Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 9

Vibrations forcées

Impulsion quelconque de très courte durée

Exemple 9 **Jeudi 04.01.2024**

Objectif

Le but de cette application est de calculer la réponse d’un système à un seul degré de liberté soumis à une excitation de type impulsive de très courte durée quelconque.

Etablissement des équations du mouvement

Rappel des méthodes numériques de calcul d’intégrale (Simple, Trapèze et Simpson)

Calcul de la réponse dynamique par les méthodes numériques.

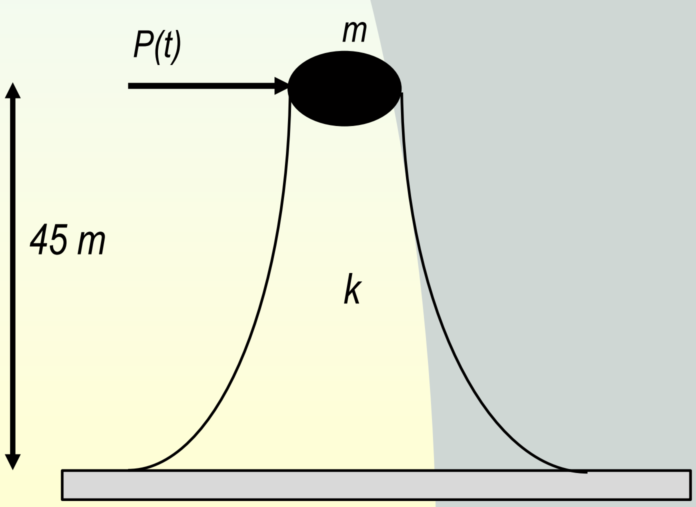
Exemple 1

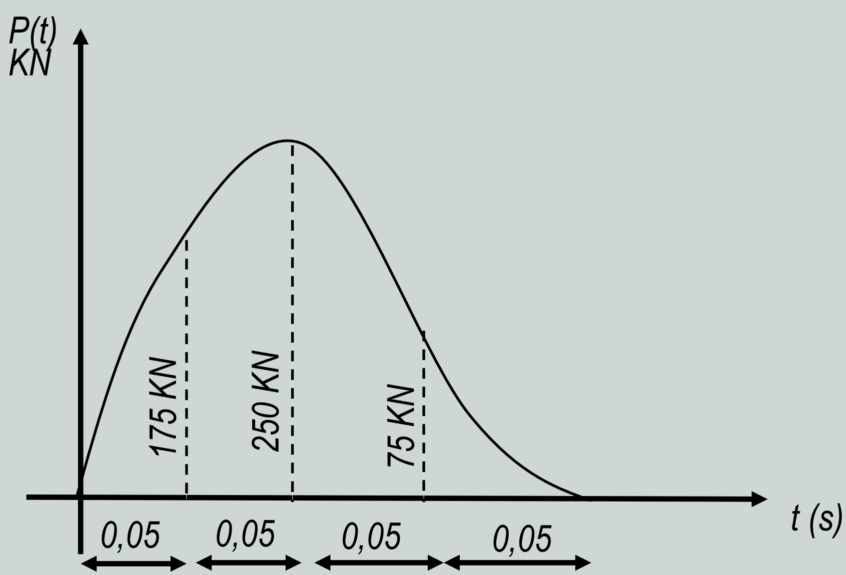
Soit le château d'eau de la figure ci-dessous pouvant être modélisé comme 1SSDDL ayant les caractéristiques suivantes :

m=700t ; k=7 10^6 N/m et $\xi = 0$

A la suite d'une explosion, l'ouvrage est soumis à une charge dynamique dont l'histoire est représentée en figure 2.

