

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

E-mail: [abdellatif\\_megnounif@yahoo.fr](mailto:abdellatif_megnounif@yahoo.fr)

**Chap. 1**

**Introduction**

# OBJECTIFS

**Ce cours est destiné à aider les futurs ingénieurs et mastérants à poser les différentes équations régissant un problème de dynamique des structures en général en considérant un milieu continu. A la fin du cours, les étudiants seront capables de:**

- ❖ Pouvoir définir les équations de mouvement des structures à 01 seul degré de liberté soumises à une force dynamique.**
- ❖ Pouvoir résoudre ces équations, en fonction du type de la force dynamique appliquée : harmonique, périodique, impulsion et quelconque, et en fonction de la présence ou non de l'amortissement.**
- ❖ Pouvoir tracer une réponse dynamique dans le temps et déterminer la réponse maximale d'une structure.**
- ❖ De combiner l'effet statique avec l'effet dynamique maximal.**
- ❖ Généraliser le comportement dynamique aux structures à plusieurs degrés de liberté. Poser les systèmes d'équations de base et les résoudre.**
- ❖ De s'initier aux règles parasismiques et au calcul parasismique des structures de génie civil.**

# STRUCTURE DU COURS

## Première Partie: Systèmes à 01 seul DDL

### 1. Introduction

- Objectifs de la DDS.
- Types de chargements.
- Modélisation et discrétisation.
- Réponse dynamique
- Méthodes de résolution

### 2. Formulation des équations du mouvement d'un systèmes à 01 seul DDL.

- Introduction.
- Formulation par le principe de D'Alembert.
- Formulation par le principe de Hamilton.
- Formulation par le principe des travaux virtuels.
- Influence des forces statiques
- Influence d'une excitation du support
- Modélisation des rigidités des systèmes à 01 DDL
- Types de comportement

### 3. Vibrations libres des systèmes à 01 DDL

- Introduction.
- Vibrations libres non amorties.
- Vibrations libres amorties.

### 4. Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL: **Excitation harmonique**

- Introduction.
- Vibrations forcées harmoniques non amorties.
- Vibrations forcées harmoniques amorties.
- Applications pratiques
  - Instruments de mesures vibratoires (Accéléromètre et vibromètre)
  - Isolation vibratoire: Machine vibrante – Support fixe
  - Isolation vibratoire : Support vibrant
  - Mesure de l'amortissement



## 5. Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL: **Excitation Périodique, en échelon, Impulsive**

- Introduction.
- Principe de superposition
- Réponse d'un S1DDL à une excitation périodique
- Réponse d'un S1DDL à une excitation en échelon
- Réponse d'un S1DDL à une excitation impulsive

## 6. Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL: **Excitation Quelconque**

- Introduction.
- Réponse à une impulsion de très courte durée
- Réponse d'un S1DDL à une excitation quelconque. **Intégrale de Duhamel**
- Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel
- Evaluation numérique de la réponse dynamique des SSDDL. **Méthode pas-à-pas.**



## 7. Notions de spectres de réponses

- Introduction
- Equation de mouvement avec excitation du support.
- Influence de la période et de l'amortissement
- Pseudo-accélération et pseudo-vitesse.
- Notion de spectre de réponse.
- Comment construire les spectres?
- Spectres de réponse normalisés, de calcul et réglementaire.



# STRUCTURE DU COURS

## Deuxième Partie: Systèmes à plusieurs DDL

### 8. Formulation des équations du mouvement d'un SPDDL

- Introduction.
- Equations de mouvement. Exemples introductifs.
- Développement des matrices M, C et K.

### 9. Mouvement libre non amorti des SPDDL

- Introduction.
- Méthode de la matrice de rigidité.
- Méthode de la matrice de flexibilité.
- Propriétés des modes propres.
  - Orthogonalité
  - Normalisation

# 10. Méthodes numériques de calcul des systèmes propres

- Introduction.
- Quelques propriétés des systèmes propres.
- Méthodes de résolution des systèmes propres.
  - Les méthodes d'itération vectorielle (inverse, directe, quotient de Rayleigh...)
  - Les méthodes de transformation (Jacobi, Householder-QR).
  - Les méthodes d'itération polynômiale (explicite, implicite).
  - Les méthodes basées sur la séquence de Sturm.
- Les méthodes de résolution des grands systèmes propres.
  - Recherche du déterminant
  - Méthode d'itération sur sous espace

# 11. Vibrations forcées des SPDDL

- Introduction.
- Méthode de superposition modale.
  - Notion de coordonnées principales (normales)
  - Découplage des équations
- Méthode pas-à-pas.
  - Introduction
  - Equations de mouvement incrémentales
  - Méthode de Wilson-  $\theta$
  - Méthode de Newmark-  $\beta$

## 12. Analyse spectrale des SPDDL

- Introduction.
- Réponse due à une excitation du support.
- Solution temporelle.
- Calcul des efforts.
- Calcul des valeurs maximales de la réponse



# BIBLIOGRAPHIE

1. R. W. Clough & J. Penzien, « **Dynamique des structures** », Tome 1, Principes fondamentaux, traduit de l'anglais par J. L. Claudon. Collection scientifique de l'IPSI.
2. A. Pecker,, « **dynamique des structures et des ouvrages**» Ecole nationale des ponts et chaussées. Edition 2006.
3. M. Albiges, « **Calcul dynamique des structures en zone sismique** » Edition, Eyrolles, 1982.
4. Cours « **Earthquake engineering** » Prof M. Saatcioglu. Ottawa, 1986.
5. L. Meirovitch, « **Elements of vibration analysis** », Mc Graw Hill, 1975.
6. M. Paz & W. Leigh, « **Structural Dynamics. Theory and computation** » Fifth edition, Springer science+Business media New York, 2004



# 1. Objectifs de la DDS

La DDS partie de la **mécanique** des structures.

Etude des contraintes et déplacements d'une structure soumise à un chargement **dynamique**.

Un chargement dynamique: charge dont **l'intensité**, la **direction** et le **point d'application** varient avec **le temps**.

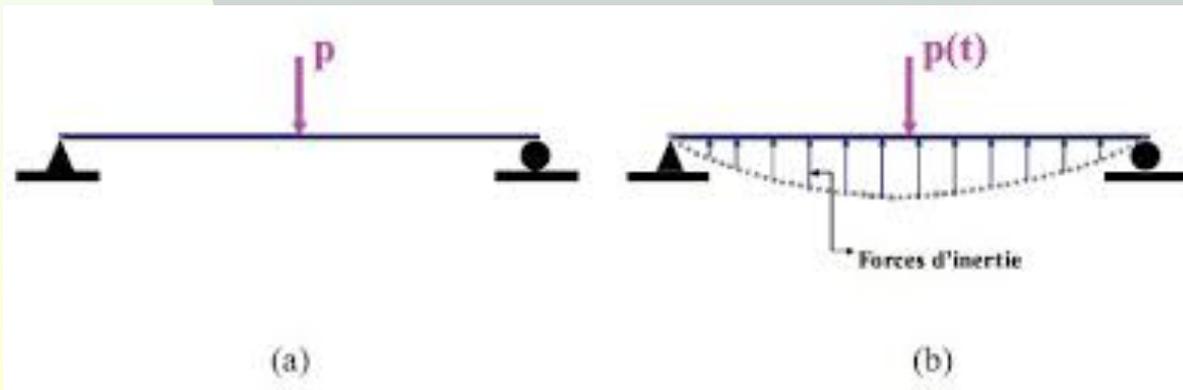
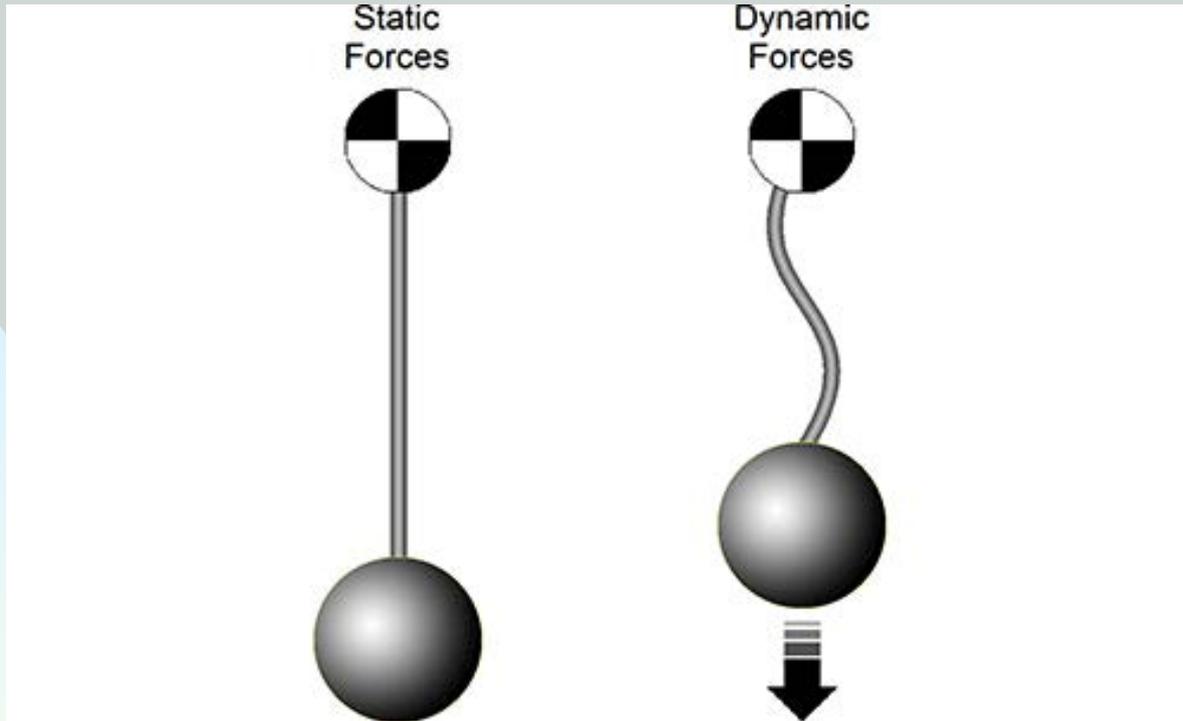
Résultat: la **réponse** exprimée en déplacements et/ou en contraintes varie avec le **temps**.

