Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 3

Vibrations libres des systèmes à 01 DDL

COURS 3 **Dimanche 09.10.2022**

1. Introduction

Rappel équation du mouvement

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Commençons par supposer p(t) = 0

- **Pas de force extérieure (Libre)**
- **Déplacement et/ou vitesse initiales connues (non nulles)**

Réponse

Vibration naturelle de la structure

- **Amortissement négligé: Mouvement harmonique (à fréquence constante) à la fréquence naturelle (Propre)**
- **Amortissement non négligé: Mouvement pseudo harmonique amorti**

2. Vibrations libres non amorties

On pose c=0 et p(t) = 0.

On aura:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \qquad (3.1)$$

Solution :

Soit

$$u(t) = \rho\cos(\omega_0 t - \theta) \qquad (3.2)$$

Ou bien :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad (3.3)$$

(3.2) et (3.3 sont les mêmes.

ρ, θ ou A, B : constantes à déterminer par les conditions initiales.

θ : Angle de déphasage entre la réponse et l'excitation

CI: généralement le déplacement initial « u_0 » et la vitesse initiale « $\dot{u}_0$ »

Divisons l'équation (3.1) par « m »:

On aura:

Solution :

$$\ddot{u}(t)+\frac{k}{m}u(t)=0$$

On pose

Ou bien : $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ **Ou** $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ **(3.4)**

Appelés pulsation propre du système.

On peut avoir alors:

La fréquence propre du système: $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ **(3.5)**

(cycles/s), Hertz

La période propre du système:

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{1}{f_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\quad \text{(s)}\qquad \textbf{(3.6)}$$

Supposons les CI : À t=0, $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

i. Forme 1

En utilisant (3.3) on aura:

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Et $$\dot{u}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Ainsi à t=0, on aura:

$$u(0) = A\,.1 + B\,.0 = u_0$$
$$\dot{u}(0) = -A\omega_0\,.0 + B\omega_0\,.1 = \dot{u}_0$$

La résolution de ces 02 équations nous donne:

$$A = u_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \qquad (3.7)$$

En remplaçant dans (3.3) on obtient la solution:

$$\boxed{u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)} \qquad (3.8)$$

Supposons les CI : À t=0, $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

ii. Forme 2

En utilisant (3.2) on aura:

$$\boldsymbol{u(t) = \rho\, cos(\omega_0 t - \theta)}$$

Et $$\dot{u}(t) = -\rho\omega_0\, sin(\omega_0 t - \theta)$$

Ainsi à t=0, on aura:

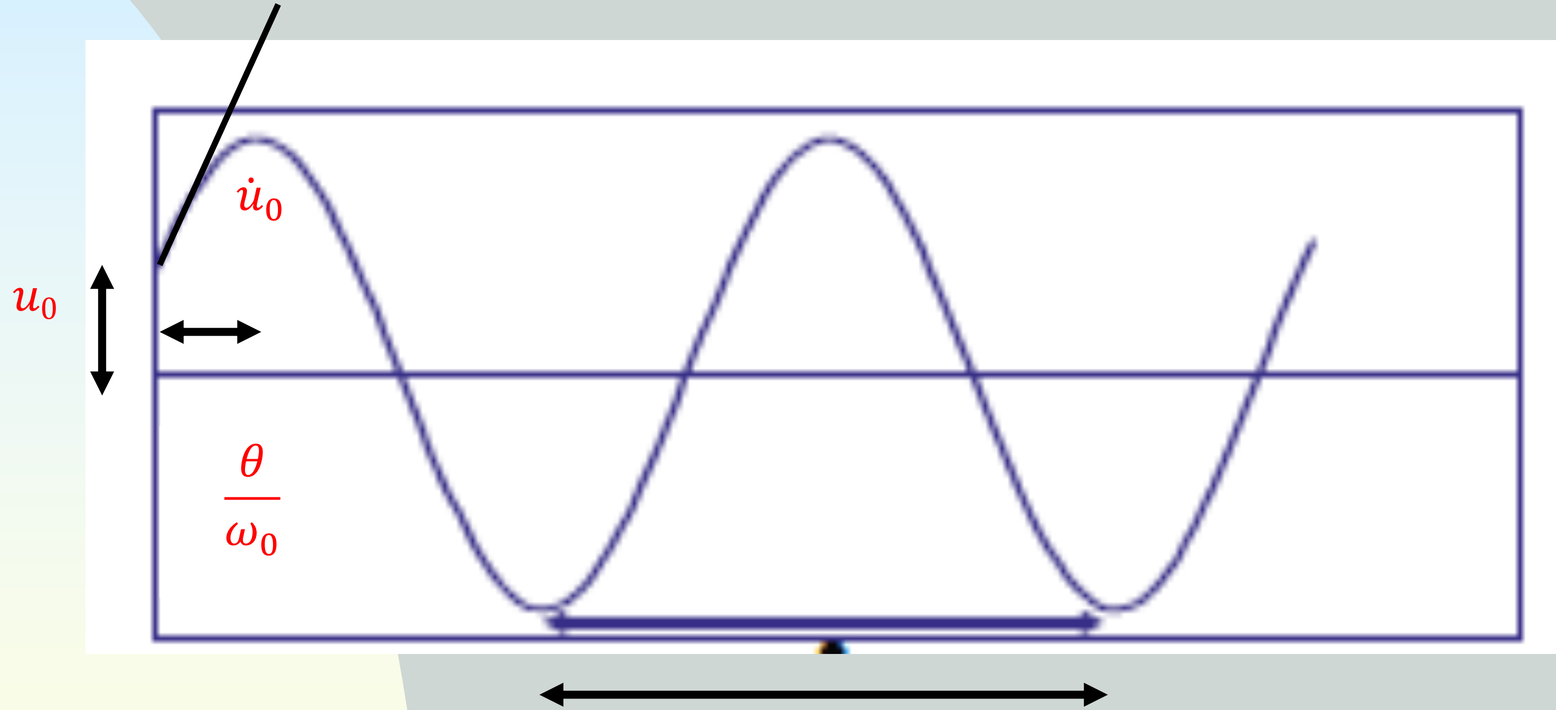
$$u(0) = \rho\, cos(-\theta) = u_0$$
$$\dot{u}(0) = -\rho\, \omega_0\, sin(-\theta) = \dot{u}_0$$