Calculer approximativement le moment de renversement maximum à la base de la tour en utilisant la formule approchée de l'impulsion pour calculer le déplacement maximal et en calculant l'intégrale de l'impulsion à l'aide des différentes méthodes numériques (Sommation simple, méthode des trapèzes et méthode de Simpson)





Solution

Rappel (Voir chapitre 6 §2)

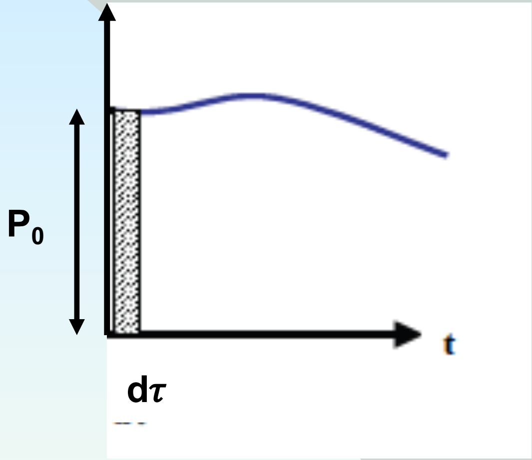
Excitation impulsive quelconque ?

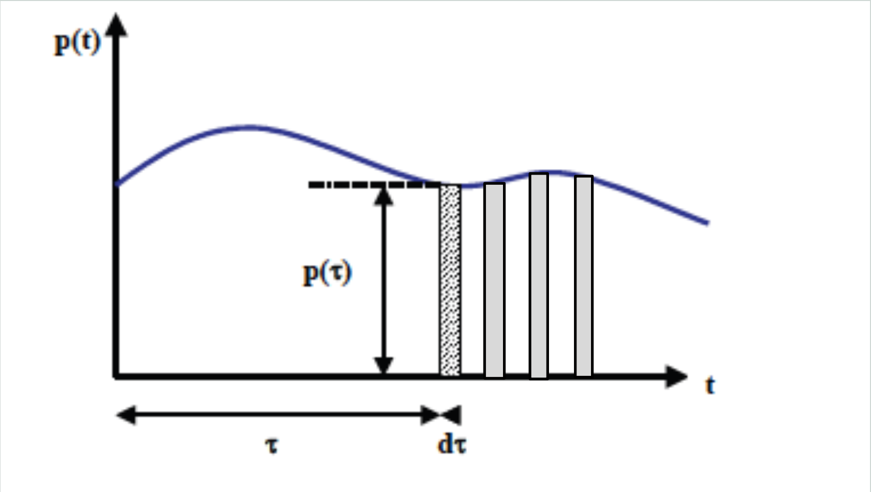
- Elle ne se répète pas dans le temps.
- Elle est de très courte durée.
- L'amortissement n'aura pas le temps de se développer durant l'excitation.
- Il y a toujours 02 phases: La 1ère le système est forcé par une excitation très courte et la 2ème le système est en oscillations libres due au déplacement et la vitesse finaux de la 1ère phase.
- Elle peut prendre des formes variées, Quelconque, sinusoïdale, triangulaire, rectangulaire…

Ex. Choc/Impact du à une collision, une explosion, joints du pont, parcs d'attraction...

Réponse à une impulsion de très courte durée quelconque

L'impulsion de très courte durée est montrée ci-dessous:

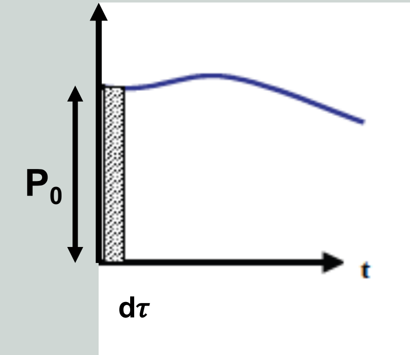




L'idée est que n'importe quelle force, elle peut être la somme de plusieurs impulsions de très courte durée p(τ) dτ

En calculant la réponse due à une seule impulsion, on peut retrouver la réponse totale par sommation, en utilisant le principe de superposition

