

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

E-mail: [abdellatif\\_megnounif@yahoo.fr](mailto:abdellatif_megnounif@yahoo.fr)

**Chap. 6**

## **Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL: Excitation Quelconque**

# 1. Introduction

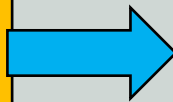
## Rappel équation du mouvement

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Dans ce chapitre  $p(t) \neq 0$

On s'intéresse à toute force dynamique (simple ou complexe)

- ❖ Force extérieure quelconque (somme de petites forces)
- ❖  $p(t) \neq 0$  (forcée)
- ❖ Déplacement et/ou vitesse initiales connues (**nulles ou non nulles**)



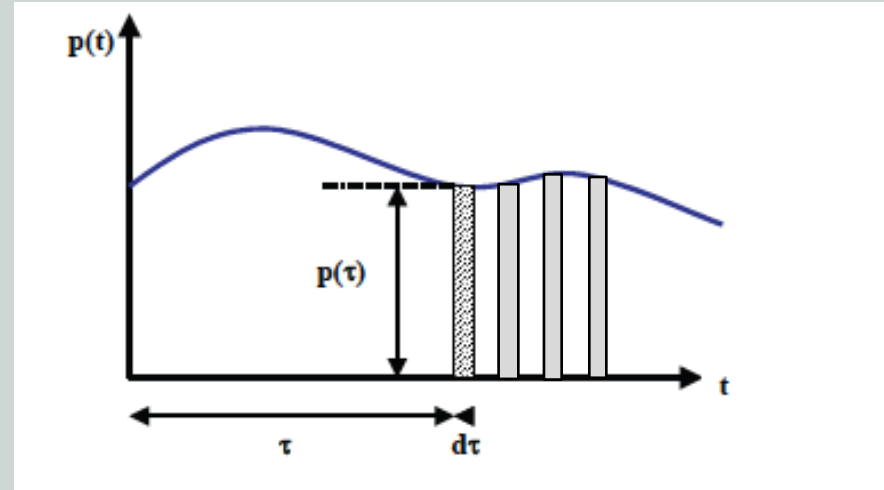
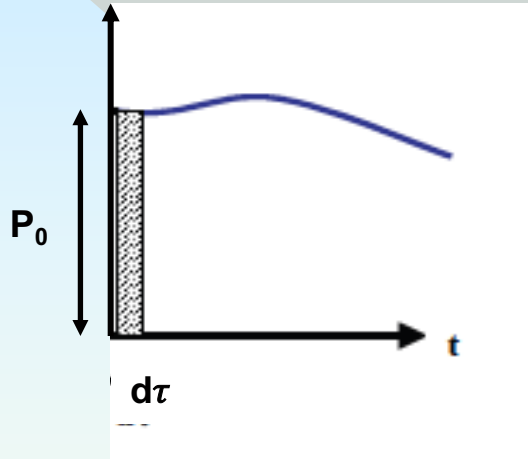
### Réponse

Vibration forcée de la structure

- ❖ Mouvement selon la nature de l'excitation
- ❖ Pour n'importe quelle force, superposition de plusieurs solutions due à la superposition de charges de très courte durée
- ❖ Solution par intégrale de Duhamel ou par la méthode Pas-à-pas

## 2. Réponse à une impulsion de très courte durée

L'impulsion de très courte durée est montrée ci-dessous:



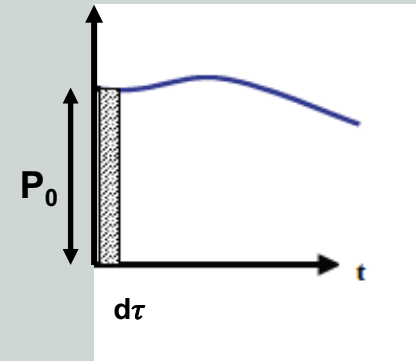
L'idée est que n'importe quelle force, elle peut être la somme de plusieurs impulsions de très courte durée  $p(\tau) d\tau$

**En calculant la réponse due à une seule impulsion, on peut retrouver la réponse totale par sommation, en utilisant le principe de superposition**