La résolution de ces 02 équations nous donne:

$$\rho^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{et} \quad tg\theta = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0 u_0} \qquad \textbf{(3.9)}$$

On aura :
$$\boxed{u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2}\; cos\left(\omega_0 t - arctg\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0 u_0}\right)\right)} \qquad \textbf{(3.10)}$$

En traçant cette solution (pour les 02 cas, c'est la même allure)



$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ni perte d'énergie, ni gain d'énergie. Le système oscille à énergie constante

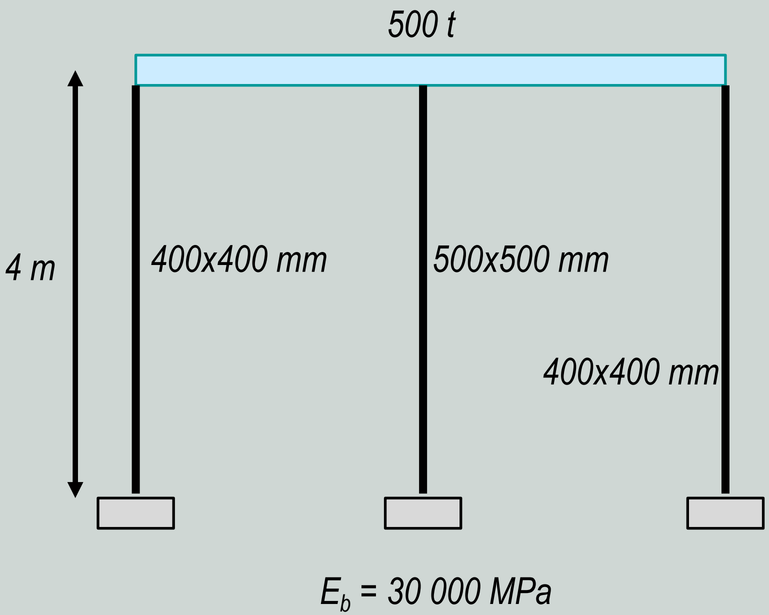
Exemple

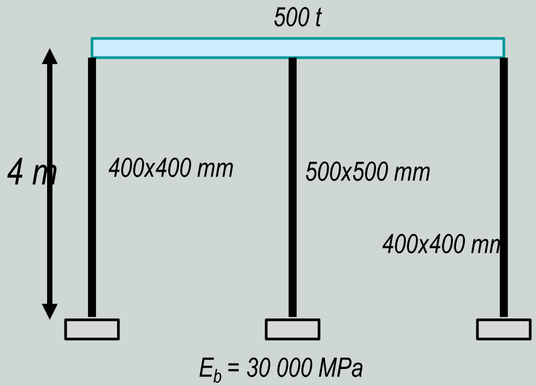
Considérons le portique en béton armé de la figure ci-contre avec les données mentionnées.

i) Calculer la période fondamentale du système

ii) Si le portique est déplacé par un gros vérin de 20 mm puis relâché instantanément pour un test de vibration libre. Déterminer le déplacement horizontal après 0.5 s

iii) Tracer la réponse du système.





i) Période fondamentale du système

Les poteaux encastré-encastré, d'où (voir chap 2)

$$k = 12\frac{EI}{H^3}$$

Avec $I = \frac{b.h^3}{12}$

A.N : $I_1 = \frac{400^4}{12} = 2.1\ 10^9\ mm^4$. Et $I_2 = \frac{500^4}{12} = 5.2\ 10^9\ mm^4$

Les poteaux sont en parallèles, d'où:

$$k_{eq} = 2.k_1 + k2 = 2\left(12\frac{EI_1}{H^3}\right) + \left(12\frac{EI_2}{H^3}\right) = 12\frac{E}{H^3}\,(2I_1 + I_2)$$

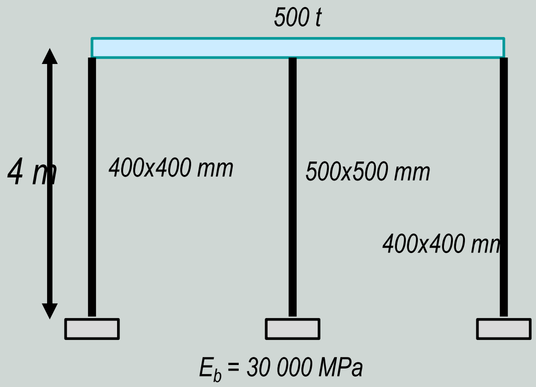
A.N : $k_{eq} = 5.29\ 10^4\,\frac{N}{mm}$

La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{5.29\ 10^2}{500\ 10^3}} = 10.28\ rd/s$

La fréquence propre : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1.63\ (1/s)$