Réponse à une impulsion de très courte durée



L'impulsion de très courte durée égale à P_0, à $t=t_0$

$$m\,\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \qquad \textbf{(1)}$$

Avec CI : $u(t) = \ddot{u}(0) = 0$

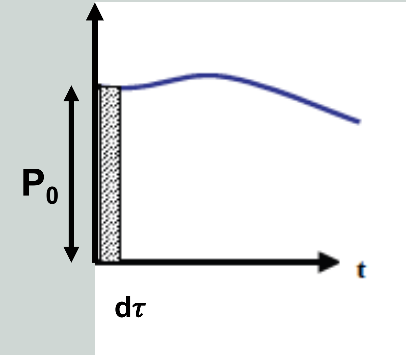
En intégrant sur un intervalle de temps « Δt » très court, et on prend la limite qd « $\Delta t \rightarrow 0$» on aura:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \big(m\,\ddot{u}(t) + ku(t)\big)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} p(t)dt \qquad \textbf{(2)}$$

Sachant que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \big(m\,\ddot{u}(t)\big)dt = \lim_{\Delta t \to 0} [m\dot{u}(t)]_0^{\Delta t} = m\dot{u}[0^{\,+}] \qquad \textbf{(3)}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \big(ku(t)\big)dt = 0 \qquad \textbf{(4)}$$



Posons

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} p(t)dt = \mathcal{I} \qquad (5)$$

En remplaçant (3) et (5) dans (2), on aura

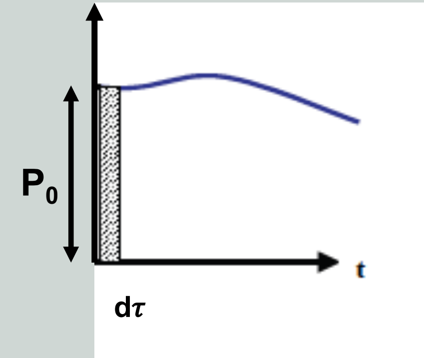
$$\mathcal{I} = m\dot{u}[0^{+}] \qquad (6)$$

D'où:

$$\dot{u}[0^{+}] = \frac{\mathcal{I}}{m} \qquad (7)$$

Soumettre un système à une impulsion «$\mathcal{I}$ » revient à lui communiquer une vitesse initiale $\dot{u}[0^{+}] = \frac{\mathcal{I}}{m}$ qui sera une condition initiale pour entamer la vibration (déplacement initial nul).

Réponse à une impulsion de très courte durée



$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} p(t)dt = \mathcal{J}$$

Après dτ, le système est en oscillation libre

$$u(t) = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$$

Avec: $u[\mathrm{d}\tau] = 0$ $\qquad \dot{u}[\mathrm{d}\tau] = \frac{\mathcal{J}}{m}$

En remplaçant, on aura

$$\boxed{u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_0} sin(\omega_0 t)} \qquad (8)$$

D'une manière générale, si l'impulsion «$\mathcal{J}$ » agit à « t= τ », on aura

Non amorti

$$\boxed{u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_0} sin(\omega_0 (t-\tau))} \qquad (9)$$

Si le système est amorti, on aura:

amorti

$$\boxed{u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} sin(\omega_a (t-\tau))} \qquad (10)$$

Calcul de $\mathcal{J}$?

Solution

Impulsion quelconque

Calcul de $\mathcal{I}$?

Souvent, le chargement est connu par des données expérimentales (cas par ex. des séismes, explosion,).

Dans ce cas, le calcul analytique de l'intégrale n'est pas possible.

Calcul d'une intégrale numériquement ?