Un chargement statique est un cas particulier d'un chargement dynamique.

Cas des structures linéaires: Séparer les composantes statiques et dynamiques du chargement appliqué.

## Objectifs de la DDS

<b>Problème dynamique</b>	<b>Problème statique</b>
Forces internes sont équilibrées non seulement par les forces externes mais aussi par les forces d'inertie engendrées par l'accélération	Contraintes internes sont dues aux forces extérieures
Solutions obtenues pour toutes les valeurs de temps d'intérêt dans l'histoire de la réponse	Solution unique



## Objectifs

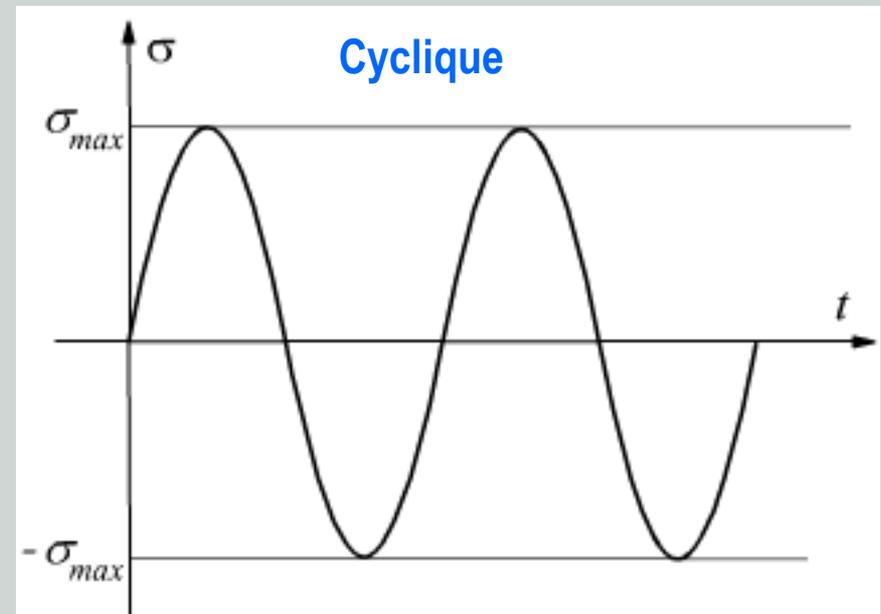
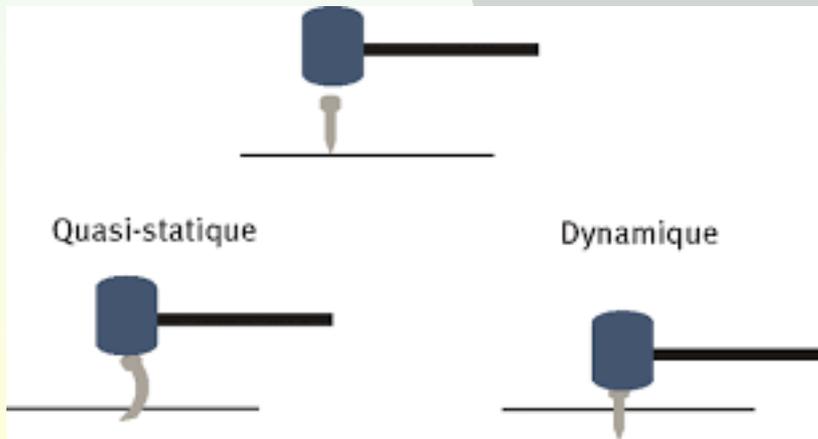
Mais ce n'est pas que le temps ? Il y a aussi les **forces d'inertie**, si elles sont significatives.

Cas particulier: Si la **vitesse** de chargement est **lentement variable**, l'accélération est faible et les forces d'inertie ne sont plus significatives.

On distingue alors:

- a) Phénomène dynamique** : Par exemple dans le cas de chute d'un missile. Présence importante des forces d'inertie.
- b) Phénomène dynamique alterné**: Cas des machines vibrantes posées sur une structure ou cas d'un séisme imposé.  $P(t)$  varie rapidement de façon croissante puis décroissante.

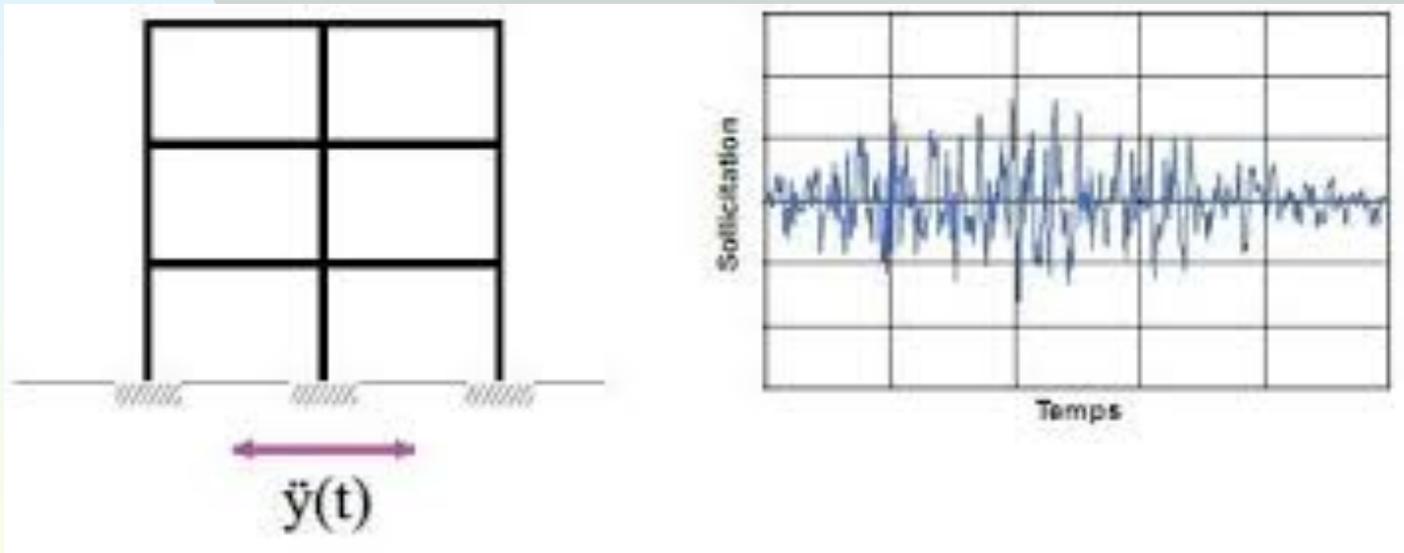
- c) Phénomène cyclique** : Par exemple l'action de la houle sur une plateforme offshore. Force  $P$  lentement croissante puis décroissante. Pas de force d'inertie.
- d) Phénomène quasi statique monotone**: Application d'une charge lentement croissante. Pas de forces d'inertie.