La période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = 0.61\ s$

Vibrations libres non amorties



$u_0 = 20\ mm$

$\dot{u}_0 = 0$ **relâché instantanément**

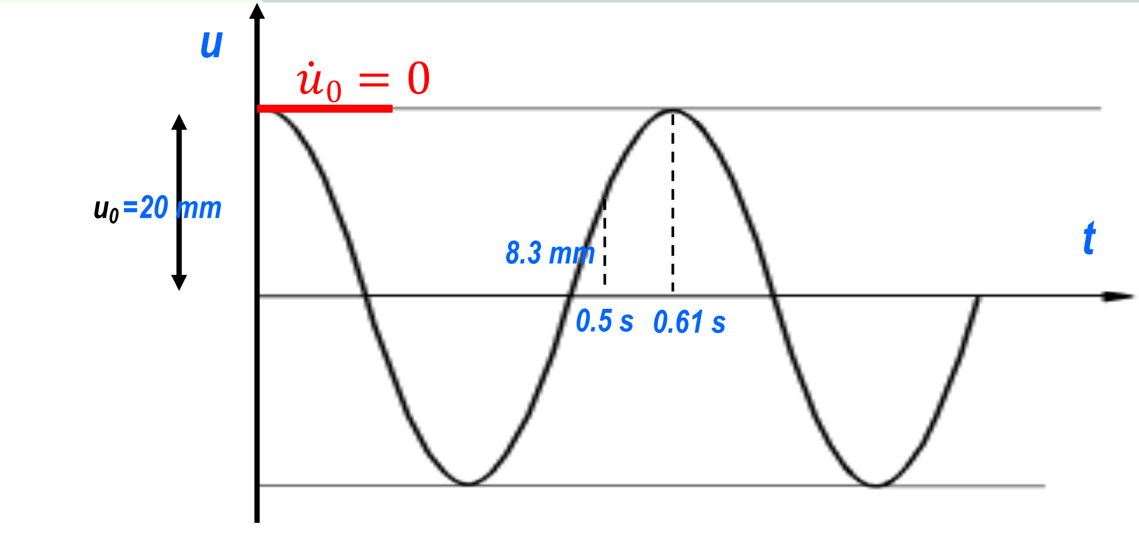
D'où $$\boldsymbol{u(t)} = u_0 \boldsymbol{cos(\omega_0 t)} + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \boldsymbol{sin(\omega_0 t)}$$

A.N : $$\boldsymbol{u(t)} = u_0 \boldsymbol{cos(\omega_0 t)}$$

Déplacement après 0.5 s :

$$\boldsymbol{u(0.5)} = 20\boldsymbol{cos(10.28\ X\ 0.5)}$$

$$\boldsymbol{u(0.5)} = 8.29\ mm$$



3. Vibrations libres amorties

On pose *$C \neq 0$* **et** *$p(t) = 0$*.

On aura: $$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \qquad (3.11)$$

Solution de type :

$$u(t) = D.e^{qt} \qquad (3.12)$$

On aura alors: $\dot{u}(t) = Dq.e^{qt}$ **et** $\ddot{u}(t) = Dq^2.e^{qt}$

En remplaçant dans l'équation du mouvement, on aura:

$$(mq^2 + cq + k)De^{qt} = 0$$

Soit : $(mq^2 + cq + k) = 0$. **(3.13)** **Puisque D doit être ≠0**

Il faut calculer le discriminant et voir son signe

Soit : $(mq^2 + cq + k) = 0$.

Le discriminant sera:

$$\Delta = c^2 - 4km \qquad \textbf{(3.14)}$$

Δ **Peut être positif, négatif ou nul**

Cas 1 (cas critique): $\Delta = 0$

$$\Delta = c^2 - 4km = 0$$

La valeur de « c » qui annule Δ est appelée amortissement critique. D'où

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\omega_0 m \qquad \textbf{(3.15)}$$

On définit le coefficient d'amortissement qui mesure l'amortissement réel par rapport à l'amortissement critique par:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\omega_0 m} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Soit : $(mq^2 + cq + k) = 0$.

Δ = *0* (ξ=1) , d'où l'équation admet une solution double.

$$q_{1,2} = -\xi\omega_0 = -\omega_0 \qquad (3.17)$$

La solution de l'équation de mouvement (3.11) sera:

$$\boldsymbol{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[A + B.t] = e^{-\omega_0 t}[A + B.t]} \qquad (3.18)$$

Avec les CI : $u(0) = u_0$ *et* $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

On aura :

$$\dot{u}(t) = \boldsymbol{e}^{-\omega_0 \boldsymbol{t}}[-\omega_0 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{1} - \omega_0 \boldsymbol{t})]$$

$u(0) = A = u_0$

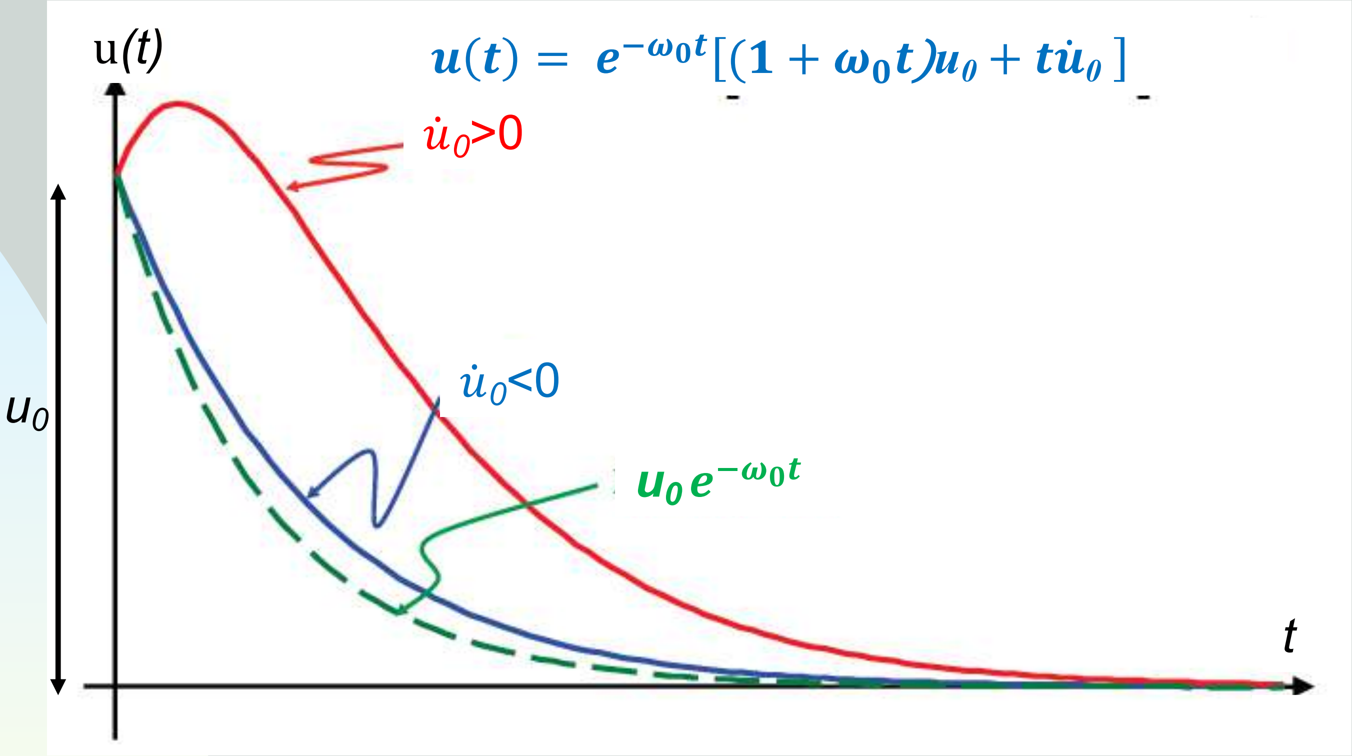
et $\dot{u}(0) = [-\omega_0 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}] = \dot{u}_0$