## Réponse à une impulsion de très courte durée

L'impulsion de très courte durée égale à  $P_0$ , à  $t=t_0$

$$m \ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (6.1)$$



Avec CI :  $u(t) = \dot{u}(0) = 0$

En intégrant sur un intervalle de temps «  $\Delta t$  » très court, et on prend la limite qd «  $\Delta t \rightarrow 0$  » on aura:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} (m \ddot{u}(t) + ku(t)) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} p(t) dt \quad (6.2)$$

Sachant que:

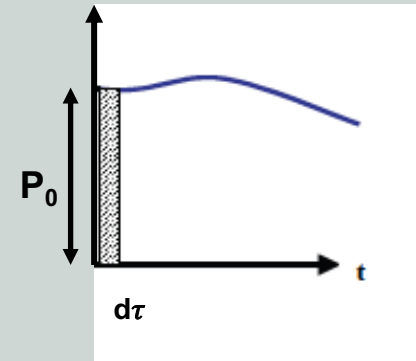
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} (m \ddot{u}(t)) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [m\dot{u}(t)]_0^{\Delta t} = m\dot{u}[0^+] \quad (6.3)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} (ku(t)) dt = 0 \quad (6.4)$$

## Réponse à une impulsion de très courte durée

Posons

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} p(t) dt = \mathcal{J} \quad (6.5)$$



En remplaçant (6.3) et (6.5) dans (6.2), on aura

$$\mathcal{J} = m\dot{u}[0^+] \quad (6.6)$$

D'où:

$$\dot{u}[0^+] = \frac{\mathcal{J}}{m} \quad (6.7)$$

Soumettre un système à une impulsion « $\mathcal{J}$ » revient à lui communiquer une vitesse initiale  $\dot{u}[0^+] = \frac{\mathcal{J}}{m}$  qui sera une condition initiale pour entamer le vibration (déplacement initial nul).

## Réponse à une impulsion de très courte durée

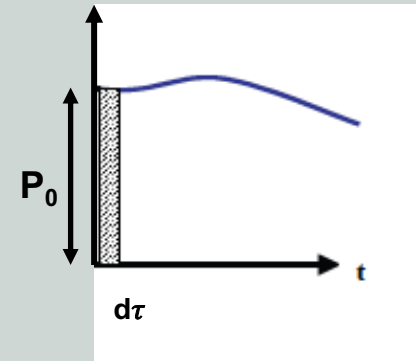
Après  $d\tau$ , le système est en oscillation libre

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Avec:  $u[d\tau] = 0 \quad \dot{u}[d\tau] = \frac{\mathcal{J}}{m}$

En remplaçant, on aura

$$u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (6.8)$$



D'une manière générale, si l'impulsion « $\mathcal{J}$ » agit à « $t = \tau$ », on aura

**Non amorti**  $u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \tau)) \quad (6.9)$

Si le système est amorti, on aura:

**amorti**  $u(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) \quad (6.10)$

# 3. Réponse d'un SSDDL à une excitation quelconque

- Sa variation dans le temps est quelconque
- Certaines excitations sont définies par des graphes de variation
- La solution analytique est généralement complexe.

04 méthodes peuvent être utilisées

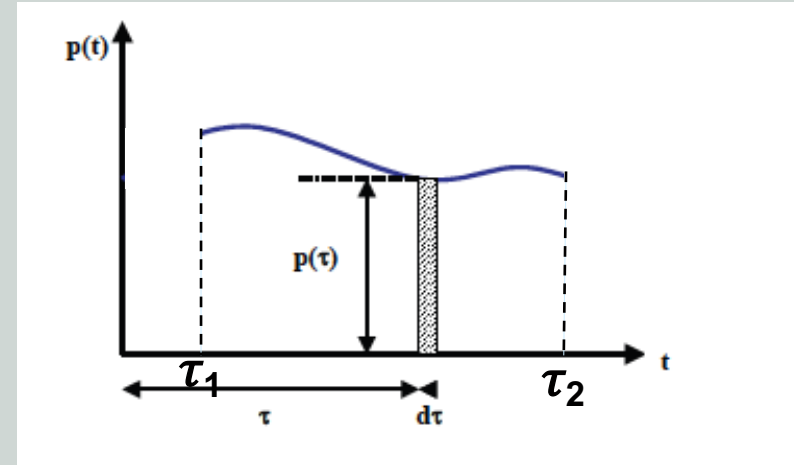
- ✓ Méthode de l'intégrale de Duhamel
- ✓ La méthode de la transformée de Laplace
- ✓ La méthode de la transformée de Fourier
- ✓ Méthode numérique Pas-à-pas.