$$\int_0^{t_1} p(t)dt = \mathcal{I}$$

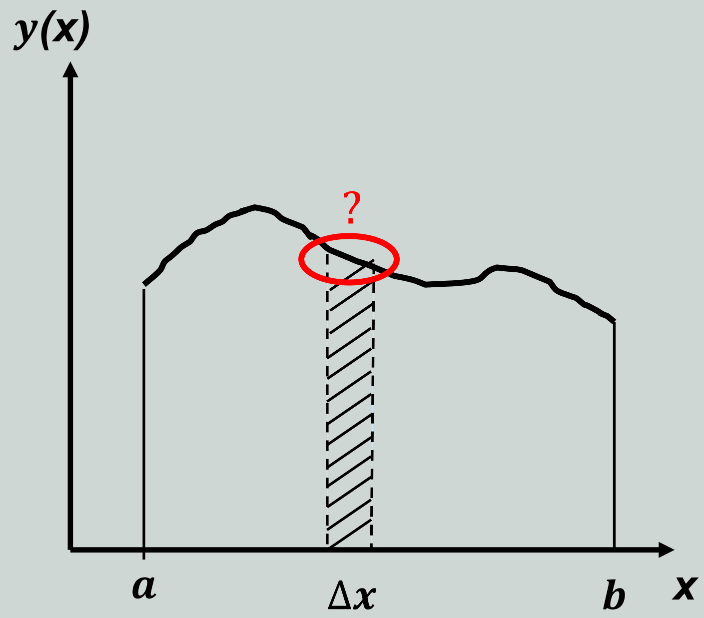
- **Méthodes numériques d'intégration**

→

- **Sommation simple**
- **Des trapèzes**
- **De Simpson**

Solution

Rappel

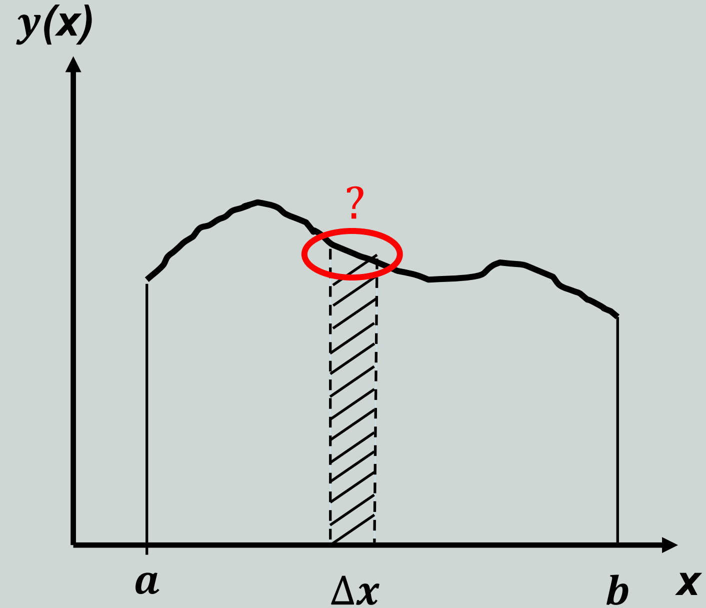


$$\int_a^{\mathbf{b}} y(x)dx = ?$$

Solution

1. Méthode de sommation simple

On suppose « y(x) » constante dans l'intervalle « Δx »



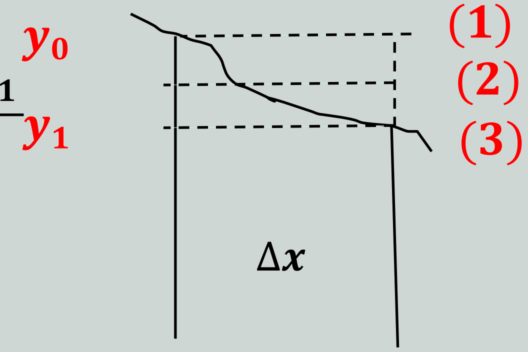
$$\int_a^b y(x)dx = \sum_1^n aires\ de\ tous\ les\ rectangles$$

$$\int_a^b y(x)dx = \Delta x\, y_0 + \Delta x\, y_1 + \Delta x\, y_2 + \cdots + \Delta x\, y_{n-1}$$

On suppose « Δx » constant.