D'où: $A = u_0$ et $\mathbf{B} = \omega_0 u_0 + \dot{u}_0$

En remplaçant, on aura la solution:

$$\boxed{\boldsymbol{u(t) = e^{-\omega_0 t}[(1 + \omega_0 t)u_0 + t\dot{u}_0]}} \qquad (3.19)$$

Vibrations libres amorties (critique)



- Pas d'oscillations au cours du temps
- La masse a tendance à retrouver plus rapidement sa position d'équilibre
- L'amortissement critique correspondant à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations
- Ce phénomène n'est pas important en pratique

Graphe pris du cours de Vibrations de l'UPMC

Cas 2 (cas sous critique): $\Delta < 0$ ($\xi<1$)

Soit : $\left(mq^2 + cq + k\right) = 0$.

$\Delta < 0$ ($\xi<1$) **, d'où l'équation admet 02 solutions.**

$$q_{1,2} = \frac{-c \pm i\sqrt{4km - c^2}}{2m} = \omega_0\left(-\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad \textbf{(3.20)}$$

On pose :

$$\omega_a = \omega_0\left(\sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad \textbf{Pulsation amortie} \quad \textbf{(3.21)}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad \textbf{Période amortie} \quad \textbf{(3.22)}$$

La solution de l'équation de mouvement (3.11) sera du type:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[G_1 e^{i\omega_a t} + G_2 e^{-i\omega_a t}\right] \quad \textbf{(3.23)}$$

En utilisant l'équation d'Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta \quad \text{et.} \quad e^{-i\theta} = cos\theta - i\, sin\theta$$

La solution sera $\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[\left(A\, cos\omega_a t + B\, sin\omega_a t\right)\right]}$ **(3.24)**

Vibrations libres amorties

Cas 2 (cas sous critique): $\Delta < 0$ ($\xi<1$)

Avec les CI :

On aura : $u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t)]$

$$\dot{u}(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(-\xi\omega_0 A + B\omega_a)\cos\omega_a t - (A\omega_a + \xi\omega_0 B)\sin\omega_a t]$$

$u(0) = A = u_0$

et $\dot{u}(0) = [-\xi\omega_0 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\omega_a] = \dot{u}_0$

D'où: $A = u_0$ **et** $B = \dfrac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_a}$

En remplaçant, on aura la solution:

$$\boxed{\boldsymbol{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[\left(u_0\cos\omega_a t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_a}\sin\omega_a t\right)\right]}} \quad \textbf{(3.25)}$$

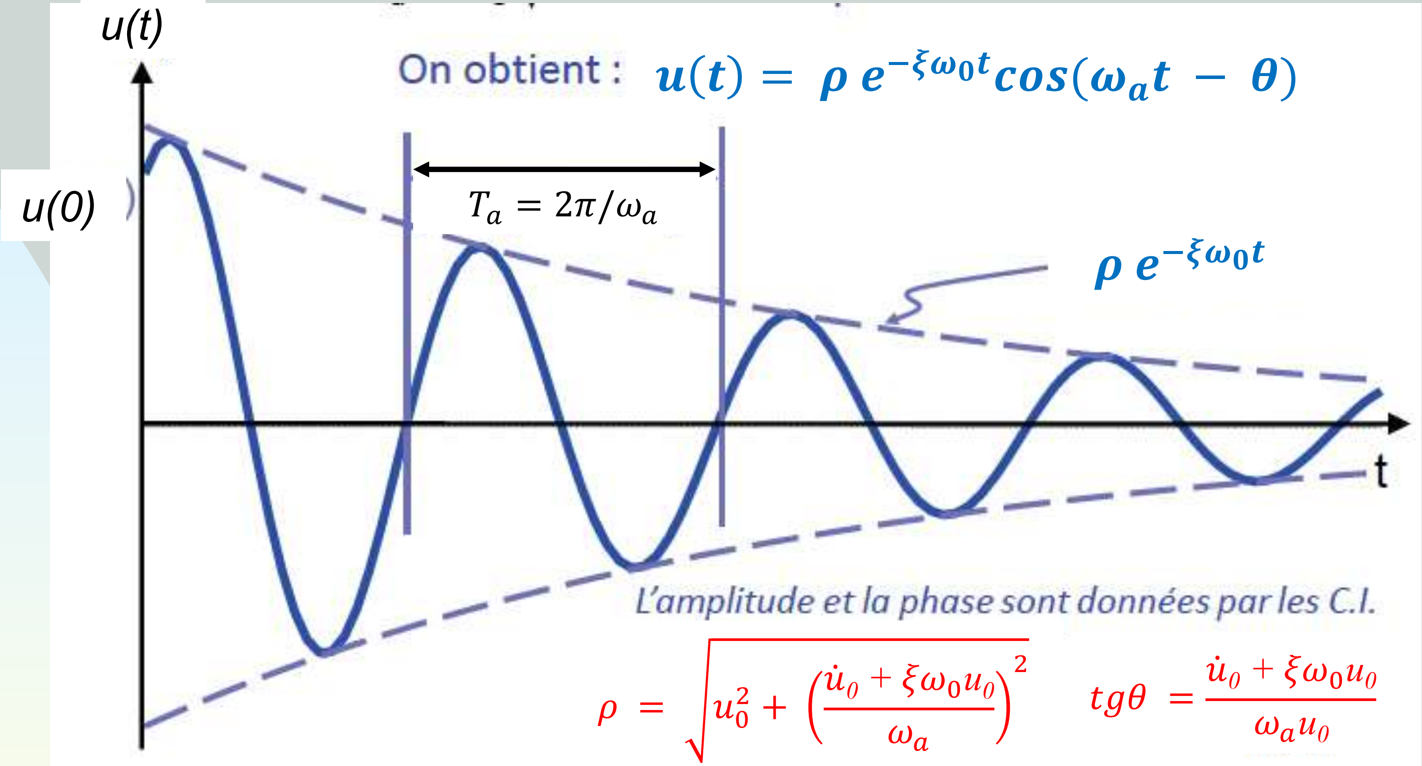
On peut écrire la solution sous sa 2ème forme:

