

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 4

Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL: Excitation harmonique

1. Introduction

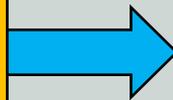
Rappel équation du mouvement

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Dans ce chapitre $p(t) \neq 0$

On s'intéresse uniquement aux forces harmoniques type sinus ou cosinus

- ❖ Force extérieure entretenue (= permanente ou transitoire (=courte durée))
- ❖ $p(t) \neq 0$ (forcée)
- ❖ Déplacement et/ou vitesse initiales connues (**nulles ou non nulles**)

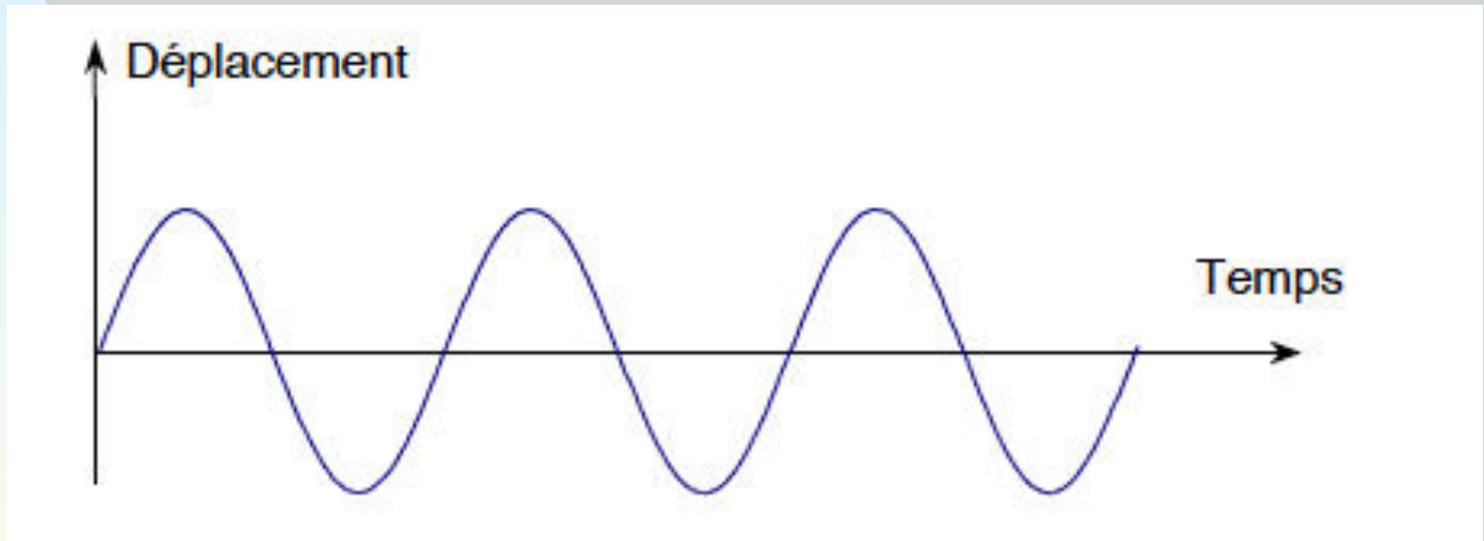


Réponse

Vibration forcée de la structure

- ❖ Mouvement selon la nature de l'excitation
- ❖ Combinaison entre une partie transitoire et une partie permanente.
- ❖ Amplitude et phase selon le spectre de l'excitation (permanente) et vibration libre si « u_0 » et/ou « \dot{u}_0 » sont $\neq 0$ (partie transitoire)

Exemple de fonction harmonique



Ex. Machinerie, ponts, Vibrations ferroviaires...

les fonctions harmoniques peuvent être sinus ou cosinus

2. Vibrations forcées harmonique non amorties

On pose $c=0$ et $p(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ (ou bien \sin)

On aura:
$$m \ddot{u}(t) + ku(t) = P_0 \cos(\Omega t) \quad (4.1)$$

Solution :

Somme d'une solution homogène « u_c » et une solution particulière « u_p ».

Avec:
$$\begin{aligned} m \ddot{u}_c(t) + ku_c(t) &= 0 & (4.2) \\ m \ddot{u}_p(t) + ku_p(t) &= P_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Chap (3) :
$$u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (4.3)$$

Et :
$$u_p(t) = U \cos(\Omega t) \quad (4.4)$$

« u_c » : Réponse transitoire

« u_p » : Réponse permanente

2. Vibrations forcées harmonique non amorties

Remplaçant (4.4) dans (4.1) pour déterminer « U »

Soit :

$$-mU\Omega^2 \cos(\Omega t) + kU \cos(\Omega t) = P_0 \cos(\Omega t)$$

$$-mU\Omega^2 + kU = P_0$$

D'où :

$$U = \frac{P_0}{k - m\Omega^2} \quad \text{où} \quad k - m\Omega^2 \neq 0 \quad (4.5)$$

Posons $U_{stat} = \frac{P_0}{k}$ (4.6) Déplacement statique du à P_0

$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \Omega^2} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} \quad (4.7)$$

Où : $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$ rapport des pulsations

Remplaçant (4.6) et (4.7) dans (4.4) on aura:

$$u_p(t) = U_{stat} \frac{1}{1 - r^2} \cos(\Omega t)$$

Posons : $D = \frac{1}{1 - r^2}$

$$u_p(t) = D U_{stat} \cos(\Omega t) \quad (4.8)$$

D: Coefficient d'amplification dynamique

$r < 1$: la réponse est en phase avec l'excitation

$r > 1$ la réponse est en opposition de phase avec l'excitation

$r = 1$: phénomène de résonance

Ainsi la réponse totale est la somme de la réponse transitoire et la réponse permanente.

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + DU_{stat} \cos(\Omega t) \quad (4.9)$$

Supposons les CI : À $t=0$, $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + DU_{stat} \cos(\Omega t)$$

Et
$$\dot{u}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - DU_{stat} \Omega \sin(\Omega t)$$

La résolution de ces 02 équations nous donne:

$$A = u_0 - D U_{stat} \quad \text{et} \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \quad (4.10)$$

La solution:

$$u(t) = (u_0 - DU_{stat}) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + DU_{stat} \cos(\Omega t) \quad (4.11)$$

Vibrations forcées harmonique non amorties

$$u(t) = (u_0 - DU_{stat}) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + DU_{stat} \cos(\Omega t)$$

Cas particulier : CI nulles ($u(0) = u_0 = 0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = 0$)

Solution totale sera:

$$u(t) = D U_{stat} (\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)) \quad (4.12)$$

Coefficient
d'amplification
dynamique

Déplacement
statique

Réponse
permanente
(liée à l'excitation)

Réponse transitoire
(effet de vibration libre)

Vibrations forcées harmonique non amorties

$$u(t) = (u_0 - DU_{stat}) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + DU_{stat} \cos(\Omega t)$$

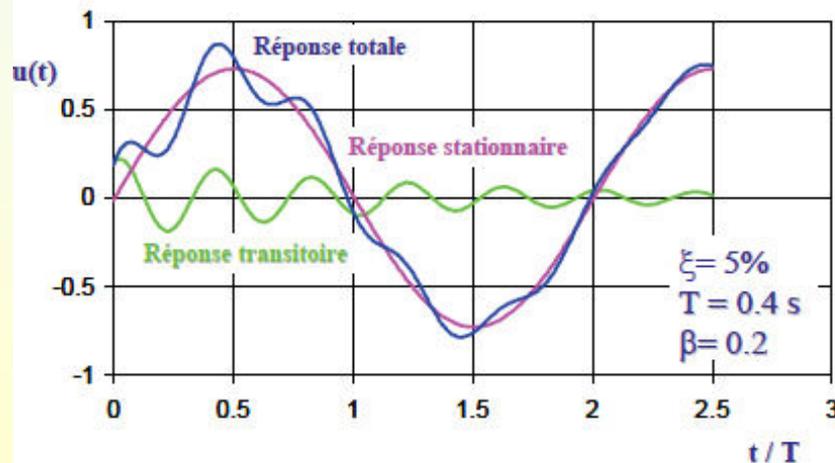
Le système vibre à 2 fréquences: sa fréquence naturelle et la fréquence imposée par l'excitation.

En général, la réponse due aux conditions initiales (réponse transitoire) disparaît rapidement et reste uniquement la réponse permanente.

Pour cela, en général en DDS, on ne s'intéresse qu'à la réponse permanente. Et souvent, on a

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \approx u_p(t) \quad (4.13)$$

Exemple



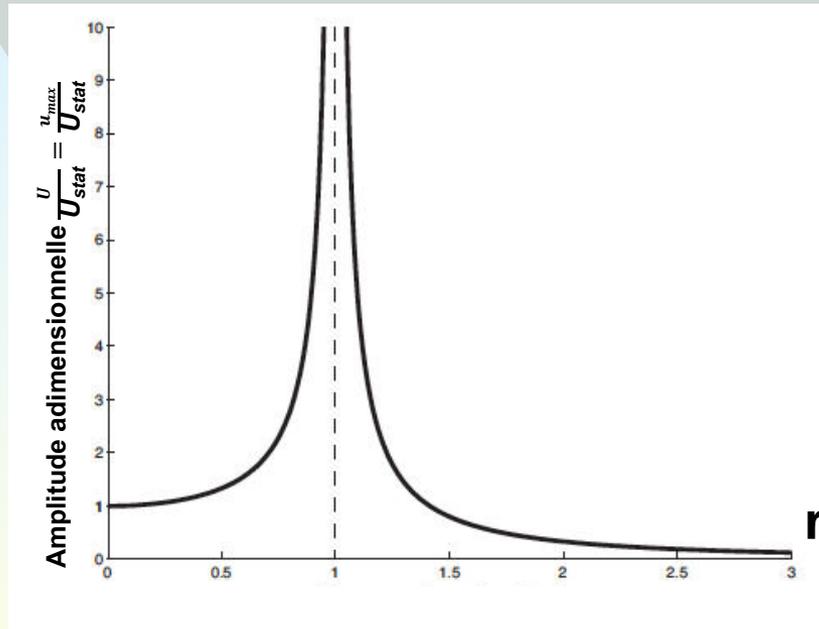
Vibrations forcées harmonique non amorties

La solution

$$u(t) = U_{stat} \frac{1}{1 - r^2} \cos(\Omega t) \quad (4.14)$$

En traçant la max

$$u_{max} = U_{stat} \frac{1}{1 - r^2}$$



- Pour $\Omega \ll \omega_0$ le système oscille très lentement avec une amplitude proche de U_{stat} ($U/U_{stat} \approx 1$)
- Pour $\Omega \gg \omega_0$ l'amplitude de la réponse tend vers 0 (r infini)
- i.e l'excitation change de sens (signe) tellement rapidement que le système n'a pas le temps de répondre aussi rapidement à cause de son inertie « m ».
- pour $\Omega \approx \omega_0$ phénomène de résonance

3. Vibrations forcées harmonique amorties

On pose $c \neq 0$ et $p(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ (ou bien \sin)

On aura: $m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ (4.14)

Solution : (on ne s'intéresse qu'aux systèmes sous amortis)

Somme d'une solution homogène « u_c » et une solution particulière « u_p ».