$$\int_a^b y(x)dx = \Delta x\,(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

$$\frac{y_0 + y_1}{2}$$



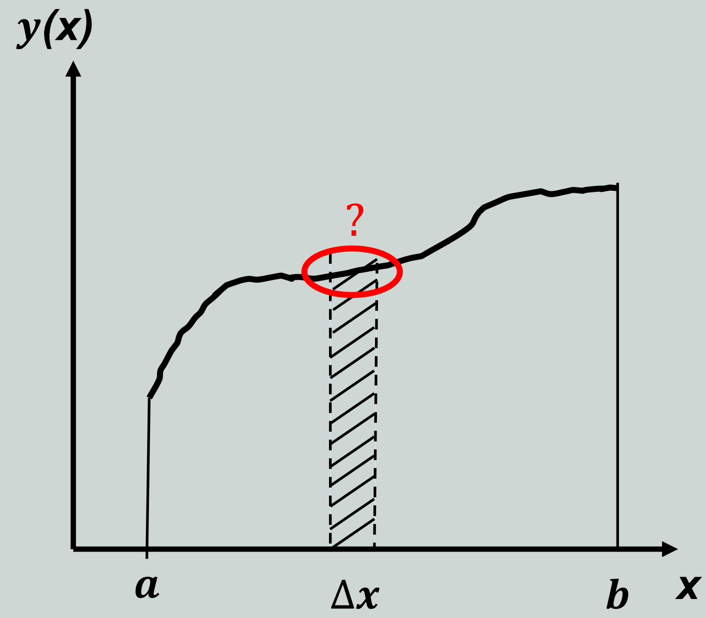
Or $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

D'où $$\int_a^b y(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

Solution

2. Méthode des trapèzes

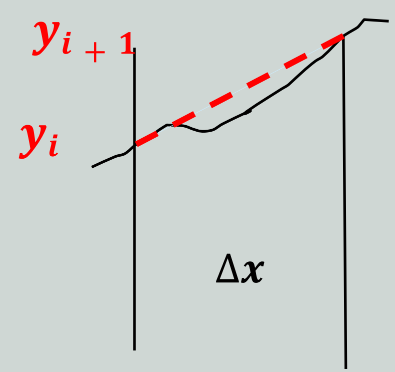
On suppose « y(x) » varie linéairement dans l'intervalle « Δx »



$$\int_a^b y(x)dx = \sum_1^n aires\ des\ trapèzes$$

Or
$$Aire\ trapèze = \frac{1}{2}\Delta x\,(y_i + y_{i+1})$$

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}\Delta x\,(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\Delta x\,(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{1}{2}\Delta x\,(y_{n-1} + y_n)$$



$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}\Delta x\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

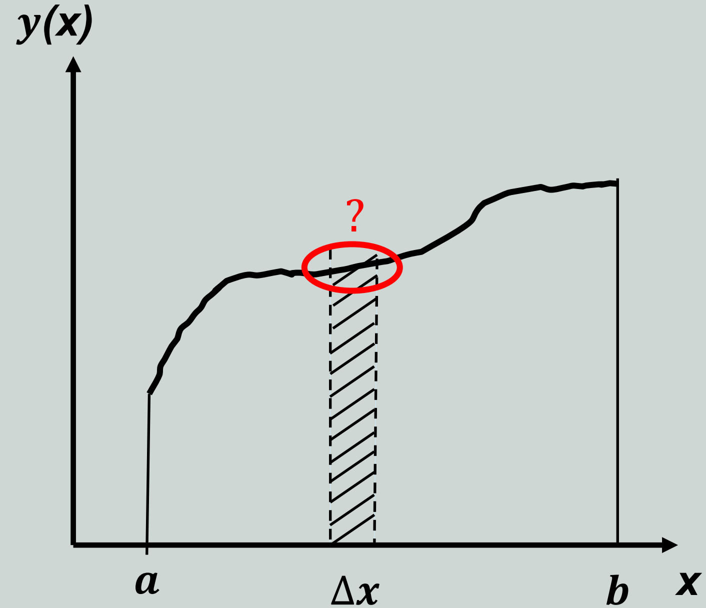
Or
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

D'où
$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Solution

3. Méthode de Simpson

On suppose « y(x) » varie de façon parabolique dans l'intervalle « Δx »