$$\boxed{\boldsymbol{u(t) = \rho\, e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega_a t - \theta)}} \quad \textbf{(3.26)}$$

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_a}\right)^2} \qquad tg\theta = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_a u_0} \quad \textbf{(3.27)}$$

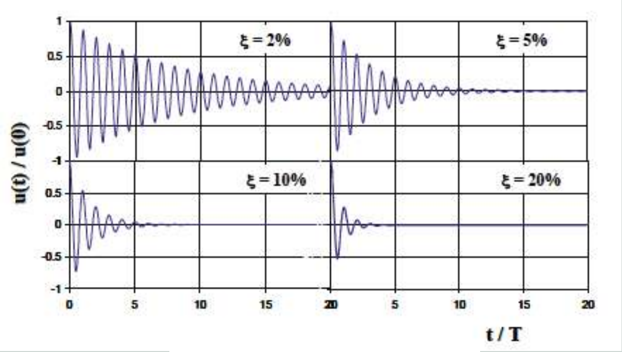
Vibrations libres amorties

Cas 2 (cas sous critique): $\Delta < 0$ ($\xi<1$)



$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_a}\right)^2} \qquad tg\theta = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_a u_0}$$

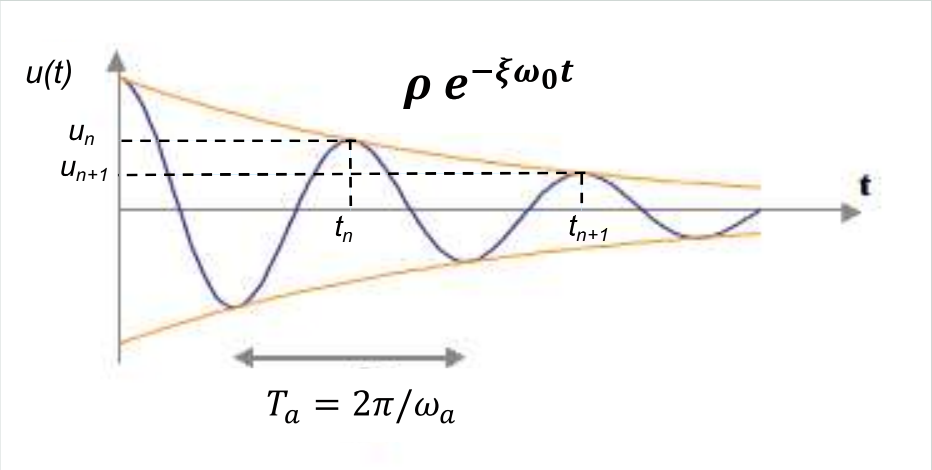
- **La masse du système passe par des positions d'équilibre statique à des intervalles de demi période «π/ω_a»**
- **L'enveloppe des amplitudes est exponentiellement décroissante**
- **Les amplitudes aux sommets sont à des intervalles de « T_a »**
- **Le retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le «ξ » est élevé.**



Influence de ξ

Graphe pris du cours de Vibrations de l'UPMC

Décrément logarithmique
Détermination expérimentale de l'amortissement



En prenant 02 maxima successifs, u_n et u_{n+1}, on peut écrire:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{\rho\, e^{-\xi\omega_0 t_n}}{\rho\, e^{-\xi\omega_0 (t_n+T_a)}} = e^{\xi\omega_0 T_a} \qquad (\cos = 1)$$

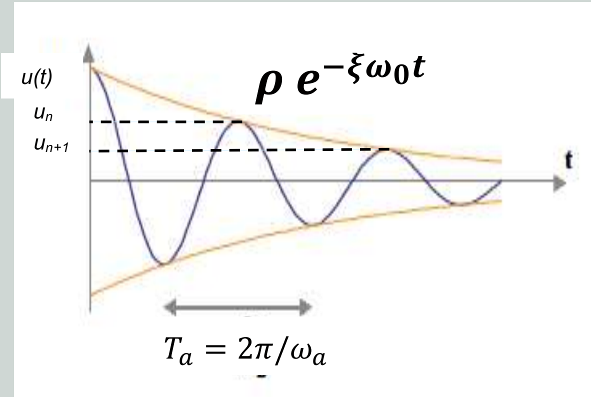
En prenant le logarithme népérien, on aura:

$$\Delta = \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = \ln e^{\xi\omega_0 T_a} = \xi\omega_0 T_a = 2\pi\xi\,\frac{\omega_0}{\omega_a}$$