Les plus utilisées: **Duhamel et pas-à-pas**

## i. Méthode de l'intégrale de Duhamel

Dans cette méthode,  $p(t)$  est considérée comme la somme de plusieurs impulsions de très courte durée.

L'aire hachurée est une impulsion typique  $p(\tau) d\tau$  à «  $t = \tau$  »



Supposons que les CI ne sont pas nulles:  $u(0) = u_{\tau_1}$  et  $\dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1}$

La réponse pour  $t \geq \tau_1$  **Non amorti**

$$u(t) = \left( \frac{\dot{u}_{\tau_1}}{\omega_0} \right) \sin \omega_0(t - \tau_1) + (u_{\tau_1}) \cos \omega_0(t - \tau_1) + \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau$$

(6.11)

Pour des CI nulles:  $u(0) = u_{\tau_1=0}$  et  $\dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1=0}$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau$$

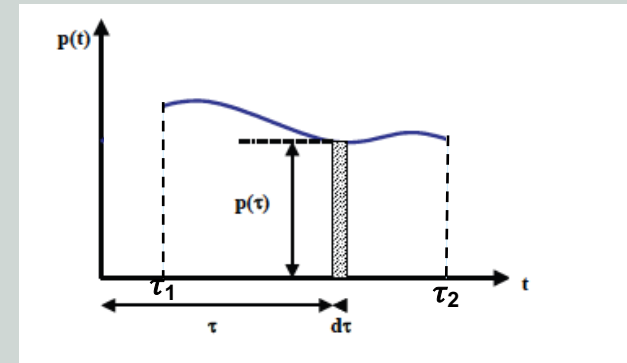
(6.12)



## Réponse d'un SSDDL à une excitation quelconque

### i. Méthode de l'intégrale de Duhamel

Pour un système amorti, on aura



Avec des CI ne sont pas nulles:  $u(0) = u_{\tau_1}$  et  $\dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1}$

La réponse pour  $t \geq \tau_1$  **amorti**

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a} (\dot{u}_{\tau_1} + \xi\omega_0 u_{\tau_1}) e^{-\xi\omega_0(t-\tau_1)} \sin\omega_a(t - \tau_1) + (u_{\tau_1}) e^{-\xi\omega_0(t-\tau_1)} \cos\omega_0(t - \tau_1) + \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau$$

(6.13)

Pour des CI nulles:  $u(0) = u_{\tau_1=0}$  et  $\dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1=0}$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau$$

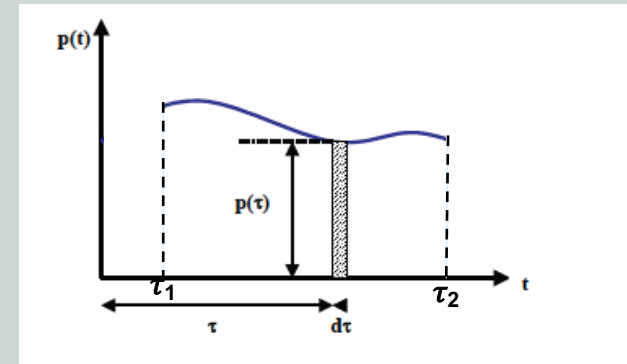
(6.14)

## Réponse d'un SSDDL à une excitation quelconque

### i. Méthode de l'intégrale de Duhamel

Cas d'une excitation du support par une accélération  $\ddot{u}_g$

Il faut juste remplacer  $p(\tau)$  par «  $m \ddot{u}_g$  » dans les éq. (6.11), (6.12), (6.13) et (6.14).