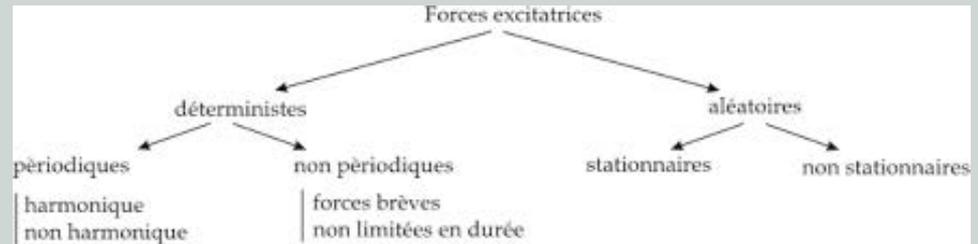
## 2. Types de chargement



# Exemple de chargement dynamique



## Types de chargement



Chargement classé en :

**Déterministe** : connu et défini par sa variation temporelle et spatiale.  $P(t) = f(t)$

**Aléatoire ou non déterministe** : N'est pas connu ou bien connu uniquement par sa valeur moyenne. Trafic ferroviaire ou routier, le vent..

## Types de chargement

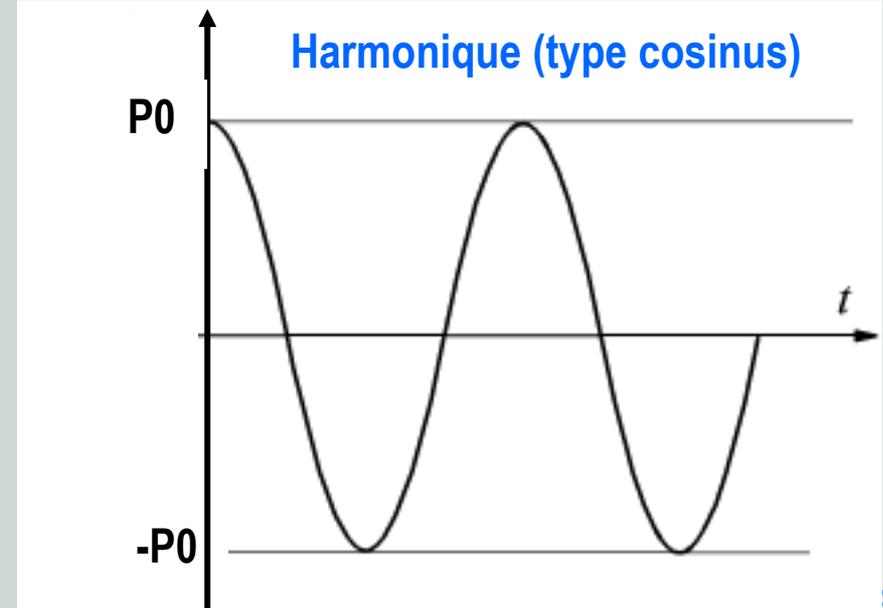
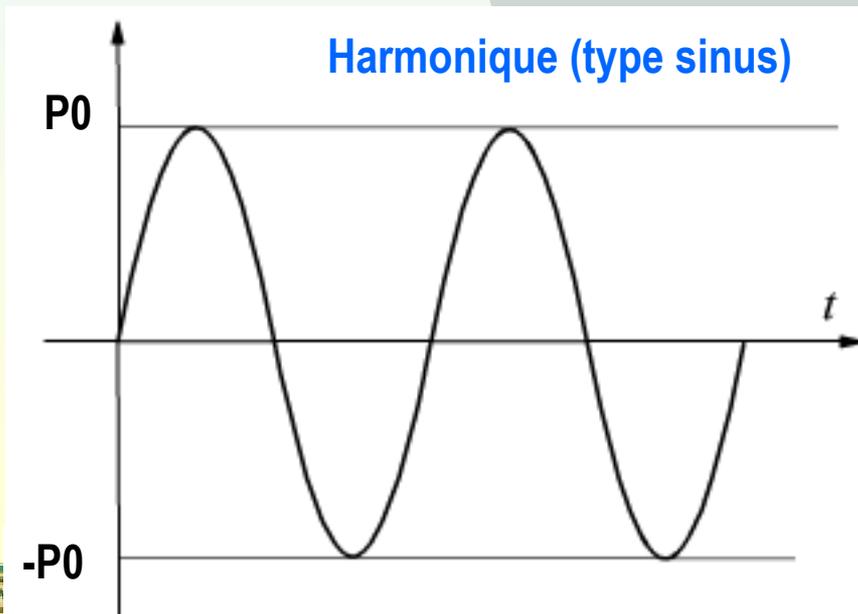
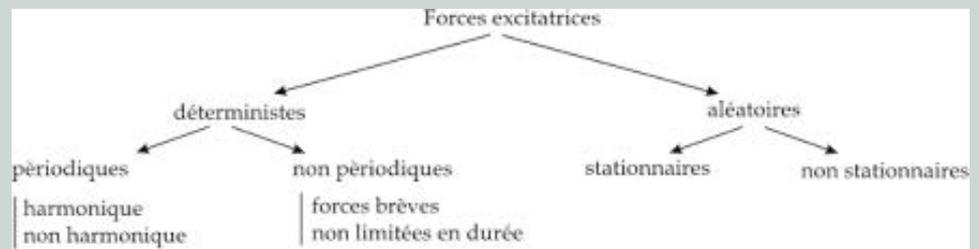
# 1. Déterministe

## a) Périodique

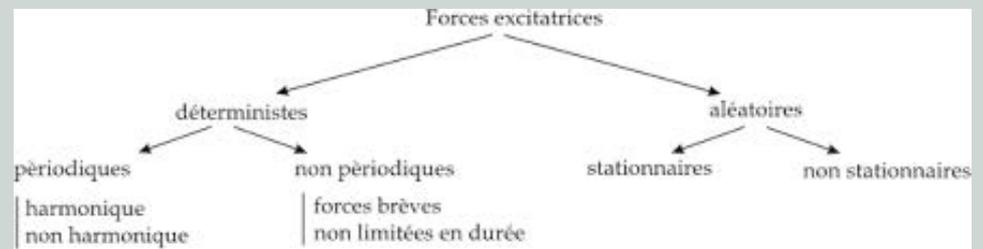
### i. Harmonique. Cas des machines tournantes.

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \text{ Ou Bien } P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$$

Ce chargement est aussi périodique (Se reproduit à l'identique après une période T.