Avec: $m \ddot{u}_c(t) + c \dot{u}_c(t) + ku_c(t) = 0$ (4.15)
 $m \ddot{u}_p(t) + c \dot{u}_p(t) + ku_p(t) = P_0 \cos(\Omega t)$

Chap (3) : $u_c(t) = e^{-\xi \omega_0 t} [(A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t)]$ (4.16)

Et : $u_p(t) = U \cos(\Omega t - \alpha)$ (4.17)

« u_c » : Réponse transitoire

« u_p » : Réponse permanente

« α » : angle de phase de la réponse permanente par rapport à l'excitation

Il suffit de déterminer « U »

Vibrations forcées harmonique amorties

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \cos(\Omega t)$$

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u_c(t) = e^{-\xi \omega_0 t} [(A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t)]$$

$$u_p(t) = U \cos(\Omega t - \alpha)$$

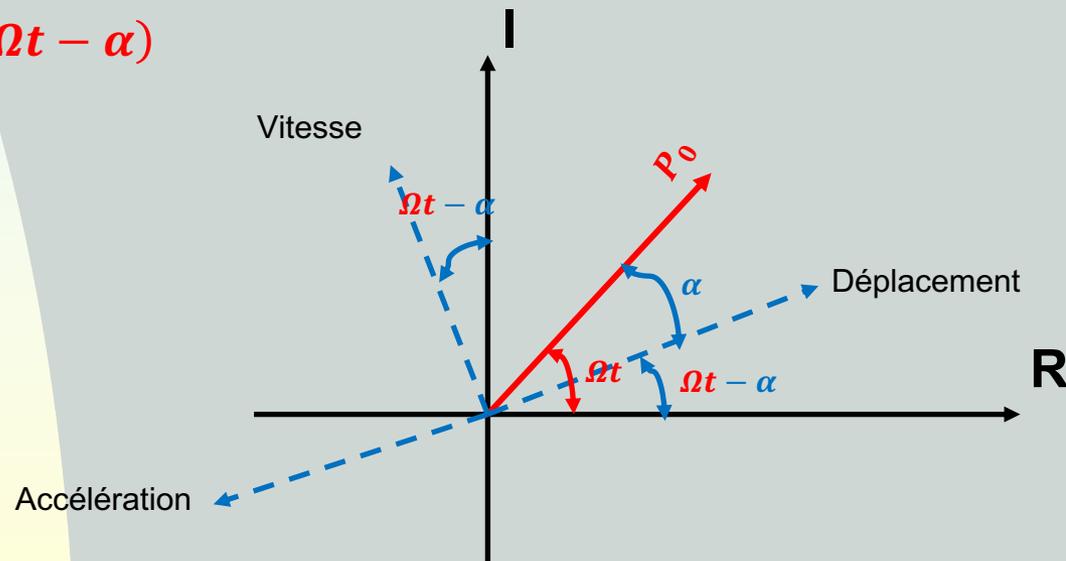
déterminons « U » ?

Ex: par représentation vectorielle

$$u_p(t) = U \cos(\Omega t - \alpha)$$

$$\dot{u}_p(t) = -U \Omega \sin(\Omega t - \alpha) \quad (4.18)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -U \Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha)$$



Vibrations forcées harmonique amorties

En substituant

$$u_p(t) = U \cos(\Omega t - \alpha) \quad \dot{u}_p(t) = -U\Omega \sin(\Omega t - \alpha) \quad \ddot{u}_p(t) = -U\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha)$$

dans $m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = P_0 \cos(\Omega t)$

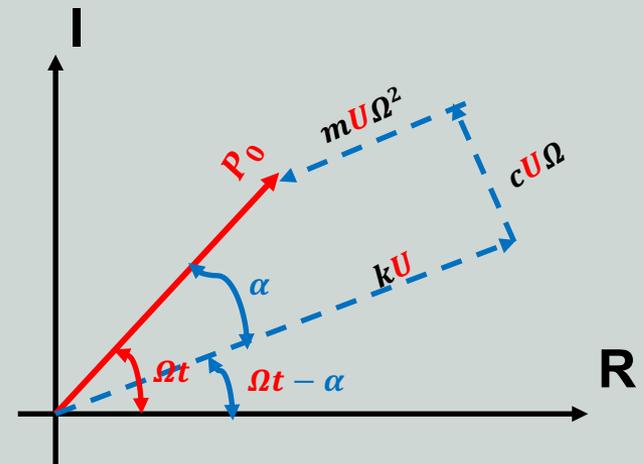
On aura $-mU\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) - cU\Omega \sin(\Omega t - \alpha) + kU \cos(\Omega t - \alpha) = P_0 \cos(\Omega t)$

En polygone de vecteurs, on peut tirer:

$$P_0^2 = (kU - mU\Omega^2)^2 + (cU\Omega)^2 \quad (4.19)$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

On peut tirer:

$$U = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad (4.20)$$



En faisant des transformations,

$$U = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\Omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\Omega}{k}\right)^2}}$$

Sachant que: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$

On aura
$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (4.21)$$

Posons:
$$U_{stat} = \frac{P_0}{k} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (4.22)$$

$$U = U_{stat} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = U_{stat} D \quad (4.23)$$

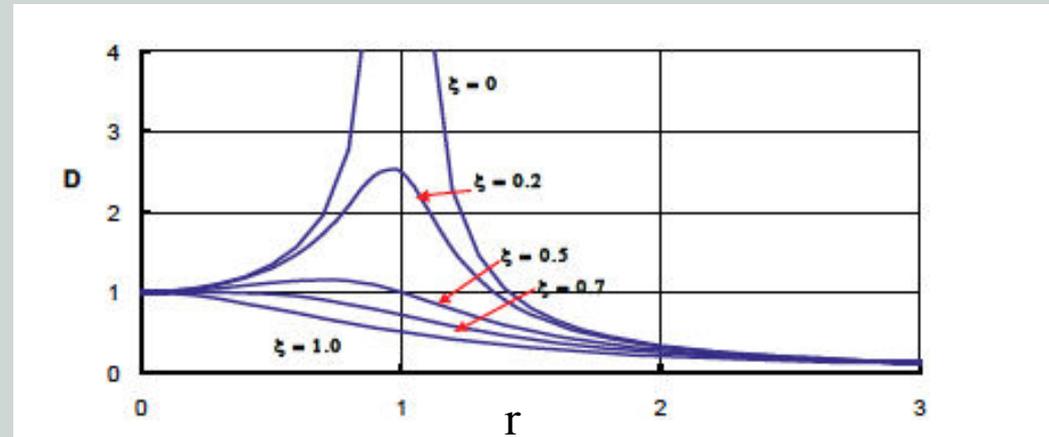
U_{stat} : Déplacement statique dû à P_0

$D(r, \xi)$: Coefficient d'amplitude dynamique pour un 1SDDL amorti soumis à une excitation harmonique

Vibrations forcées harmonique amorties

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

- Pour $r = \Omega/\omega_0$ tend vers « 0 », le coefficient « D » approche « 1 ». D'où, si la fréquence de l'excitation ($f = \Omega/2\pi$) est petite devant la fréquence propre du système ($f = \omega_0/2\pi$), la charge est considérée comme statique.
- Pour $\Omega \gg \omega_0$ l'amplitude de la réponse tend vers 0 (r grand)
- i.e l'excitation change de sens (signe) tellement rapidement que le système n'a pas le temps de répondre aussi rapidement à cause de son inertie « m ».
- Pour $c/ccr < 0.5$, D est maximum quand le rapport « r » est juste inférieur à « 1 ».
- pour $\Omega \approx \omega_0$ phénomène de résonance est atteint pour ($\xi=0$, système non amorti)

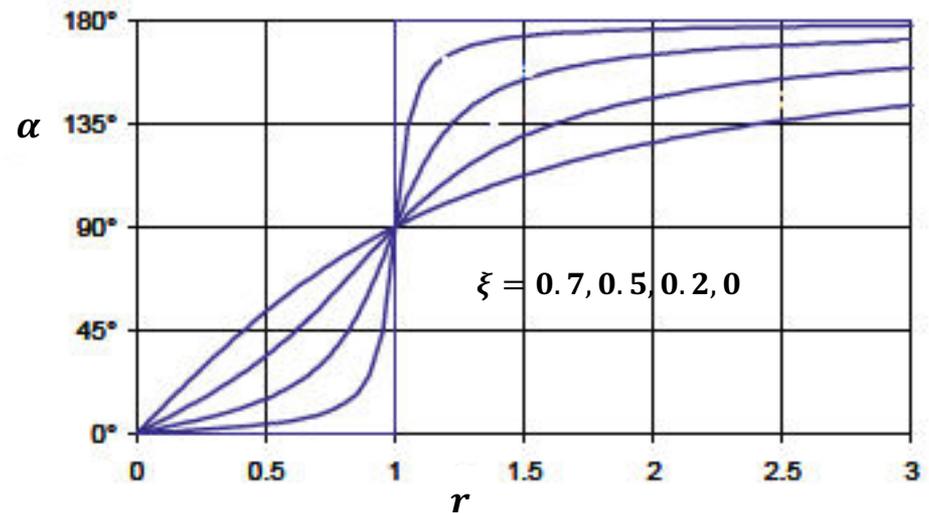


Vibrations forcées harmonique amorties

$$\alpha(r) = \arctg\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = \arctg\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right)$$

- A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation.
- A la résonance ($r=1$), il y a un déphasage de 90° entre force appliquée et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale et vice-versa.
- A haute fréquence, le déplacement est maximale, en valeur absolue, au même instant que la force mais dans une direction opposée à la force.