Ou bien: $$\boxed{\Delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad (3.28)$$

Pour des amortissements faibles: $$\boxed{\Delta \approx 2\pi\xi} \qquad (3.29)$$

Décrément logarithmique
Détermination expérimentale de l'amortissement



Soit, donc, on peut calculer l'amortissement:

$$\boxed{\xi = \frac{\Delta}{2\pi}} \qquad \textbf{(3.30)}$$

On peut aussi calculer l'amplitude après « n » cycles.

$$u_0 = \rho\, e^{-\xi\omega_0(t_0)}$$

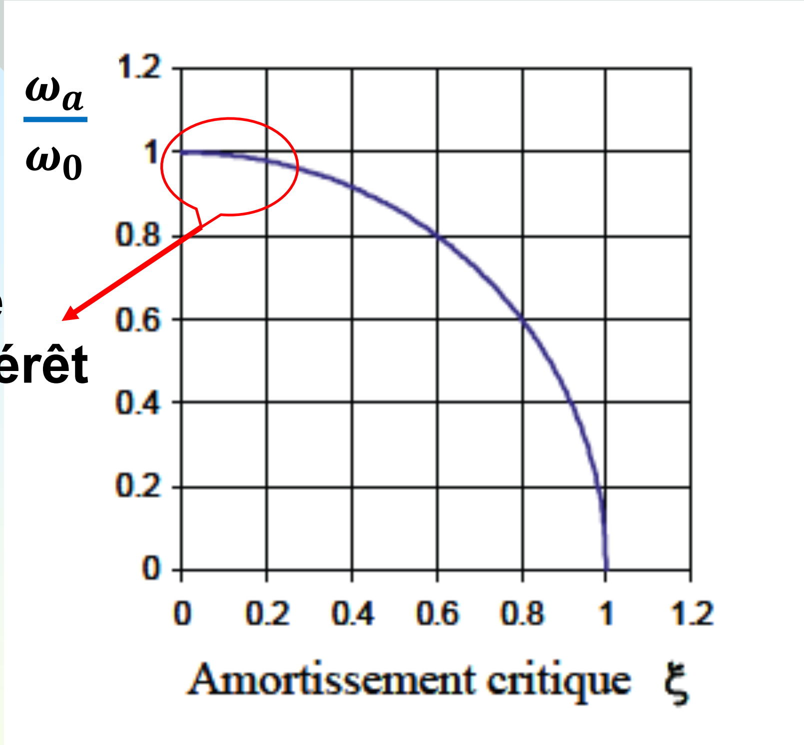
$$u_n = \rho\, e^{-\xi\omega_0(t_0+nT_a)}$$

D'où:

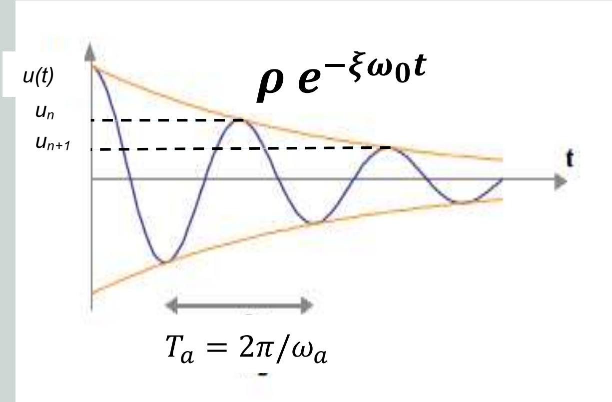
$$\frac{u_0}{u_n} = \frac{\rho\, e^{-\xi\omega_0(t_0)}}{\rho\, e^{-\xi\omega_0(t_0+nT_a)}} = e^{\xi\omega_0 nT_a} = e^{n\Delta} \qquad \textbf{car} \qquad \Delta = \xi\omega_0 T_a$$

$$\boxed{u_n = u_0\, e^{-n\Delta}} \qquad \textbf{(3.31)}$$

Graphe
Rapport des pulsations avec amortissement critique



Zone d'intérêt



On remarque pour des valeurs faibles de ξ (typiquement < à 20%), cas rencontrés en pratique, on peut donc confondre

$$\omega_0 \approx \omega_a$$

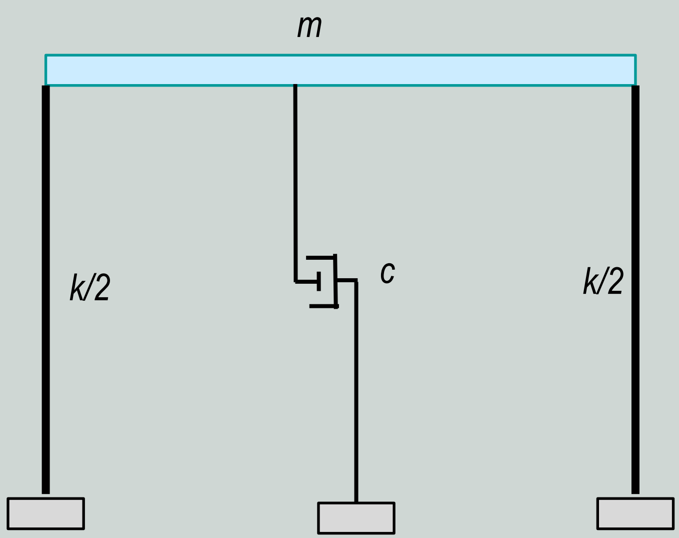
Exemple

Le portique suivant est soumis au test de vibration libre. Il a fallu une force de 100 KN pour le déplacer latéralement de 5mm. Après avoir relâché de façon instantané, le déplacement maximal au retour est de 4,0 mm qui a lieu 1,4 s après le relâchement. Calculer