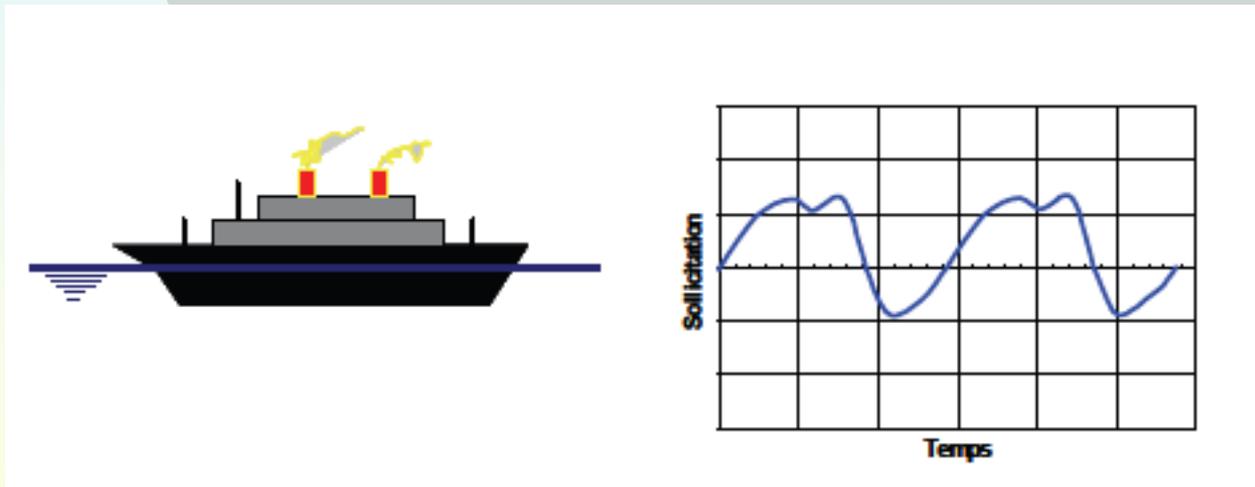


## Types de chargement



## ii. Périodique non Harmonique ou anharmonique.

Cas d'un propulseur de navire.



## Types de chargement

### 1. Déterministe

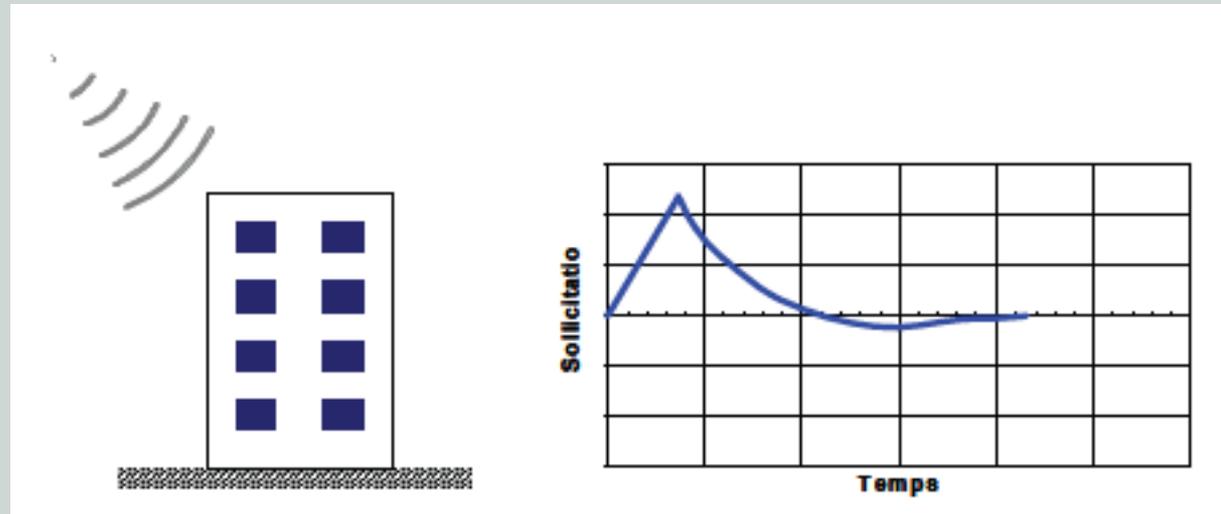
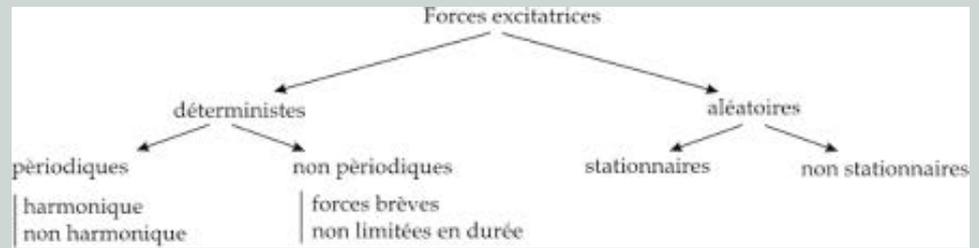
#### b) Non Périodique

i. **Impulsif**. Cas d'une onde de choc heurtant une structure.

De durée très faible (en regard de la période propre)

Ce chargement ne se reproduit pas à l'identique après une période  $T$ .

Défini uniquement par sa variation temporelle  $P(t) = f(t)$



## Types de chargement

### 1. Déterministe

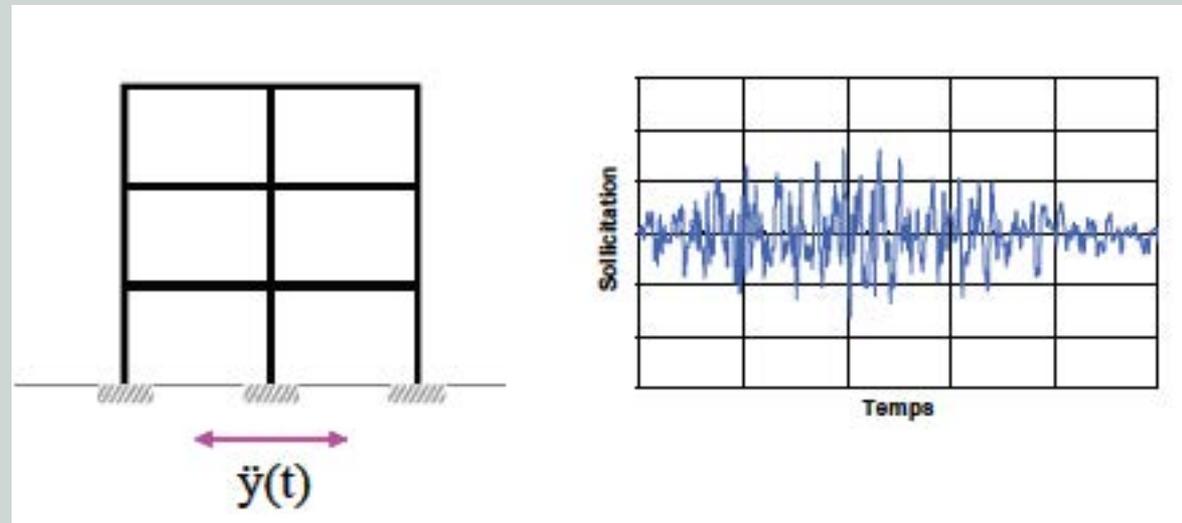
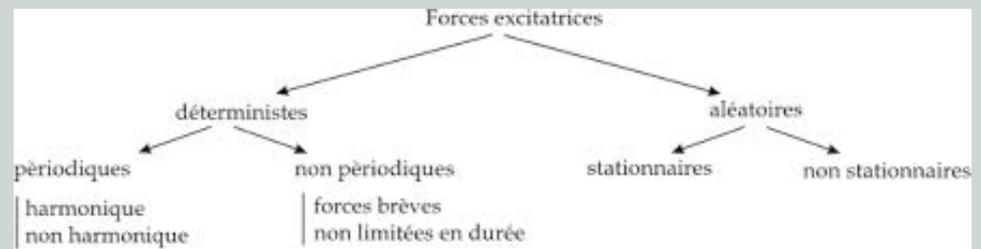
#### b) Non Périodique

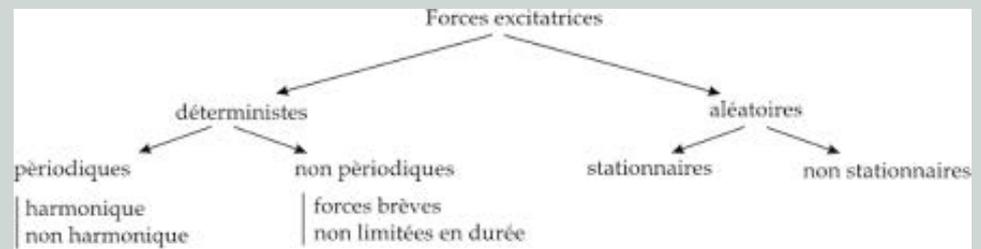
ii. **Entretenu.** Cas d'un séisme où l'accélération du sol est connue de façon déterministe.