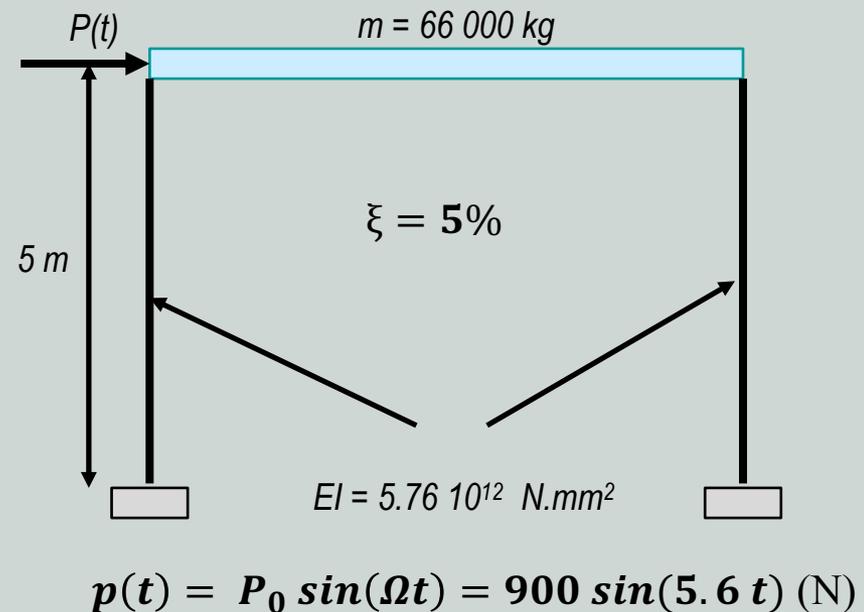
Angle de phase en fonction de « r »



Exemple 1

Considérons le portique de la figure ci-contre avec les données mentionnées.

- i) Calculer l'amplitude de la réponse permanente.
- ii) Tracer les diagrammes des valeurs maximales du moment fléchissant et effort tranchant des poteaux.



Vibrations forcées harmonique amorties

i) Amplitude de la réponse permanente

(voir 4.21)
$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Les poteaux encasturé-encasturé, d'où (voir chap 2)

$$k = 12 \frac{EI}{H^3} \quad (\text{pour un poteau})$$

A.N : $k = 2 \left(12 \frac{5.76 \cdot 10^{12}}{5000^3} \right) = 11 \cdot 10^5 \text{ N/m}$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 10^5}{66000}} = 4.08 \text{ rd/s}$$

Le rapport des pulsations :

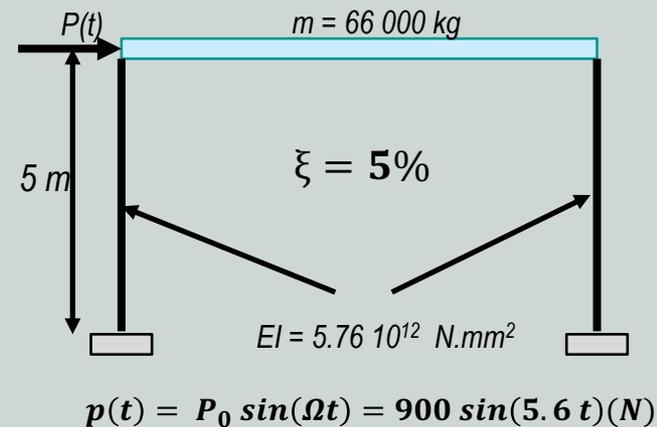
$$r = \frac{5.6}{4.08} = 1.37$$

Avec $\xi = 0.05$ et $P_0 = 900$

On aura:

$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{900}{1100} \frac{1}{\sqrt{(1 - 1.372)^2 + (2 \cdot 0.05 \cdot 1.37)^2}}$$

$$U = 0.92 \text{ mm}$$



Vibrations forcées harmonique amorties

ii) Effort tranchant et moment fléchissant

Avec $k = 12 \frac{EI}{H^3}$ (pour un poteau)

L'effort tranchant

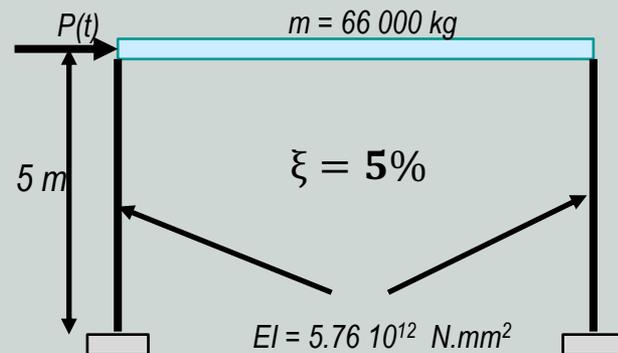
$$T = 12 \frac{EI}{H^3} U = 12 \frac{5.76 \cdot 10^{12}}{5000^3} \cdot 0.92$$

$$T = 553 \text{ N}$$

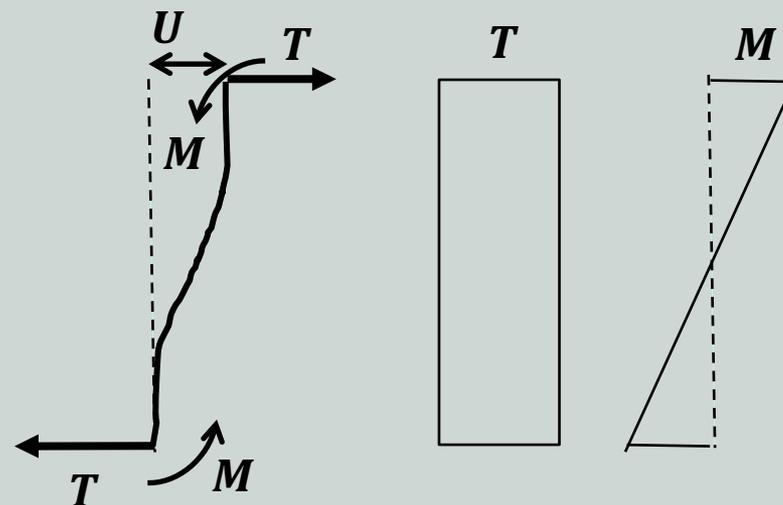
Le moment fléchissant

$$M = T \frac{H}{2} = 553 \cdot \frac{5}{2}$$

$$M = 1.38 \cdot 10^3 \text{ N.m}$$



$$p(t) = P_0 \sin(\Omega t) = 900 \sin(5.6 t) (\text{N})$$



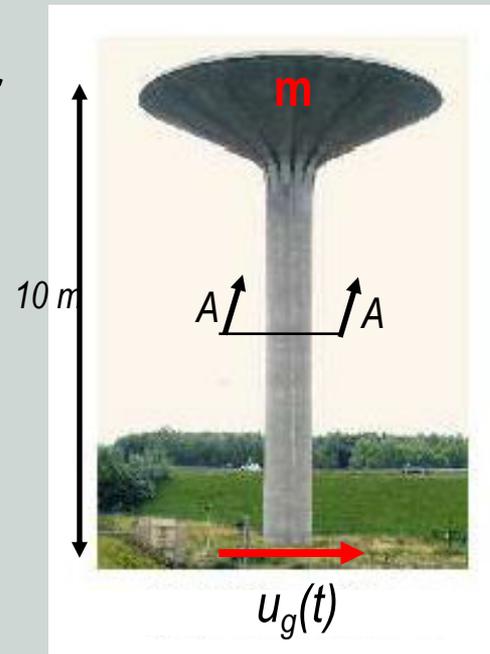
Exemple 2

Considérons le château d'eau de la figure ci-contre avec les données mentionnées, sollicité par l'action d'un séisme qui peut être simulé par une fonction déplacement du support de type harmonique, dont on considérera 03 cas pour la pulsation de l'excitation.

Cas 1 : $\Omega = \pi$; cas 2: $\Omega = 4\pi$ et cas 3: $\Omega = 6\pi$

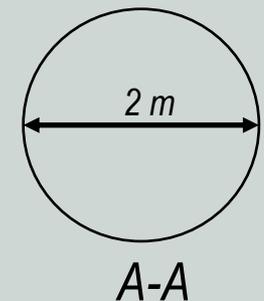
Pour chaque cas:

- i) Calculer la réponse dynamique du système.
- ii) Le moment maximal pour que la structure reste élastique.



$$m = 100\,000 \text{ kg}$$
$$E = 27\,000 \text{ MPa}$$
$$\xi = 10 \%$$

$$u_g(t) = 200 \sin(\Omega t) \text{ (mm)}$$

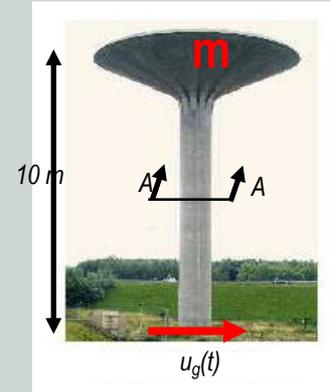


Vibrations forcées harmonique amorties

i) Réponses dynamiques

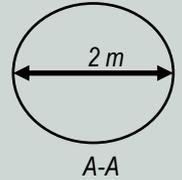
Systeme soumis à une excitation du support, d'où équation du mouvement (Chap 2, éq. (2.17))

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = -m \ddot{u}_g(t) = p_{eff}(t)$$



$$m = 100\,000 \text{ kg}$$
$$E = 27\,000 \text{ MPa}$$
$$\xi = 10 \%$$

$$u_g(t) = 200 \sin(\Omega t) \text{ (mm)}$$



Or « u_g » est défini par son déplacement, on aura

$$u_g(t) = 200 \sin(\Omega t) \text{ (mm)} ; \dot{u}_g(t) = 200 \Omega \cos(\Omega t) \text{ (mm)} \text{ et } \ddot{u}_g(t) = -200 \Omega^2 \sin(\Omega t) \text{ (mm)}$$

On s'intéresse à la réponse permanente.

$$\text{On a: } u(t) = u_p(t) = \frac{P_{eff}}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \alpha)$$
$$p_{eff} = m u_0 \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\text{Avec: } k = 3 \frac{EI}{L^3} \text{ (Chap 2) et } I = \frac{\pi D^4}{64} = 7.854 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4$$

Rem: En pratique, « I » doit être réduite de 50% (environ) parce que pendant l'action du séisme, il y a apparition de fissures, d'où « I » diminue.