i) La masse effective

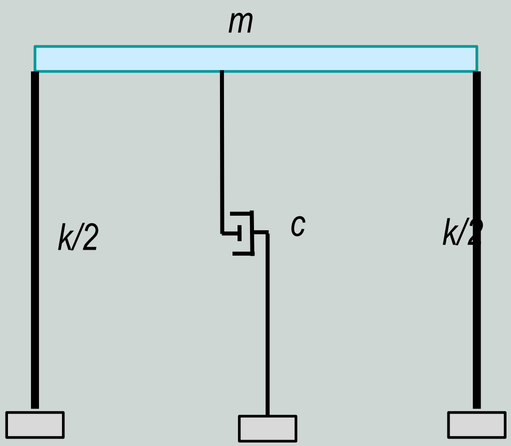
ii) La fréquence de vibration

iii) Coefficient d'amortissement.



Vibrations libres amorties

i) Masse effective



$$\omega_a = \omega_0\left(\sqrt{1 - \xi^2}\right) \approx \omega_0$$

$$T_a \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

D'où : $$m = \frac{k\,T^2}{4\,\pi^2}$$

Or : $k = \frac{F}{\delta} = \frac{100\ \ 10^3}{5} = 20.\ \ 10^6\ N/m$

Ainsi, avec T = 1.4 s et k= $20.\ 10^6$ **, on aura :**

$$m = 993\,000\ kg$$

ii) Fréquence de vibration

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.4} = .714\ Hz \qquad \omega_0 = 2\pi . f = 4.49\ rd/s$$

iii) Amortissement

$$\Delta = ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = ln\frac{5}{4} = 0.223$$ **Or pour ξ faible** $\Delta \approx 2\pi\xi$

D'où $\xi = \frac{\Delta}{2\pi} = 3.55\%$ **et** $c = \xi . 2m\omega_0 = 316\,558\ kg/s$

Cas 3 (cas sur amorti): $\Delta > 0$ (ξ>1)

Soit : $(mq^2 + cq + k) = 0$.

$\Delta > 0$ (ξ>1) **, d'où l'équation admet 02 solutions.**

$$q_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = \omega_0\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \qquad \textbf{(3.32)}$$

On pose :

$$\widehat{\omega} = \omega_0\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right) \qquad \textbf{(3.33)}$$

$$\widehat{T} = \frac{2\pi}{\widehat{\omega}} \qquad \textbf{(3.34)}$$

La solution de l'équation de mouvement (3.11) sera du type:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[G_1 e^{\widehat{\omega} t} + G_2 e^{-\widehat{\omega} t}\right] \qquad \textbf{(3.35)}$$

En utilisant l'équation d'Euler:

$$e^{\theta} = ch\theta + sh\theta \quad \text{et.} \quad e^{-\theta} = ch\theta - sh\theta$$

La solution sera $$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[(A\, ch\widehat{\omega} t + B\, sh\widehat{\omega} t)\right]} \qquad \textbf{(3.36)}$$

Vibrations libres amorties

Cas 3 (cas sur amorti): $\Delta > 0$ ($\xi>1$)

Avec les CI :

On aura : $$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(A\, ch\hat{\boldsymbol{\omega}}t + B\, sh\hat{\boldsymbol{\omega}}t)]$$

$$\dot{u}(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(-\xi\omega_0 A + B\hat{\omega})ch\hat{\omega}t + (A\hat{\omega} - \xi\omega_0 B)sh\hat{\omega}t]$$

$$u(0) = A = u_0$$

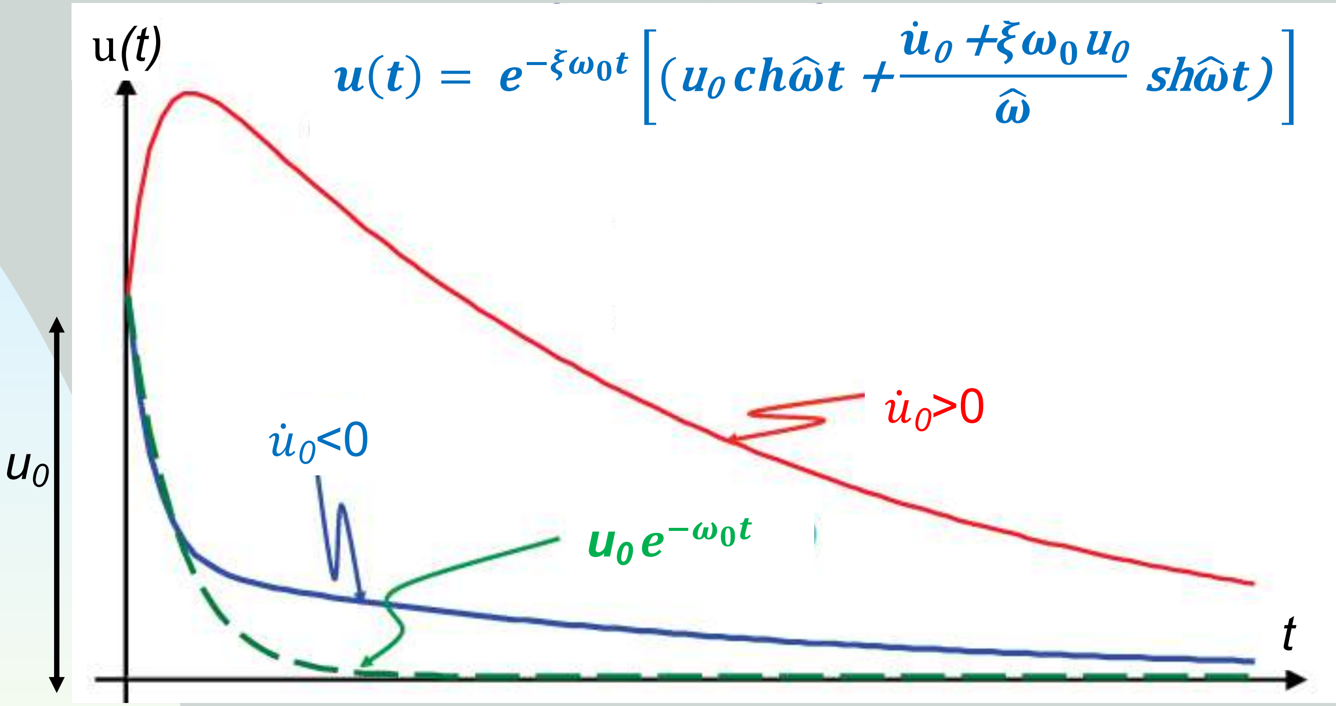
et $\dot{u}(0) = [-\xi\hat{\omega}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\hat{\omega}] = \dot{u}_0$