Ce chargement est quelconque

De durée grande (en regard avec la période propre)

C'est une succession de plusieurs impulsions





## 2. Aléatoire ou non déterministe

**Stationnaire ou non stationnaire.** Cas du trafic ferroviaire ou routier, le vent...

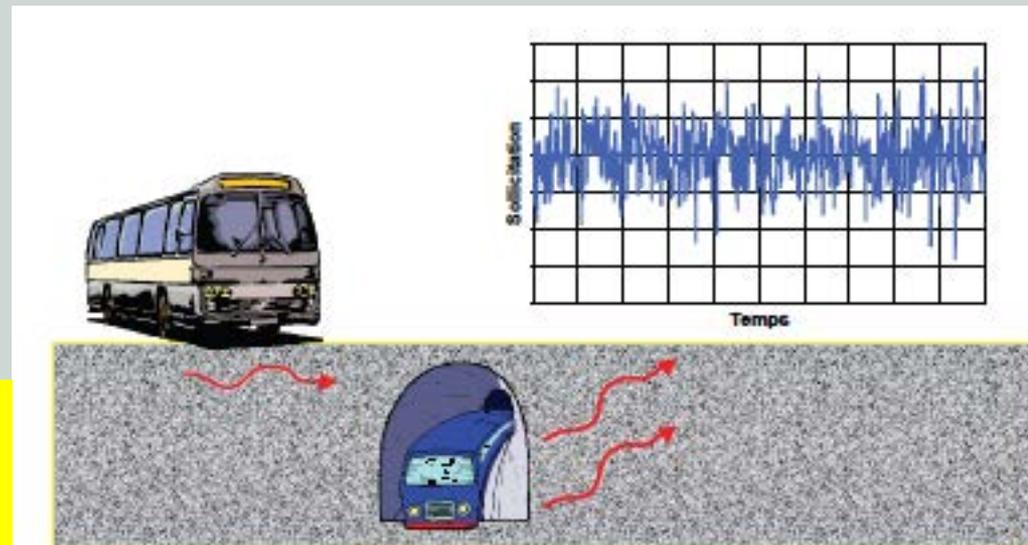
Ne sont pas connus de façon déterministe.

Sont généralement définis par leur valeur moyenne.

Par sa densité spectrale de puissance

$$DSP(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} y(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2}{2\pi\alpha}$$

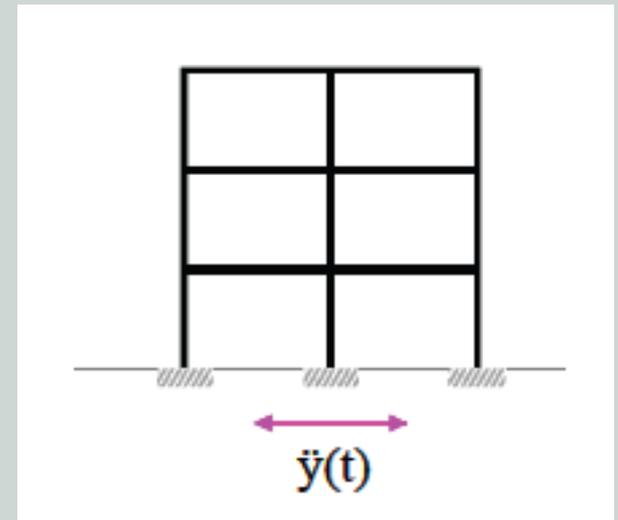
Domaine de la dynamique stochastique



### Cas particulier de la sollicitation du support

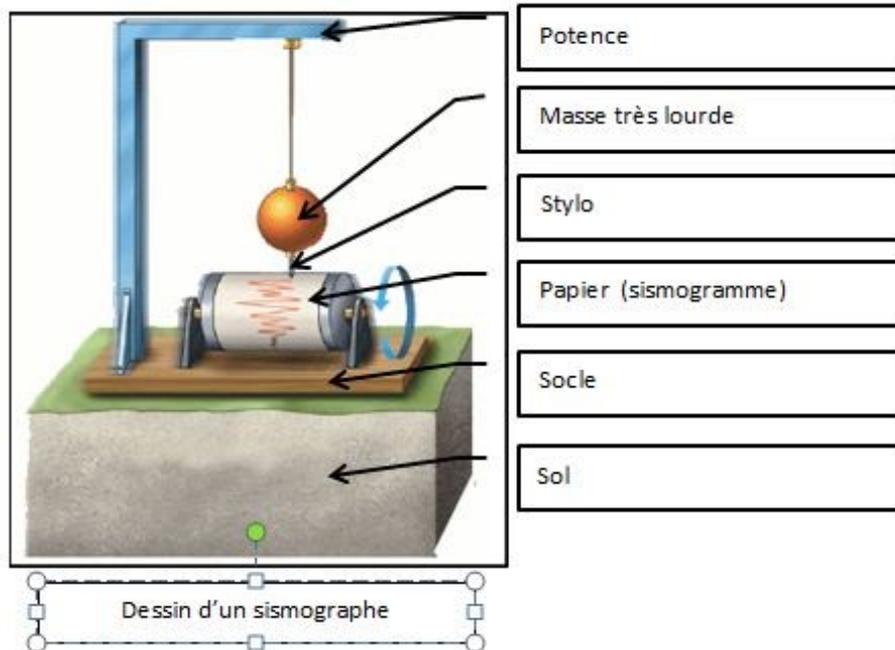
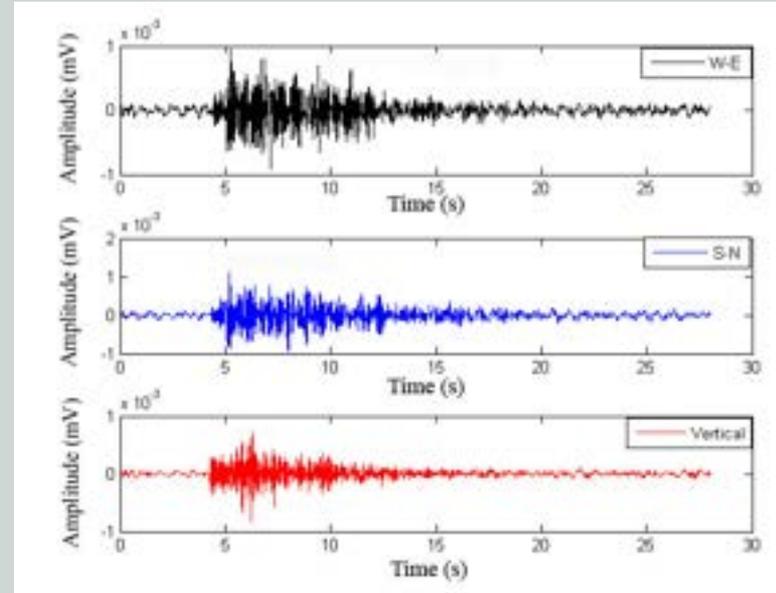
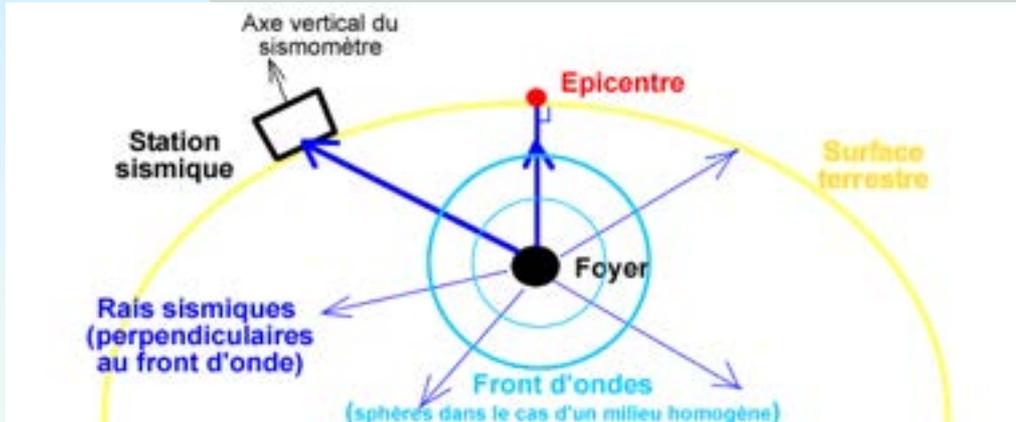
La sollicitation provient d'une rupture s'initiant dans le manteau terrestre, donnant naissance à des ondes qui se propagent dans le milieu et atteignent la surface du sol qui se manifestent par des vibrations dans les 03 directions de l'espace.