Vibrations forcées harmonique amorties

i) Réponses dynamiques

AN: $k = 3 \frac{EI}{L^3} = 63.617 \cdot 10^3 \text{ N/mm}$

Or $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{63.617 \cdot 10^6}{10^5}} = 25.22 \text{ rd/s}$

Cas I : $\Omega = \pi$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\pi}{25.22} = 0.125 < 1$$

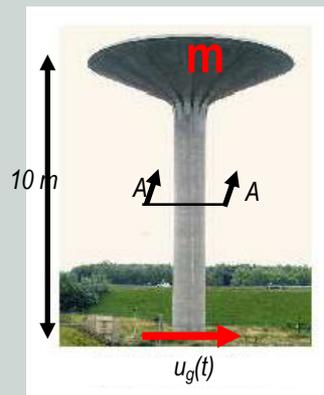
$$\alpha = \arctg\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.125}{1-0.125^2}\right) = 1.45^\circ$$

On a: $u(t) = u_p(t) = \frac{P_{eff}}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \alpha)$

$$u(t) = \frac{100000 \cdot 0.2 \cdot \pi^2}{63.617 \cdot 10^6} \frac{1}{\sqrt{(1-0.125^2)^2 + (2 \cdot 0.1 \cdot 0.125)^2}} \sin\left(\left(\pi \frac{180}{\pi}\right)t - 1.45\right)$$

Convertir en « ° »

$$u_1(t) = 0.00315 \sin(180 t - 1.45) \text{ (m)}$$

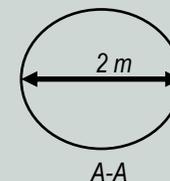


$$m = 100\,000 \text{ kg}$$

$$E = 27\,000 \text{ MPa}$$

$$\xi = 10 \%$$

$$u_g(t) = 200 \sin(\Omega t) \text{ (mm)}$$



Vibrations forcées harmonique amorties

i) Réponses dynamiques

Cas II : $\Omega = 4\pi$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{4\pi}{25.22} = 0.5 < 1$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.5}{1-0.5^2}\right) = 7.6^\circ$$

On a: $p(t) = p_0 \sin(\Omega t)$

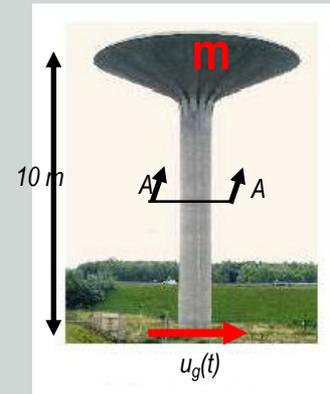
$$u(t) = \frac{100000 \cdot 0.2 \cdot \pi^2}{63.617 \cdot 10^6} \frac{1}{\sqrt{(1-0.5^2)^2 + (2 \cdot 0.1 \cdot 0.5)^2}} \sin\left(\left(4\pi \frac{180}{\pi}\right)t - 7.6\right)$$

$$u_2(t) = 0.0656 \sin(720 t - 7.6) \quad (\text{m})$$

Cas III : $\Omega = 6\pi$

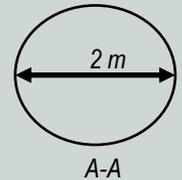
$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{6\pi}{25.22} = 0.748 < 1 \quad \alpha = \arctg\left(\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.748}{1-0.748^2}\right) = 18.7^\circ$$

$$u_3(t) = 0.2394 \sin(1080 t - 18.7) \quad (\text{m})$$



$$m = 100\,000 \text{ kg}$$
$$E = 27\,000 \text{ MPa}$$
$$\xi = 10 \%$$

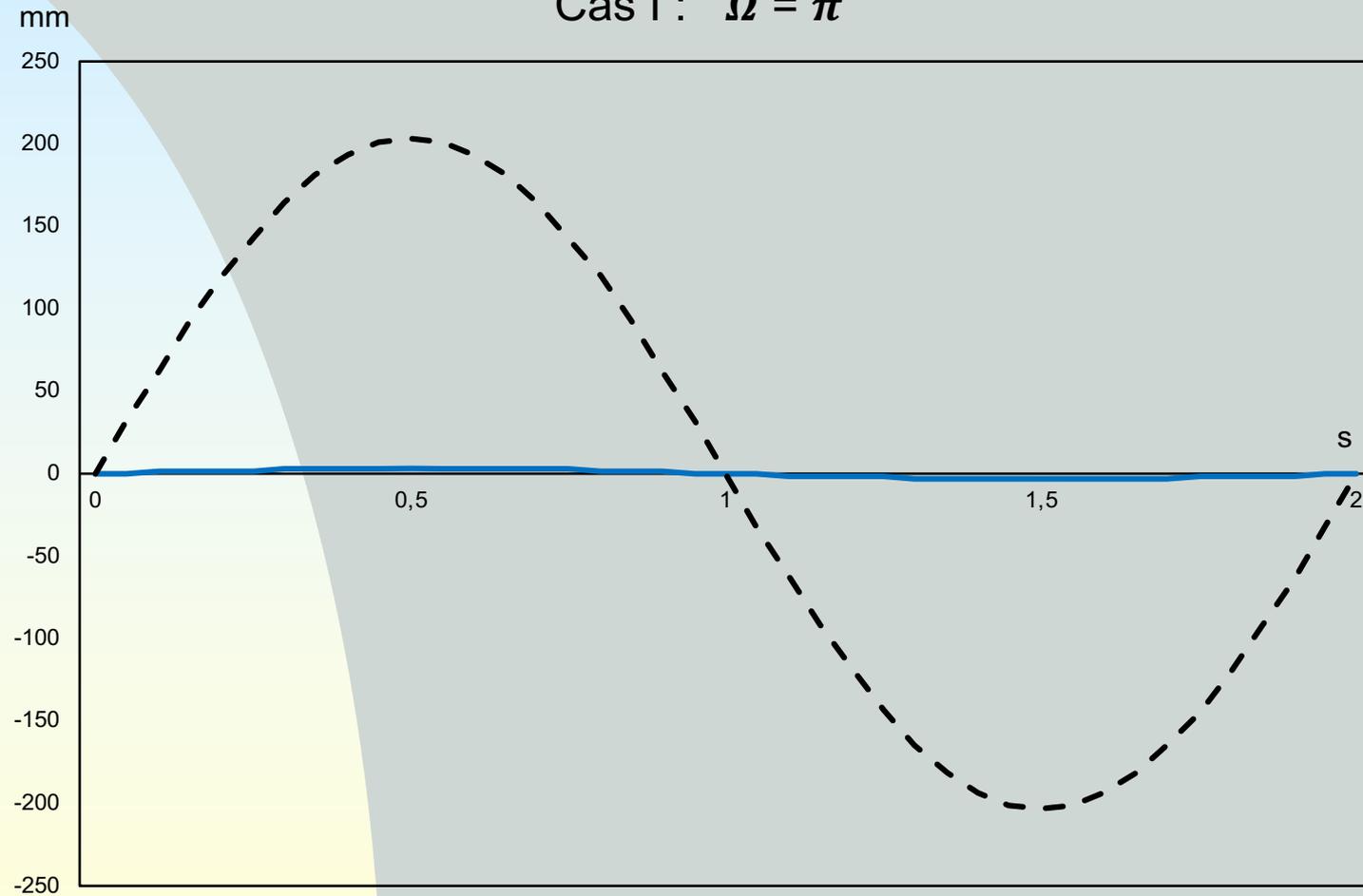
$$u_g(t) = 200 \sin(\Omega t) \text{ (mm)}$$



