565\ 10^6\ N$$

Cas 2 : t_1 = 0,005 s

$$u_{2max} = 0,54\ mm$$

$$F_{emax} = 0,945\ 10^6\ N$$

En diminuant la durée de l'excitation, la force élastique a diminué de 85,60%.

Ainsi,

- **Le temps t_1 est déterminant pour les forces de rappel**
- **Pour une impulsion de très courte durée, une grande partie de la charge appliquée est absorbée par l'inertie de la structure et non pas par les forces de rappel, et les contraintes sont beaucoup plus faibles que celles correspondants à un chargement de plus longue durée.**

Merci. **Fin de l'Application 8**