Récupération de ces vibrations par des appareils enregistreurs, **les sismographes** sous la forme d'accéléérations du sol en fonction du temps.



# Types de chargement

## Cas particulier de la sollicitation du support



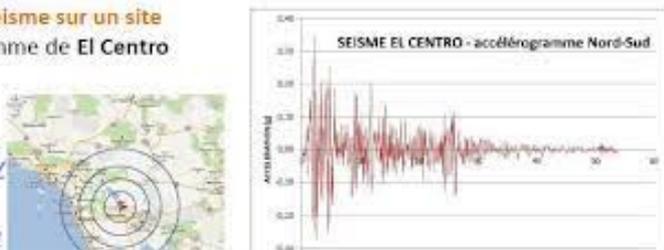
## Types de chargement

# Cas particulier de la sollicitation du support

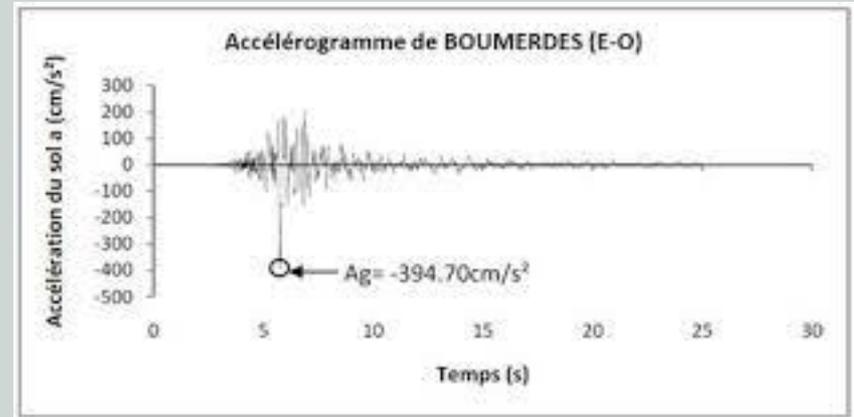
### El Centro, Californie, 18 Mai 1940

Caractérisation d'un séisme sur un site  
Exemple : accélérogramme de El Centro  
Californie  
18 mai 1940

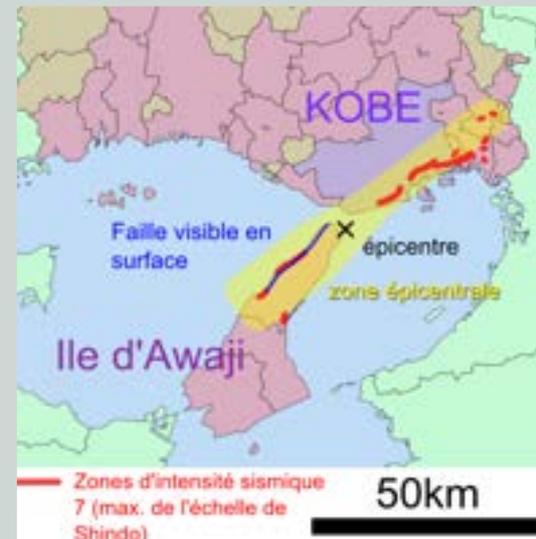
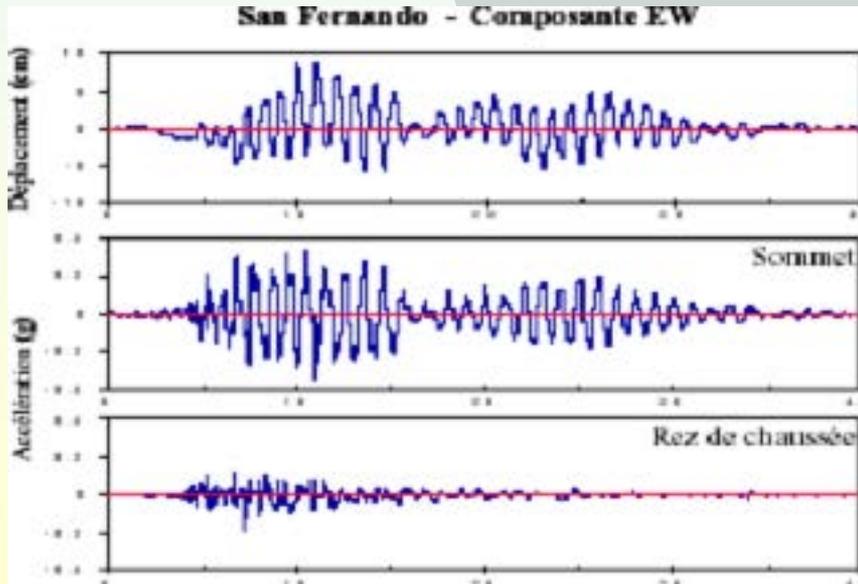
Données disponibles sur le site  
<http://www.vibrationsdata.com/elcentro.htm>  
Autres accélérogrammes sur  
<http://www.caee.uottawa.ca/P>



### Boumerdes, Mai 2003



### San Fernando, Californie, 9 février 1971



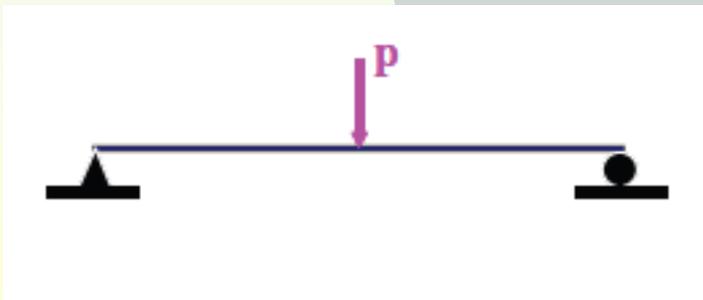
Kobe,  
17 Janvier  
1995

### 3. Modélisation et discrétisation

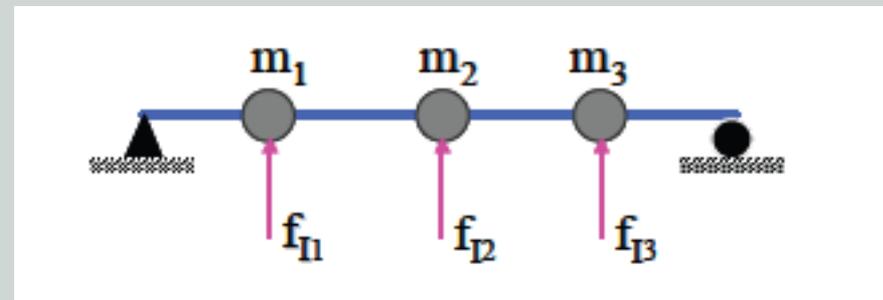
La modélisation permet de simplifier la solution en remplaçant la continuité par une approximation suffisante de la solution exacte.

On distinguera les modèles continus et les modèles à paramètres discrets.

Choix du modèle analytique dépend du comportement de la structure et de la précision voulue.