Graphes des réponses

$$u_1(t) = 0.00315 \sin(180 t - 1.45) \quad (\text{m})$$

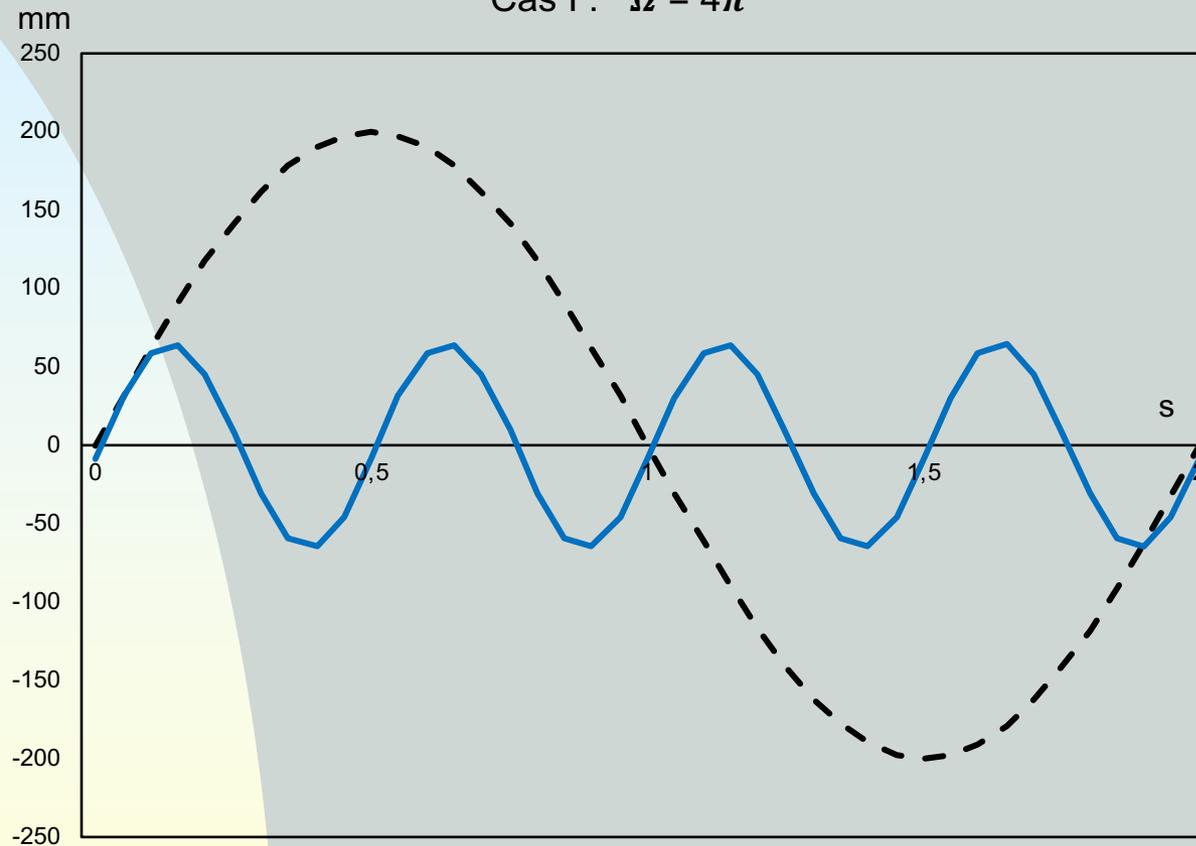
Cas I : $\Omega = \pi$



Graphes des réponses

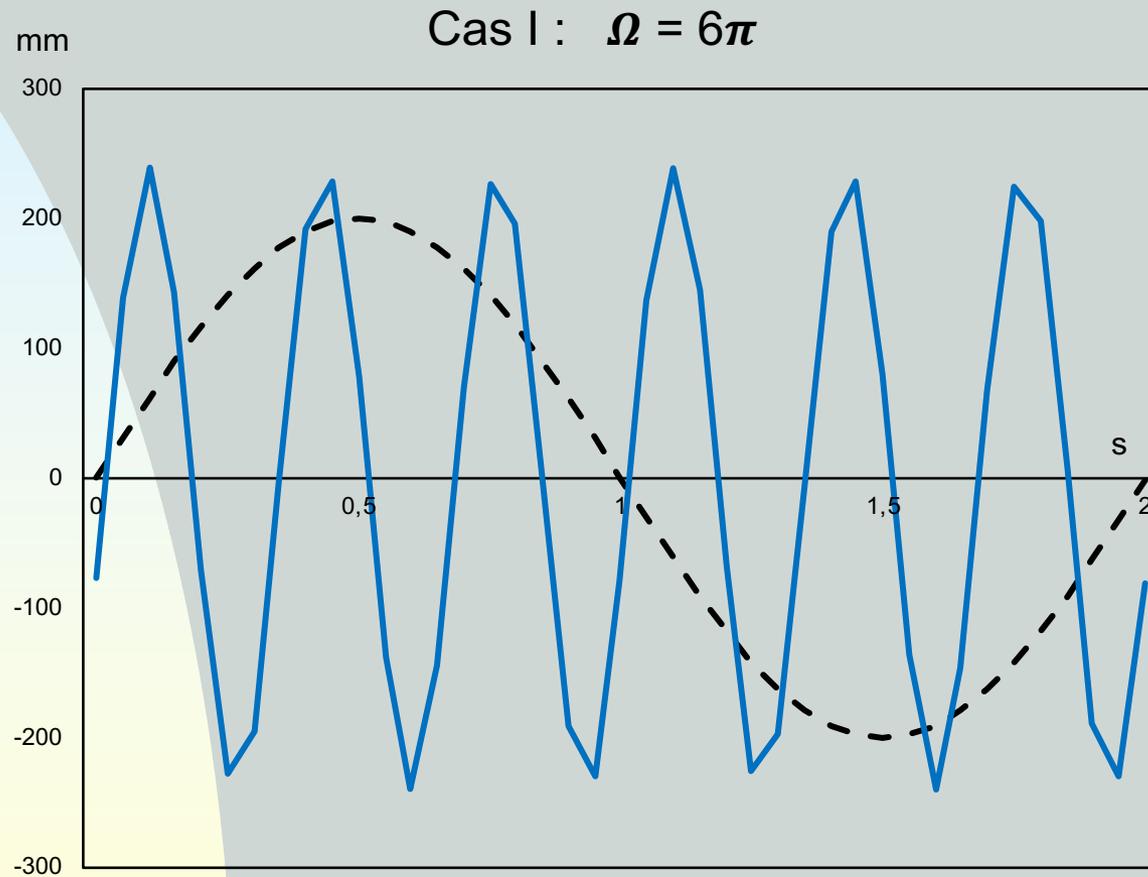
$$u_2(t) = 0.0656 \sin(720 t - 7.6) \quad (\text{m})$$

Cas I : $\Omega = 4\pi$



Graphes des réponses

$$u_3(t) = 0.2394 \sin(1080 t - 18.7) \quad (\text{m})$$



Vibrations forcées harmonique amorties

ii) Moment maximal

L'effort tranchant maximal (à la base)

$$T_{max} = k U_{max}$$

Le moment fléchissant maximal

$$M_{max} = T_{max}L =$$

Cas I : $\Omega = \pi$

$$T_{max} = (63.617 \times 10^3 \text{ N/mm}) \times 3.15 \text{ mm} = \mathbf{199\,448 \text{ N}}$$

$$M_{max} = 199448 \times 10 = \mathbf{2000 \text{ KN.m}}$$

Cas I : $\Omega = 4\pi$

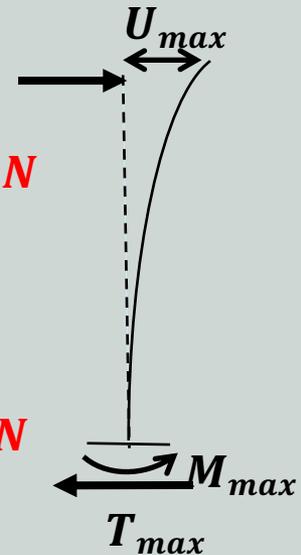
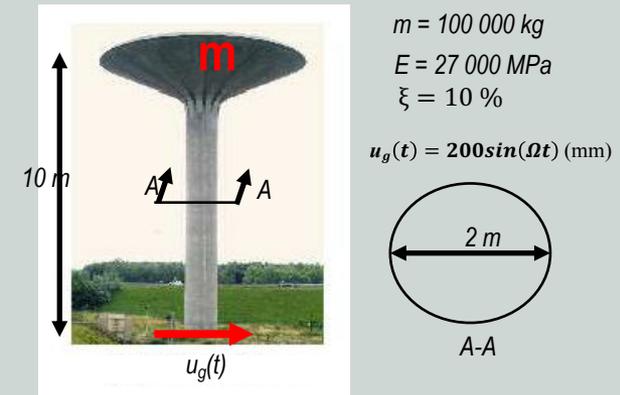
$$T_{max} = (63.617 \times 10^3 \text{ N/mm}) \times 65.6 \text{ mm} = \mathbf{4\,173\,275 \text{ N}}$$

$$M_{max} = 4173275 \times 10 = \mathbf{41\,733 \text{ KN.m}}$$

Cas I : $\Omega = 6\pi$

$$T_{max} = (63.617 \times 10^3 \text{ N/mm}) \times 239.4 \text{ mm} = \mathbf{15\,230\,000 \text{ N}}$$

$$M_{max} = 15230000 \times 10 = \mathbf{152\,300 \text{ KN.m}}$$



4. Applications pratiques

i. Instruments de mesures vibratoires

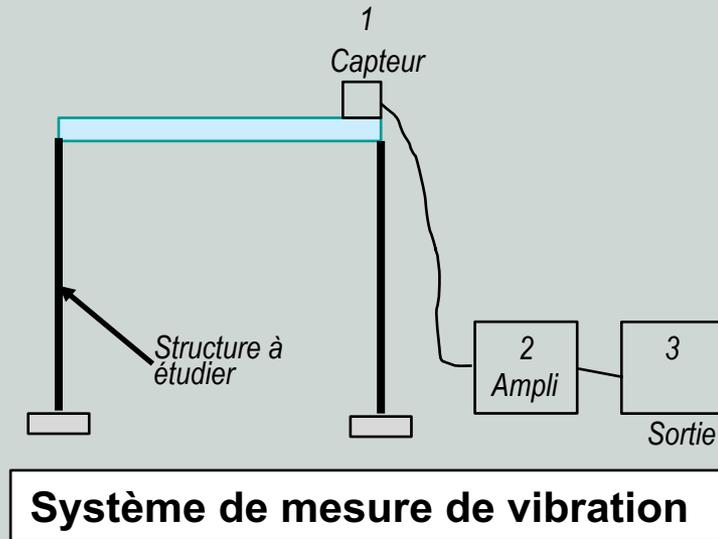
Le système comprend:

- Un capteur de mouvement
- Un système intermédiaire de modification de signal (ex Amplificateur)
- Un système de sortie (ex Oscilloscope)

Le mouvement à mesurer peut être :

- Déplacement (capteur vibromètre)
- Vitesse (capteur électro-dynamique de vitesse)
- Accélération (capteur accéléromètre)

Séismographes : Vibromètres et/ou accéléromètres



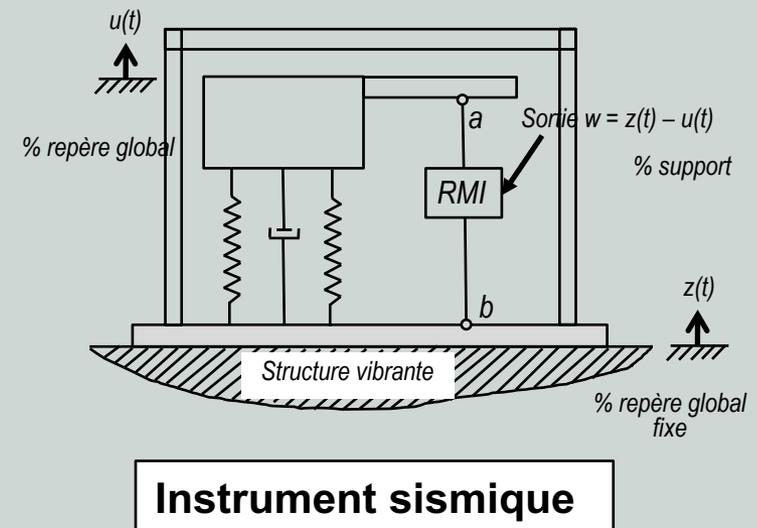
Applications pratiques

i. Instruments de mesures vibratoires

Instrument de mesure ou séismographe

Comment mesurer ?