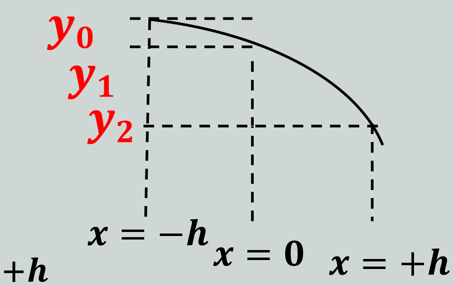
On aura besoin de 03 points pour définir une parabole

Or, éq. De la parabole $y(x) = Ax^2 + Bx + C$

Avec en x= -h ; $y(-h) = y_0 = Ah^2 - Bh + C$

en x=0 ; $y(0) = y_1 = +C$

en x= +h ; $y(h) = y_2 = Ah^2 + Bh + C$



$$\int_{-h}^{+h} y(x)dx = \int_{-h}^{+h} (Ax^2 + Bx + C)dx = A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\Big]_{-h}^{+h}$$

D'où $$\int_{-h}^{+h} y(x)dx = \frac{h}{3}(2\,A\,h^2 + 6\,C)$$

Solution

3. Méthode de Simpson

Or
$$\begin{cases} \text{en } x= -h \text{ ; } y(-h) = y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ \text{en } x=0 \text{ ; } y(0) = y_1 = +C \\ \text{en } x= +h \text{ ; } y(h) = y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$

D'où $C = y_1$ et $A = \dfrac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$

En remplaçant
$$\int_{-h}^{+h} y(x)dx = \frac{h}{3}(2\,A\,h^2 + 6\,C)$$

$$\int_{-h}^{+h} y(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_1^n aires\ de\ toutes\ les\ paraboles$$

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

D'où
$$\boxed{\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)}$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ n : entier pair

Solution Notre cas

i. Moment de renversement. $m=700t$; $k=7\ 10^6$ N/m

Méthode approchée

Non amorti $$u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_0} sin(\omega_0(t-\tau)) = \frac{1}{m\omega_0}\left(\int_0^{t_1} p(t)dt\right) sin(\omega_0\bar{t})$$

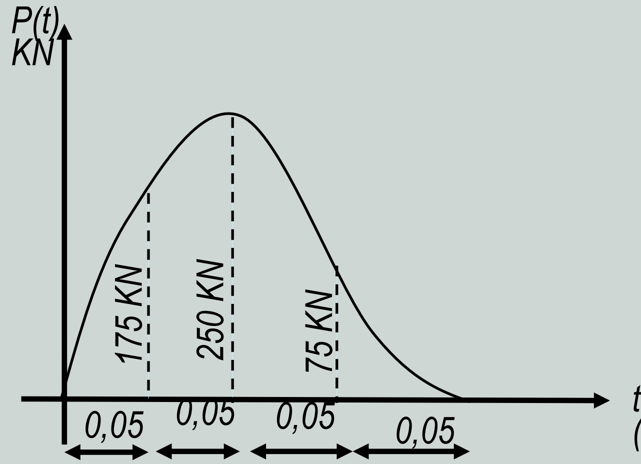
Or :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{7\ 10^6}{7\ 10^5}} = 3{,}16\ rd/s$$

Calculons par les différentes méthodes numériques, en utilisant le graphe de l'excitation

$$\int_0^{t_1} p(t)dt\ ?$$

Solution 1. Sommation simple



$$\int_a^b P(t)dt = \frac{b-a}{n}(P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1})$$

D'où :

$$\int_a^b P(t)dt = 0,05(0 + 175 + 250 + 75 + 0) = 25\ 10^3$$

$$u(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega_0}\left(\int_0^{t_1} p(t)dt\right) sin(\omega_0 \bar{t}) = \frac{1}{7\ 10^5\ 3,16}\ 25\ 10^3\ sin(3,16\bar{t})$$