Modèle continu



Modèle à paramètres discrets

# Modélisation et discrétisation

02 approches:

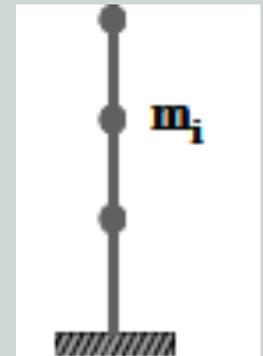
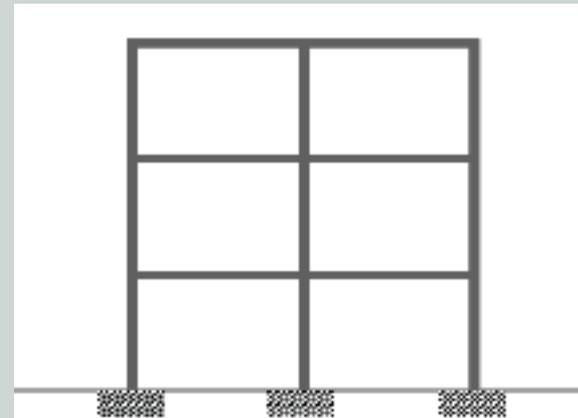
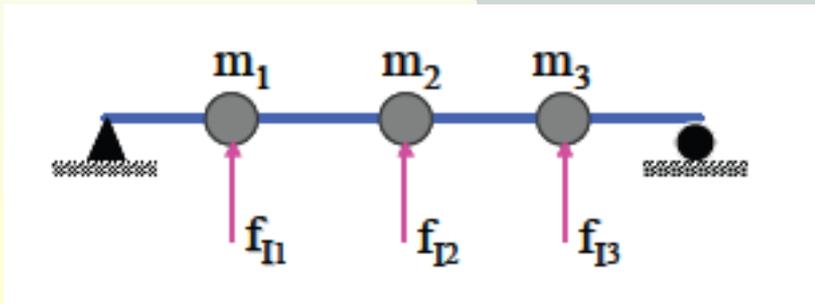
## 1. Modélisation en masses concentrées

Concentrer la masse en un nombre fini de points appelés nœuds.

Les forces d'inertie n'existent que dans ces points.

Exprimer les déplacements et accélérations uniquement aux nœuds de la structure.

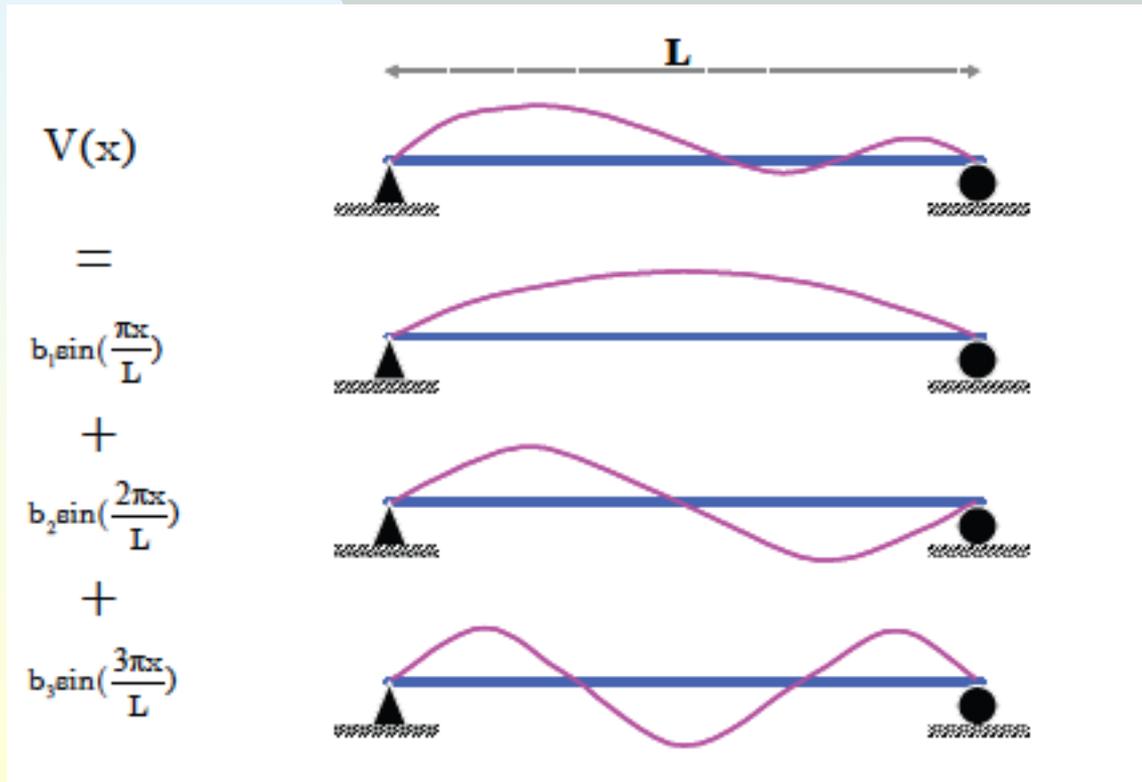
Définir la notion de degré de liberté (DDL).



# Modélisation et discrétisation

## 2. Déplacements généralisés

Hypothèse: la déformée de la structure représentée par la somme de fonctions représentant chacune une déformation possible du système.