- ❖ Un système d'oscillateur amorti est utilisé pour mesurer le mouvement.
- ❖ Système monté dans une enceinte fixée sur la surface dont le mouvement est à étudier.
- ❖ RMI: instrument de mouvement relatif mesure la mouvement relatif entre la masse (point a) et la base (point b).
- ❖ Intéressant de considérer le mouvement relatif « w » comment relié à « z »
- ❖ Mouvement du support considéré harmonique



$$z(t) = Z \cos(\Omega t) \text{ (mm)}$$

$$m \ddot{w}(t) + c \dot{w}(t) + kw(t) = -m \ddot{z}(t) = \text{peff}(t)$$

Applications pratiques

i. Instruments de mesures vibratoires

Cas de l'accéléromètre $\ddot{z}(t) = f(w)$

❖ Mouvement du support considéré harmonique

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}_0 \cos(\Omega t)$$

Alors $p_{\text{eff}}(t) = -m \ddot{z}(t) = -m \ddot{z}_0 \cos(\Omega t)$

Or $D = \frac{w}{w_0}$ D'où $w = w_0 \cdot D = \frac{p_0}{k} D = \frac{m \ddot{z}_0}{k} D$

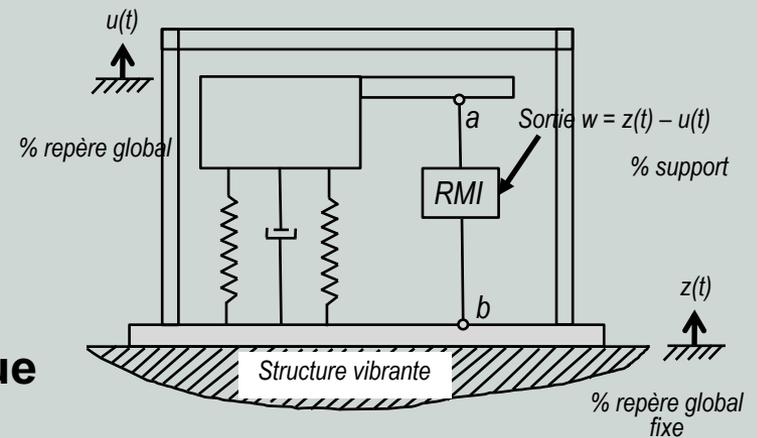
$$w = \frac{m}{k} \ddot{z}_0 D \quad (4.24)$$

« w » : amplitude maximale du mouvement relatif

« \ddot{z}_0 » : amplitude maximale de l'accélération du support

« D » coefficient d'amplification dynamique donné par (4.22):

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



Applications pratiques

i. Instruments de mesures vibratoires

Cas de l'accéléromètre

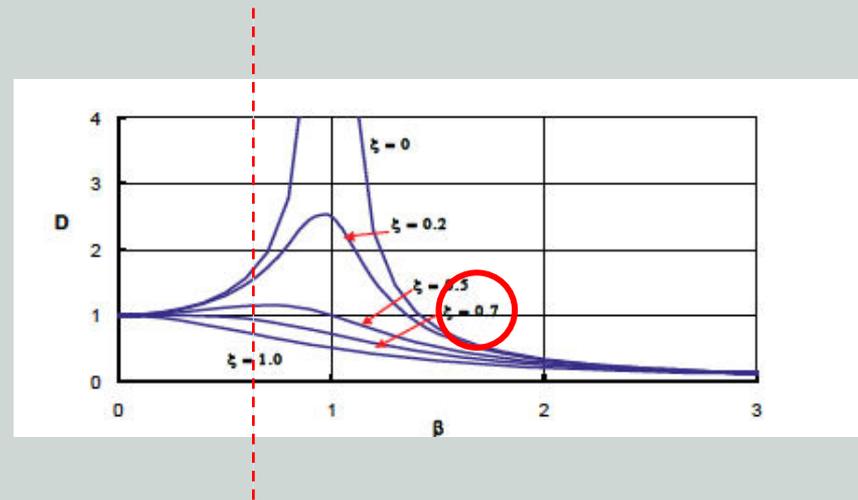
Il est utile de choisir un intervalle de fréquences opérationnel dans lequel D reste constant

L'accéléromètre sera utile dans cet intervalle de fréquences. Pas besoin de calibrer pour chaque fréquence

D'après le graphe :

Pour $\xi = 0.7$ et $0 < r < 0.6$ On a $D \approx 1$

Ainsi, d'après $w = \frac{m}{k} \ddot{z}_0 D$



- La réponse indiquée par l'instrument sera directement proportionnelle à l'accélération pour des fréquences allant jusqu'à 60% de la fréquence naturelle de l'instrument
- Instrument s'il est convenablement amorti ($\xi = 0.7$) fera un bon accéléromètre pour des fréquences relativement faibles
- On peut élargir son domaine d'application en augmentant la raideur du ressort.

Applications pratiques

i. Instruments de mesures vibratoires

Cas du vibromètre

$$z(t) = f(w)$$

❖ Mouvement (type déplacement) du support considéré harmonique

$$z(t) = Z \cos(\Omega t)$$

Alors $p_{\text{eff}}(t) = -m \ddot{z}(t) = m \Omega^2 Z \cos(\Omega t)$

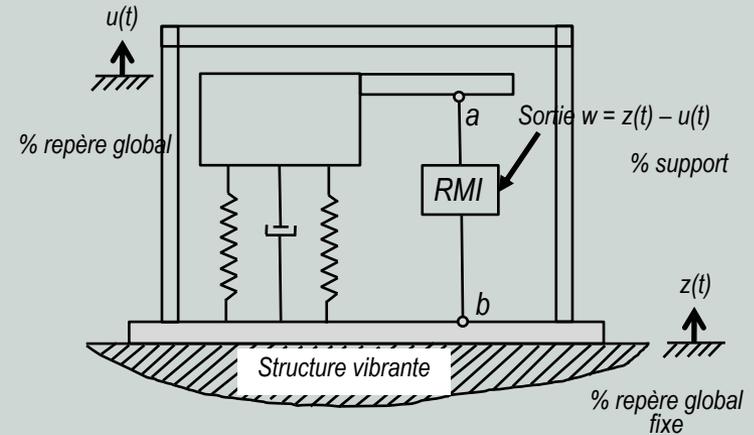
Or $D = \frac{w}{w_0}$ D'où $w = w_0 \cdot D = \frac{p_0}{k} D = \frac{m \Omega^2 Z}{k} D$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$ On aura $w = Z r^2 D$

(4.25)

« D » coefficient d'amplification dynamique donné par (4.22):

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



Applications pratiques

i. Instruments de mesures vibratoires

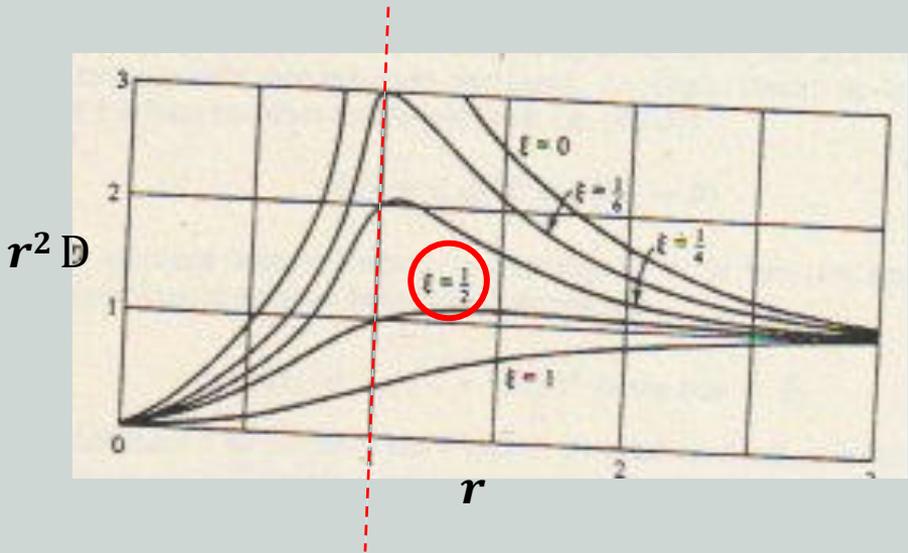
Cas du vibromètre

D'après le graphe :

Pour $\xi = 0.5$ et $r \geq 1$

On a $r^2 D \approx 1$

Ainsi, d'après $w = Z r^2 D$



- Instrument s'il est convenablement amorti ($\xi = 0.5$) fera un bon vibromètre (pour mesurer les déplacements $z(t)$ pour une fréquence naturelle faible par rapport à la fréquence de l'excitation ($r = \Omega/\omega_0$))
- On peut élargir son domaine d'application en réduisant sa fréquence naturelle. i.e en diminuant la raideur du ressort ou en augmentant la masse.

ii. Isolation vibratoire : Machine vibrante – Support fixe

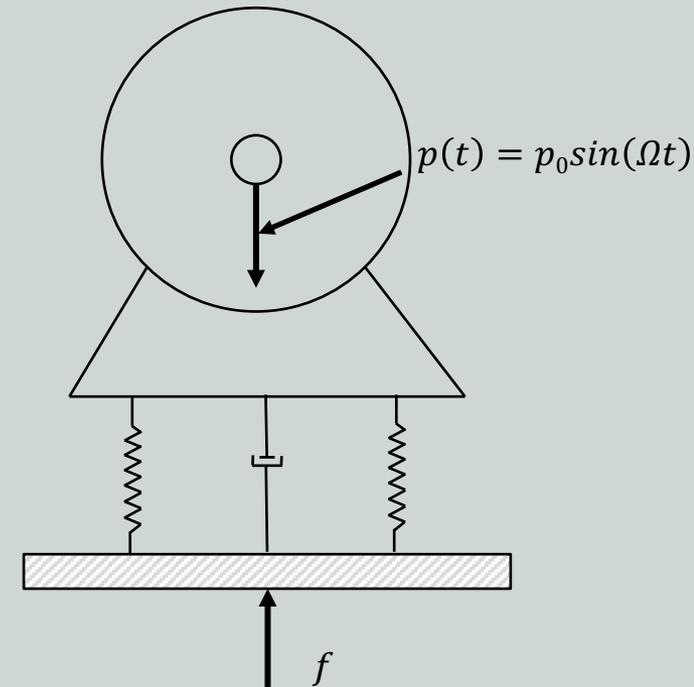
C'est le cas d'une machine tournante qui produit des forces vibratoires, $p(t) = p_0 \sin(\Omega t)$ due à un certain balourd susceptibles de détériorer la structure qui la porte.

En considérant un support à 1 SDDL de type ressort-masse, le déplacement de la machine en régime permanent est donné par:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} D \sin(\Omega t - \alpha)$$

Avec $D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$

Le bilan des forces ?



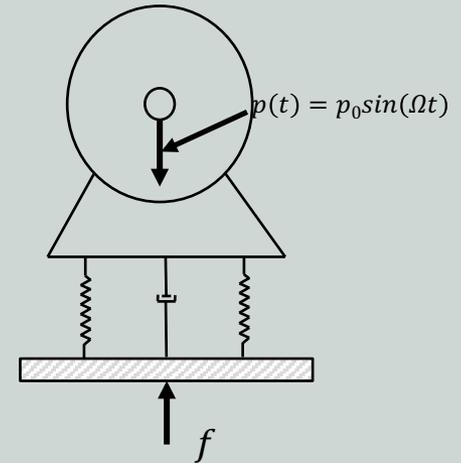
**Système d'isolation vibratoire
(Excitation par chargement)**

Applications pratiques

ii. Isolation vibratoire : Machine vibrante – Support fixe

Avec $u(t) = \frac{P_0}{k} D \sin(\Omega t - \alpha)$
et $\dot{u}(t) = \Omega \frac{P_0}{k} D \cos(\Omega t - \alpha)$

Le bilan des forces ?