Exemple pour des CI nulles:

$$u(0) = u_{\tau_1=0} \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1=0}$$

**Non amorti**

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau = \frac{-1}{\omega_0} \int_{\tau_1}^t \ddot{u}_g(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau \quad (6.15)$$

**amorti**

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau = \frac{-1}{\omega_a} \int_{\tau_1}^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau \quad (6.16)$$

On peut, par exemple, calculer l'effort tranchant, pour chaque cas d'accélération du support

$$T(t) = k u(t) \quad (6.17)$$

## 4. Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel

- **Souvent, le chargement est connu par des données expérimentales (cas par ex. des séismes).**
- **Dans ce cas, le calcul analytique de l'intégrale de Duhamel n'est pas possible.**
- **On a recours aux méthodes numériques pour Duhamel.**

**Nous considérons dans ce qui suit, le cas des CI au repos**

$$u(0) = u_{\tau_1=0} \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1=0}$$

i. **Cas non amorti**

La solution est (éq. 6.12)

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau$$

Or  $\sin(\omega_0(t - \tau)) = \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 \tau) - \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 \tau)$

D'où:  $u(t) = \sin(\omega_0 t) \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau - \cos(\omega_0 t) \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0 \tau) d\tau$

Posons  $A(t) = \int_{\tau_1}^t p(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau$  **et**  $B(t) = \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0 \tau) d\tau$  **(6.18)**

Soit:  $u(t) = \frac{1}{m\omega_0} [A(t) \sin(\omega_0 t) - B(t) \cos(\omega_0 t)]$  **(6.19)**

**Il suffit juste d'évaluer A(t) et B(t) numériquement**



## i. Cas non amorti

**Exemple, avant de généraliser, supposons le cas simple de variation linéaire de la fonction à l'intérieur de l'intervalle «  $\Delta t_i$  »**

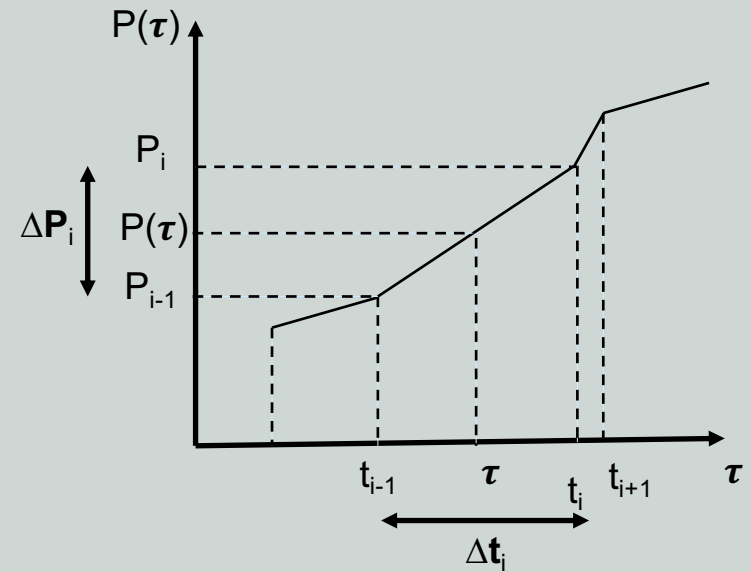
**On a:** 
$$A_i - A_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau$$

$$A_i = A_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau \quad (6.20)$$

**et** 
$$\frac{P(\tau) - P_{i-1}}{\Delta P_i} = \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t_i} \quad \text{D'où} \quad P(\tau) = P_{i-1} + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}) \quad (6.21)$$

**En remplaçant (6.21) dans (6.20), on aura**

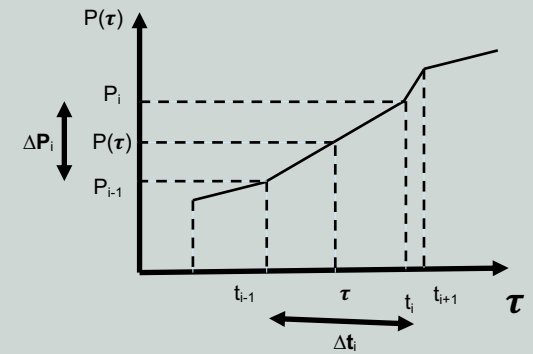
$$A_i = A_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( P_{i-1} + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}) \right) \cos(\omega_0 \tau) d\tau \quad (6.22)$$



## Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel

### i. Cas non amorti

$$A_i = A_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( P_{i-1} + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}) \right) \cos(\omega_0 \tau) d\tau \quad (6.22)$$



En intégrant (6.22), on aura:

$$A_i = A_{i-1} + \left( P_{i-1} - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right) \frac{(\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta P_i}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1} + \omega_0 (t_i \sin \omega_0 t_i - t_{i-1} \sin \omega_0 t_{i-1})] \quad (6.23)$$