Série  
trigonométriques

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

Ou autres  
vérifiant les CL

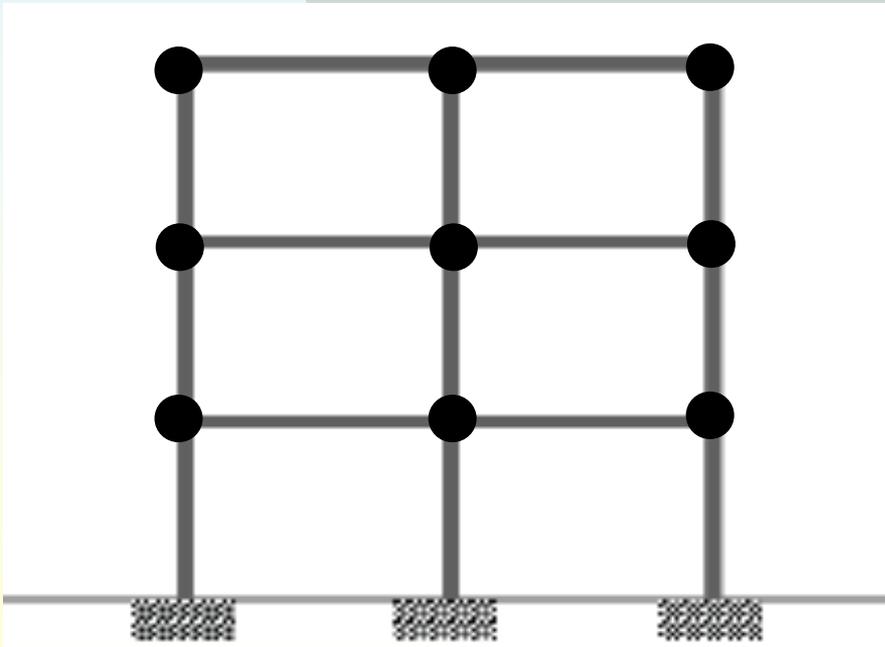
$$v(x) = \sum_n Z_n \psi_n(x)$$

## Modélisation et discrétisation

### Modélisation en éléments finis

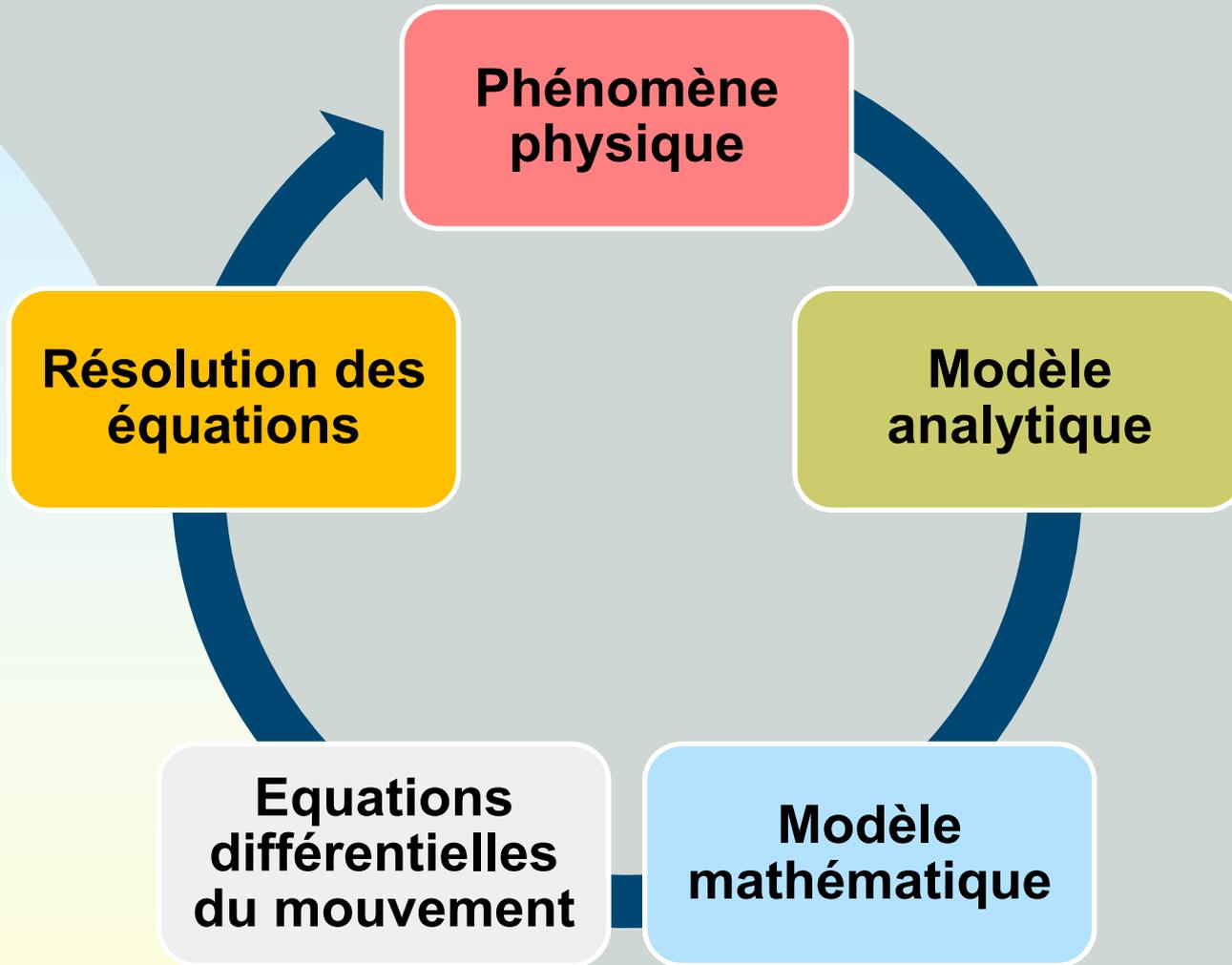
Chaque nœud peut avoir plusieurs DDL.

Très puissante mais gourmande



- Nœud qui peut avoir 06 DDL dans l'espace

Ainsi



## 4. Réponse dynamique

**On suppose que la structure répond de manière linéaire à la sollicitation extérieure.**

**C'est l'hypothèse des petites perturbations.**

**De plus, les matériaux sont supposés avoir des comportements linéaires, de type Loi de Hooke.**

**Cette linéarité peut s'accommoder de dissipation d'énergie, ce qui donne les phénomènes d'amortissement.**

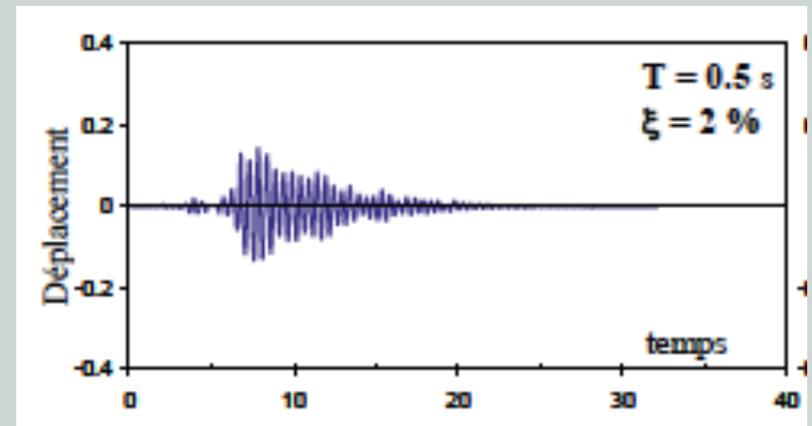
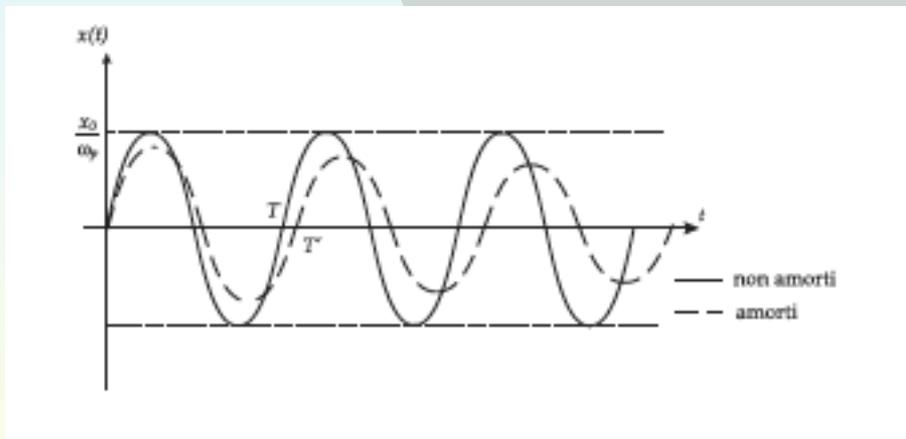
**Dans ce cours, on se limite aux mouvements vibratoires de faibles amplitudes.**

**La réponse intrinsèque (propre) restera indépendante du chargement qui s'exerce sur la structure.**

## Réponse dynamique

La résolution des équations différentielles obtenues par le modèle mathématique

C'est l'objectif de la DDS



Exemple de réponse en fonction du temps: système amorti et non amorti

$X_{\max} ???$

# 5. Méthodes de résolution

Le choix de la méthode dépend du :

- ✓ Comportement de la structure à étudier (linéaire ou non linéaire).
- ✓ Mode de définition de la sollicitation appliquée (temporelle, fréquentielle ou spectrale).

Souvent, les solutions analytiques sont complexes à obtenir, on utilise alors les méthodes numériques.

## 03 méthodes :

1. Intégration temporelle
2. Intégration fréquentielle
3. Intégration modale-spectrale.



### **a. *Intégration temporelle:***

- ✓ **La plus lourde et la plus générale.**
- ✓ **Intégrer pas à pas dans le temps les équations du mouvement.**
- ✓ **Généralement, la vitesse et le déplacement connus à « t », on calcule le nouvel état d'équilibre à « t+dt ».**
- ✓ **Applicable pour les systèmes linéaires et non linéaires.**
- ✓ **Nécessite la connaissance de la variation de la sollicitation au cours du temps.**

### **b. Intégration fréquentielle:**

- ✓ **Résolution dans le domaine fréquentielle.**
- ✓ **La sollicitation exprimée par sa transformée de Fourier.**
- ✓ **La résolution se fera pour chaque harmonique.**
- ✓ **La solution globale (transformée de Fourier inverse) est la superposition des solutions individuelles.**
- ✓ **Applicable uniquement pour les systèmes linéaires.**
- ✓ **Avec l'apparition des FFT (transformée de Fourier rapide), la méthode devient puissante.**
- ✓ **Bien adaptée aux problèmes d'interaction sol-structure ou fluide-structure.**
- ✓ **Fondamentale pour la dynamique stochastique.**

### **c. *Intégration modale-spectrale:***

- ✓ **La plus utilisée en dynamique des structures.**
- ✓ **Utilise une base de modes propres de vibration comme système de coordonnées généralisées.**
- ✓ **Découple les équations du mouvement et les transforme en équations différentielles découplées à N DDL.**
- ✓ **Quelques modes sont suffisants ( $p \ll N$ ) pour obtenir une bonne solution.**
- ✓ **Si on s'intéresse uniquement au max (le plus souvent) la solution sera défini par son spectre de réponse.**
- ✓ **Limitée aux systèmes linéaires.**

**Merci. Fin du chapitre 1**

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Prochain Cours**

**Chap. 2**

**Formulation des équations  
du mouvement d'un  
système à 01 seul DDL.**