Force du ressort sur la base $f_k = ku(t) = p_0 D \sin(\Omega t - \alpha)$ **(4.26)**

Force d'amortissement $f_a = c\dot{u}(t) = \frac{P_0}{k} c D \Omega \cos(\Omega t - \alpha)$ **(4.27)**
 $= 2 \xi r p_0 D \cos(\Omega t - \alpha)$

La force d'amortissement (cos) fait un déphasage de 90° avec celle du ressort (sin). D'où, à la base l'amplitude de la force sera:

$$f_{max} = \sqrt{f_{k,max}^2 + f_{a,max}^2} \quad \mathbf{(4.28)}$$

$$f_{max} = p_0 D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2} \quad \mathbf{(4.29)}$$

Applications pratiques

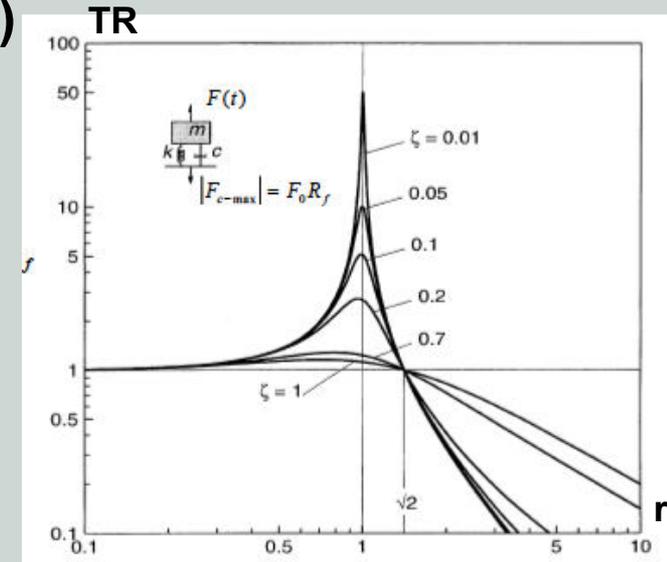
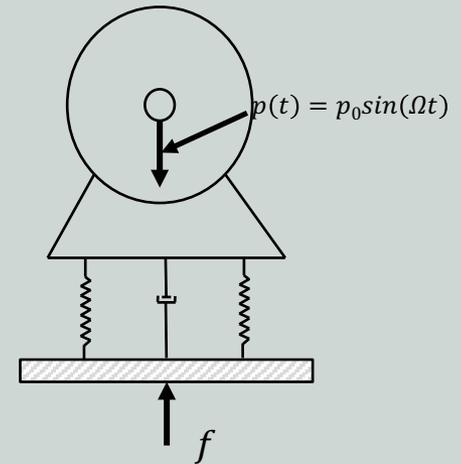
ii. Isolation vibratoire : Machine vibrante – Support fixe

transmittance?

Rapport entre la force maximale à la base et l'amplitude de la force appliquée

$$TR = \frac{f_{max}}{p_0} = \frac{p_0 D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2}}{p_0} \quad (4.30)$$

$$= D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2}$$



- Toutes les courbes passent par le point ($r = \sqrt{2}$)
- Pour $r < \sqrt{2}$, TR est toujours supérieur à « 1 » quelque soit l'amortissement. La force transmise est donc toujours supérieure à la force appliquée statiquement.
- Pour $r > \sqrt{2}$, TR est inférieure à « 1 ». La force transmise est toujours faible par rapport à la force statique et elle est d'autant plus faible que l'amortissement est faible. L'amortissement tend à réduire l'efficacité d'un système d'isolation en vibration pour ces valeurs de « r ».

Conclusion

- Les ressorts de suspension d'une machine doivent être dimensionnés de telle sorte que la fréquence de résonance de la machine sur sa suspension soit petite vis-à-vis de celle de l'excitation.
- L'amortissement n'est avantageux que dans le domaine de fréquence « $r < \sqrt{2}$ », au-delà, sa présence détériore la qualité de l'isolation

iii. Isolation vibratoire : Support vibrant

C'est le cas d'une structure qui vibre de manière conséquente et qui porte des instruments fragiles, des équipements sur un véhicule, des capteurs de vibration,...

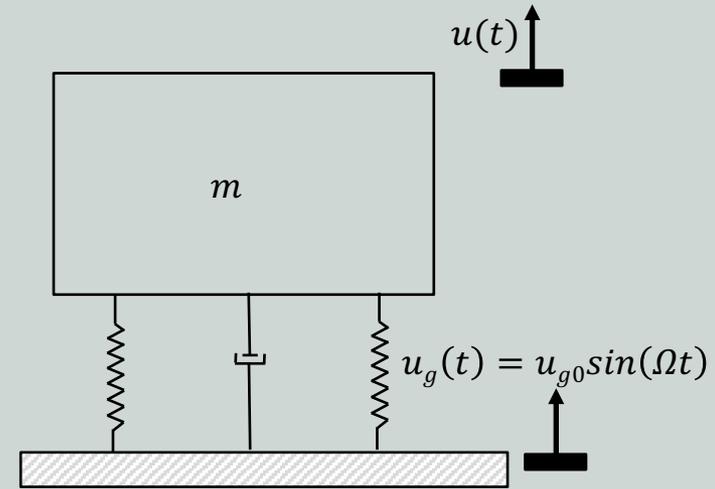
La masse « m » à isoler est portée par 1 SDDL sur une dalle soumise à des mouvements harmoniques verticaux.

Le déplacement de la masse par rapport à la base est donné par:

$$u(t) = u_{g0} r^2 D \sin(\Omega t - \alpha)$$

En ajoutant vectoriellement le mouvement de la base, on peut facilement montrer que le mouvement total de la masse sera:

$$u_t(t) = u_{g0} D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2} \sin(\Omega t - \alpha)$$



**Système d'isolation vibratoire
(Excitation par déplacement)**

Applications pratiques

iii. Isolation vibratoire : Support vibrant

$$u(t) = u_{g0} D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2} \sin(\Omega t - \bar{\alpha})$$

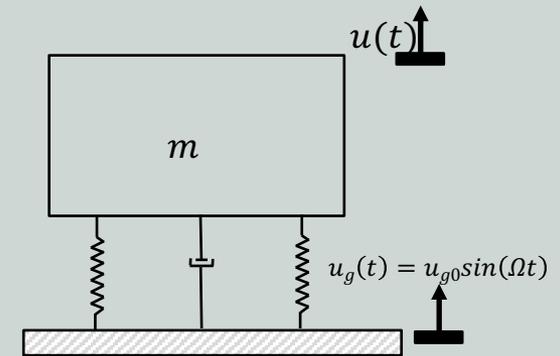
La transmittance est définie par:

$$\begin{aligned} TR &= \frac{f_{max}}{f_0} = \frac{u_{g0} D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2}}{u_{g0}} \\ &= D \sqrt{1 + (2 \xi r)^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Même formule que l'équation (4.30), donc les mêmes conclusions

Rem: Le plus souvent, on s'intéresse à l'efficacité d'un système d'isolation plutôt qu'à sa transmittance

$$efficacité = 1 - TR \quad (4.32)$$



iv. Mesures de l'amortissement

Le plus souvent, « m » et « k » sont déterminés facilement, par exemple par des considérations physiques simples.

Par contre « c » reste complexe à définir et on a recours souvent aux méthodes expérimentales

Déjà vu : Le décrétement logarithmique !

Il existe d'autres, telles que :

- Méthode du décrétement logarithmique ou méthode de décroissance des oscillations libres (**Plus simple et plus utilisée**) (voir chap 3)
- Amplification résonante
- Méthode de la demi-puissance (largeur de bande)
- Déperdition d'énergie par cycle (essai de résonance)
- ...

Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

a. Méthode : Amplification résonante

Nécessite un appareillage pour appliquer à la structure des oscillations d'amplitudes et de fréquences prédéterminés.

On s'intéresse au comportement harmonique en régime permanent.

On construit la courbe de réponse en fréquence en appliquant des chargements harmoniques $p(t) = p_0 \sin(\Omega t)$. à des intervalles de fréquences autour de la fréquence de résonance.

On trace la courbe variations des amplitudes des déplacements en fonction des fréquences appliquées.

On sait que pour une fréquence donnée, le facteur d'amplification dynamique est le rapport de la réponse en amplitudes à cette fréquence et de la réponse à la fréquence zéro (statique).

$$\frac{U}{U_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = D$$

Avec $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$

Pour un système amorti soumis à une excitation harmonique.

Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

a. Méthode : Amplification résonante

$$\frac{U}{U_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = D$$

Or à la résonance, on « $r=1$ » ($\Omega = \omega_0$), d'où:

$$D = \frac{1}{2\xi} \quad \text{D'où:} \quad \xi = \frac{1}{2D} \quad (4.33)$$

Si : U_0 : amplitude de la réponse statique

$U_{r=1}$: amplitude à la résonance

On aura, avec $D = \frac{U_{r=1}}{U_0}$ D'où: $\xi = \frac{1}{2} \frac{U_0}{U_{r=1}}$ (4.34)

Conclusion

- Il suffit de mesurer les amplitudes des déplacements relatifs, et calculer « ξ ».
- Cependant, la mesure des déplacements statiques peut poser problème, car la plupart des dispositifs capables de produire le chargement ne peuvent opérer à fréquence nulle.

Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

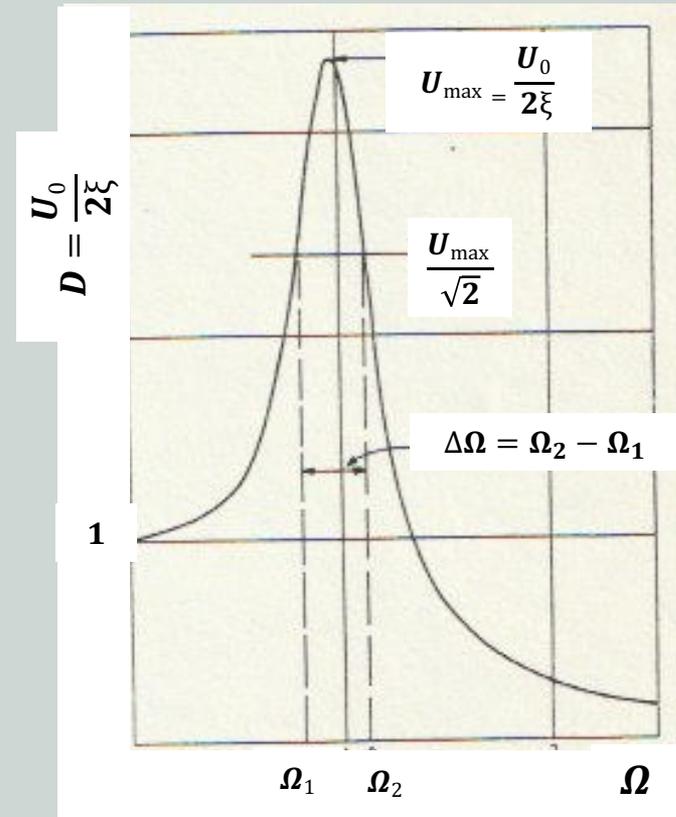
b. Méthode : de la demi-puissance (largeur de bande)

Toujours avec un appareillage pour appliquer à la structure des oscillations d'amplitudes et de fréquences prédéterminés.