D'où: $A = u_0$ **et** $B = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\hat{\omega}}$ **(3.37)**

En remplaçant, on aura la solution:

$$\boldsymbol{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[\left(u_0\, ch\hat{\omega}t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\hat{\omega}}\, sh\hat{\omega}t\right)\right]} \quad \textbf{(3.38)}$$

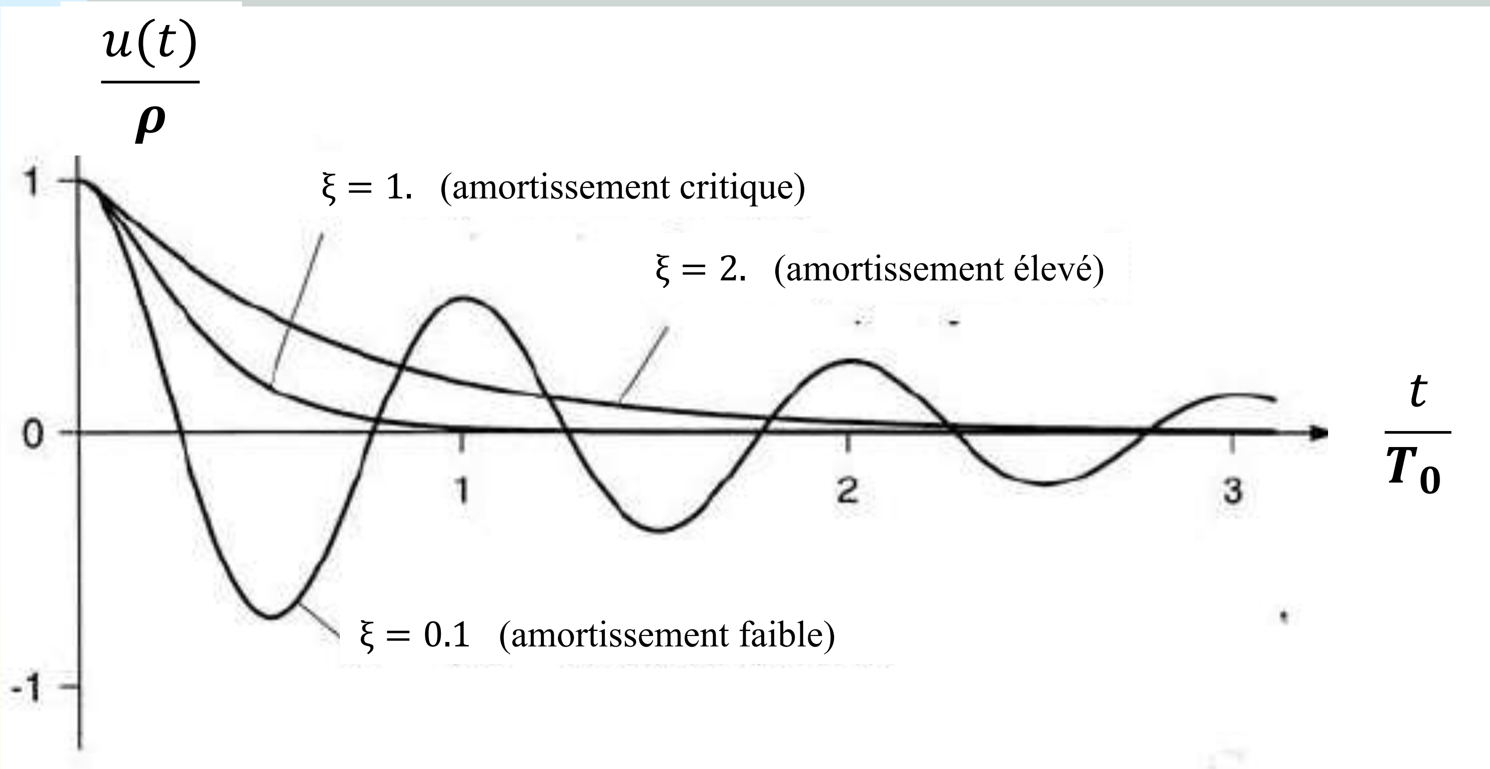
Vibrations libres amorties (sur amorti)



- Pas d'oscillations au cours du temps
- La masse a tendance à retrouver sa position d'équilibre au bout d'un temps infini
- La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.
- Ce phénomène n'est pas important en pratique

Résumé

Les 03 cas du système amorti ; « ξ » < 1, « ξ » = 1 et « ξ » > 1



- **En pratique, « ξ » reste faible, généralement < à 20%.**
- **Seul la courbe à oscillation autour de la position d'équilibre nous intéresse.**

Merci. **Fin du chapitre 3**

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Chap. 4

Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL:

Excitation Harmonique

COURS 4 **Dimanche 16.10.2022**