$$= 0,0113\ sin(3,16\bar{t})$$

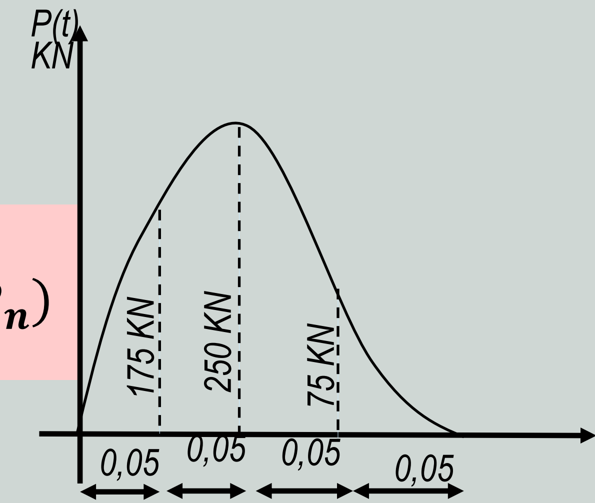
$$u_{max} = 0,0113\ m$$

$$F_{emax} = k.u_{max}$$ et $$M_{0max} = F_{emax}\ h = k.u_{max}\ h$$

$$M_{0max} = 7\ 10^6\ x\ 0,0113\ x\ 45$$

$$\boxed{M_{0max} = 3559,5\ KN.m}$$

Solution 2. Des trapèzes



$$\int_a^b P(t)dt = \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(P_0 + 2P_1 + 2P_2 + \cdots + 2P_{n-1} + P_n)$$

D'où :

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{1}{2}0,05(0 + (2x175) + (2x250) + (2x75) + 0)$$
$$= 25\ 10^3$$

$$u(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega_0}\left(\int_0^{t_1} p(t)dt\right) sin(\omega_0\bar{t}) = \frac{1}{7\ 10^5\ \ 3,16}\ 25\ 10^3\ sin(3,16\bar{t})$$
$$= 0,0113\ sin(3,16\bar{t})$$

$$u_{max} = 0,0113\ m$$

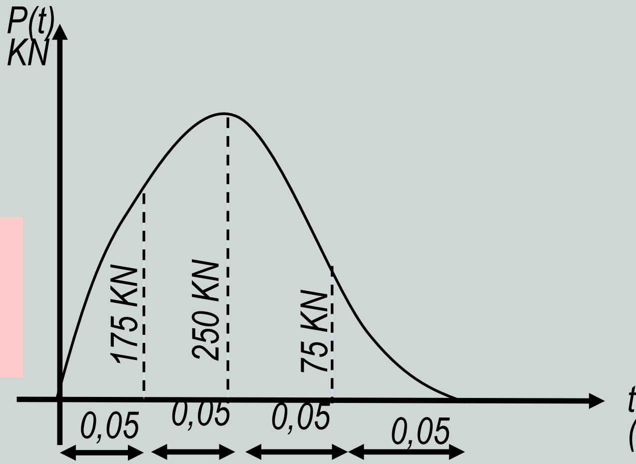
$$F_{emax} = k.u_{max}$$ et $$M_{0max} = F_{emax}\ h = k.u_{max}\ h$$

$$M_{0max} = 7\ 10^6\ x\ 0,0113\ x\ 45$$

$$M_{0max} = 3559,5\ KN.m$$

Solution

3. Simpson



$$\int_a^b P(t)dt = \frac{h}{3}(P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + \cdots + 4P_{n-1} + P_n)$$

D'où :

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{0,05}{3}(0 + (4x175) + (2x250) + (4x75) + 0)$$

$$= 25\ 10^3$$

$$u(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega_0}\left(\int_0^{t_1} p(t)dt\right) sin(\omega_0\bar{t}) = \frac{1}{7\ 10^5\ 3,16}\ 25\ 10^3\ sin(3,16\bar{t})$$

$$= 0,0113\ sin(3,16\bar{t})$$

$$u_{max} = 0,0113\ m$$

$$F_{emax} = k.u_{max}$$ **et** $$M_{0max} = F_{emax}\,h = k.u_{max}\,h$$

$$M_{0max} = 7\ 10^6\ x\ 0,0113\ x\ 45$$

$$\boxed{M_{0max} = 3559,5\ KN.m}$$

Merci. Fin de l'Application 9