On s'intéresse au comportement harmonique en régime permanent.

On trace la courbe des variations des amplitudes de déplacements en fonction des fréquences appliquées

On s'intéresse aux fréquences avant et après résonance pour lesquelles l'amplitude de la réponse est $(\sqrt{2}/2)$ fois l'amplitude de résonance.



On les appelle les **fréquences à demi-puissance** (Ω_1 et Ω_2) .

Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

b. Méthode : de la demi-puissance (largeur de bande)

Sachant que (éq. 4.21)

$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \text{Ou} \quad \frac{U_i}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

On peut obtenir (Ω_1 et Ω_2) par

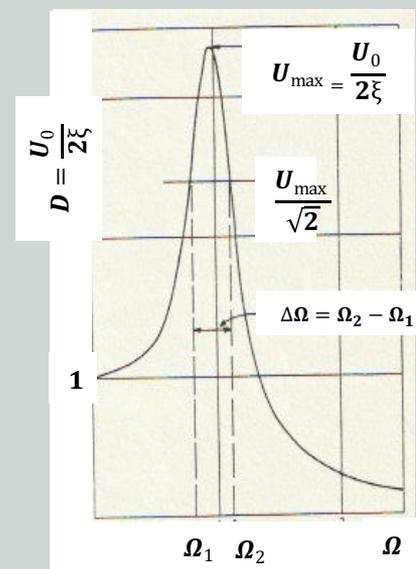
$$U_i = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{r=1} \quad \text{Or} \quad \left(\frac{U}{U_0}\right)_{r=1} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{2\xi} = U_0 \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$r_i^4 - 2(1 - 2\xi^2)r_i^2 + (1 - 8\xi^2) = 0 \quad (4.35)$$

Les racines de cette équation

$$r_i^2 = (1 - 2\xi^2) \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2} \quad (4.36)$$



Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement b. Méthode : de la demi-puissance (largeur de bande)

$$r_i^2 = (1 - 2\xi^2) \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

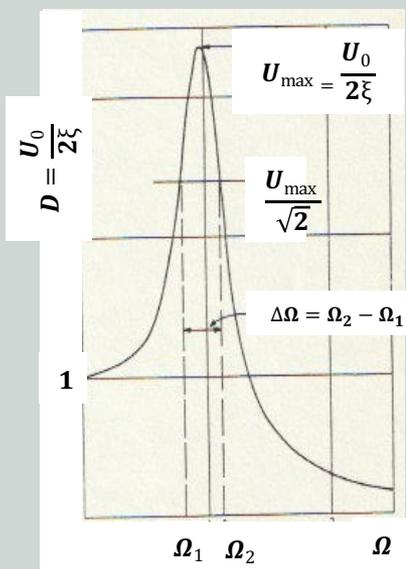
En négligeant le « ξ^2 » ($\xi \ll 1$), on aura

$$r_i^2 = (1 \pm 2\xi) \quad (4.36)$$

D'où

$$\begin{aligned} r_1 &= (1 - 2\xi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}(2\xi) + \dots \approx 1 - \xi \\ r_2 &= (1 + 2\xi)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2\xi) + \dots \approx 1 + \xi \end{aligned} \quad (4.37)$$

D'où $r_2 - r_1 = 2\xi$ (4.38)



Conclusion (Procédure)

- Déterminer la fréquence naturelle du S1DDL
- Déterminer les points sur la courbe de réponse en fréquences dont l'amplitude est égale à « $\frac{\sqrt{2}}{2} U r_{=1}$ » (Ω_1 et Ω_2).
- De (4.38), $\xi = \frac{r_2 - r_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\omega_0}$

Cette méthode exige un tracé précis de la courbe au voisinage de la résonance

Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

c. Méthode : Déperdition d'énergie par cycle (essai de résonance)

Nécessite un appareillage pour mesurer le déphasage entre la force d'excitation et les déplacements résultants.

Pas besoin de tracer la courbe de réponse complète, on peut se contenter d'essais effectués à la résonance.

Procédé

Consiste à obtenir la résonance en ajustant la fréquence d'entrée jusqu'à ce que le déphasage entre l'excitation et la réponse atteigne 90° .

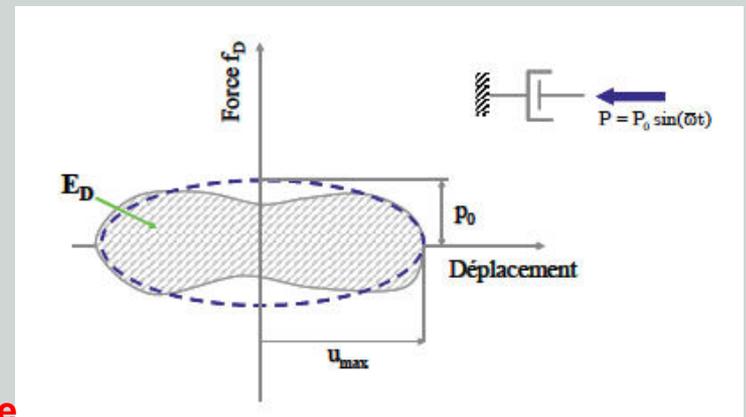
On aura en équilibre parfait entre la charge et la force d'amortissement dont le graphe est donné par (amortissement en fonction du déplacement)

Pour un amortissement de type visqueux la courbe est une ellipse (en pointillé), on aura alors:

(4.39)

$$c = \frac{\text{Force d'amortissement maximale}}{\text{Vitesse maximale}} = \frac{f_{a \max}}{\dot{u}_{\max}}$$

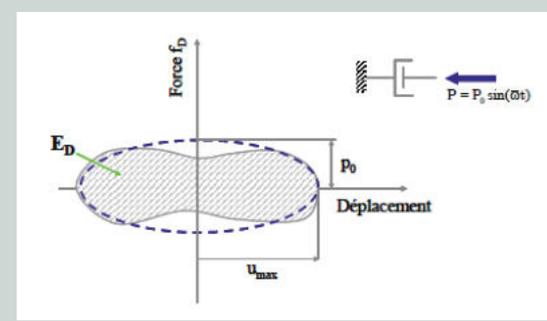
Pour un amortissement non visqueux la courbe sera autre (en trait fort)



Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

c. Méthode : Déperdition d'énergie par cycle (essai de résonance)



A la résonance, $f_a = p$

D'où

$$c = \frac{\text{Force d'amortissement maximale}}{\text{Vitesse maximale}} = \frac{f_{a \max}}{\dot{u}_{\max}} = \frac{P_0}{\Omega u_{\max}} \quad (4.40)$$

L'énergie dissipé par l'amortisseur par cycle,

$$E_c \oint f_a du = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} (c\dot{u})\dot{u} dt = \pi c \Omega u_{\max}^2 \quad (4.41)$$

Qui est égale à l'énergie dissipé E_D dissipé par le système, d'où, on peut tirer « c » :

$$c_{eq} = \frac{E_D}{\pi \Omega u_{\max}^2} \quad (4.42)$$

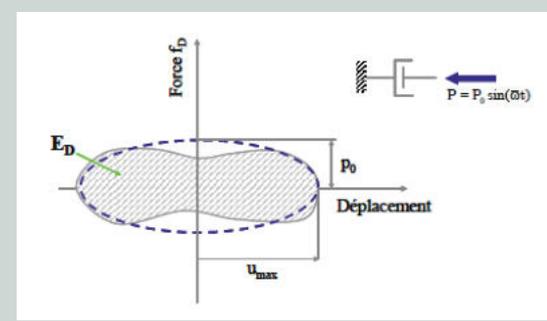
- Valable pour les cycles de sollicitations sont d'amplitudes faibles à modérées.
- Inapproprié pour une amplitude de déformation important, les mécanismes de dissipation ont pour origine les déformations plastiques du système, très différente d'une dissipation visqueuse

Applications pratiques

iv. Mesures de l'amortissement

c. Méthode : Déperdition d'énergie par cycle (essai de résonance)

$$c_{eq} = \frac{E_D}{\pi \Omega u_{max}^2} \quad c_{eq} = f(\Omega)$$



Il est plus commode d'utiliser c_{cr} au lieu de c_{eq} . On sait que (éq. 3.15)

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\omega_0 m = \frac{2k}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\omega_0 m}$$

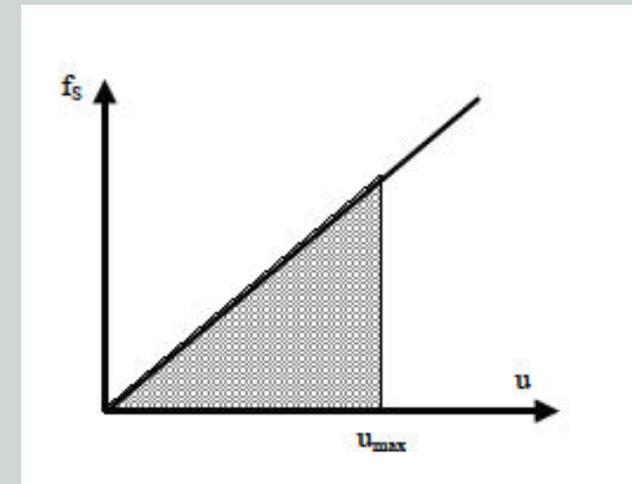
En chargeant le système à vitesse très lente, on s'approche du système statique et donc on peut facilement mesurer la rigidité. On obtient le diagramme linéaire.

En se plaçant à la résonance ($\Omega = \omega_0$), on aura:

$$\text{L'aire } E_s = \frac{1}{2} f_s u_{max} = \frac{1}{2} k u_{max}^2 \quad \text{D'où } k = \frac{2E_s}{u_{max}^2}$$

$$\text{Ainsi: } \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{E_D}{\pi \Omega u_{max}^2} \frac{\omega_0}{2k} = \frac{E_D}{\pi \Omega u_{max}^2} \frac{\omega_0}{2} \frac{u_{max}^2}{2E_s}$$

$$\xi = \frac{E_D}{4\pi E_s} \quad (\text{Indépendante de } \Omega) \quad (4.43)$$



Merci. Fin du chapitre 4

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Chap. 5

**Vibrations forcées des
systèmes à 01 DDL:
Excitation Périodique, Impulsive**