De façon similaire, on peut trouver  $B_i$

$$B_i = B_{i-1} - \left( P_{i-1} - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right) \frac{(\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta P_i}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1} - \omega_0 (t_i \cos \omega_0 t_i - t_{i-1} \cos \omega_0 t_{i-1})] \quad (6.24)$$

Ayant  $A_i$  et  $B_i$  on peut calculer la réponse pas à pas

## ii. Cas amorti

La solution est (éq. 6.14)

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau$$

Or  $\sin(\omega_a(t-\tau)) = \sin(\omega_a t) \cos(\omega_a \tau) - \cos(\omega_a t) \sin(\omega_a \tau)$

et  $e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} = e^{-\xi\omega_0 t + \xi\omega_0 \tau} = e^{-\xi\omega_0 t} \times e^{+\xi\omega_0 \tau}$

D'où:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_a t) \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{+\xi\omega_0 \tau} \cos(\omega_a \tau) d\tau$$

$$- e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_a t) \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{+\xi\omega_0 \tau} \sin(\omega_a \tau) d\tau$$

Posons  $A(t) = \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{+\xi\omega_0 \tau} \cos(\omega_a \tau) d\tau$  et  $B(t) = \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{+\xi\omega_0 \tau} \sin(\omega_a \tau) d\tau$  (6.25)

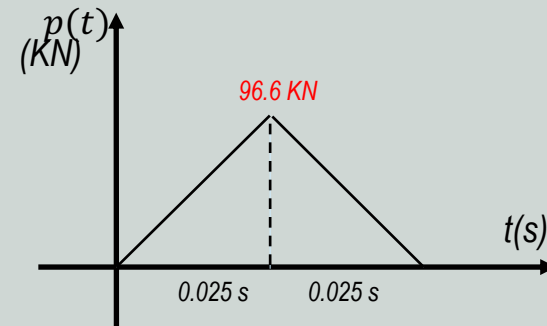
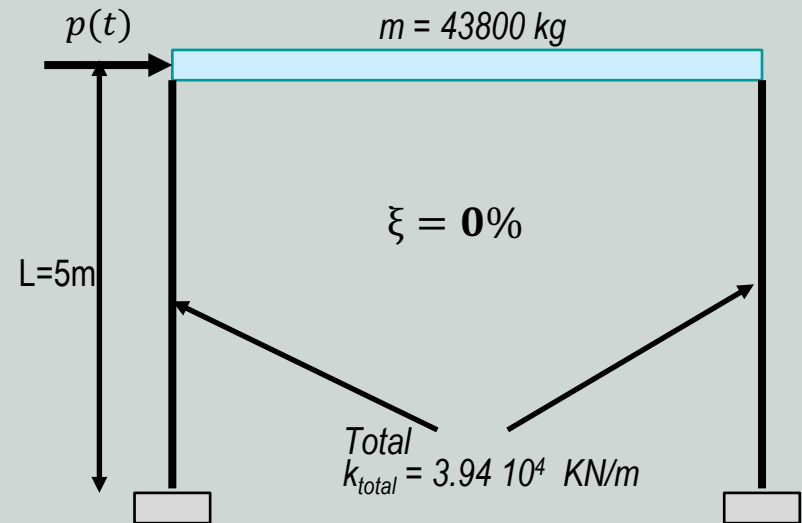
Soit:  $u(t) = \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{m\omega_a} [A(t) \sin(\omega_a t) - B(t) \cos(\omega_a t)]$  (6.26)

Il suffit juste d'évaluer A(t) et B(t) numériquement

## Exemple 1

Considérons le portique de la figure ci-contre avec les données mentionnées, soumis à une force excitatrice  $p(t)$  donnée par son graphe de variation de la force par rapport au temps. En supposant un comportement élastique de la réponse dynamique,

- i) Déterminer la variation de la réponse en fonction du temps en utilisant l'intégral de Duhamel avec une variation linéaire de la fonction.





## Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3.94 \cdot 10^7}{43800}} = 30 \text{ rd/s}$$

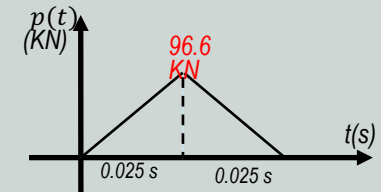
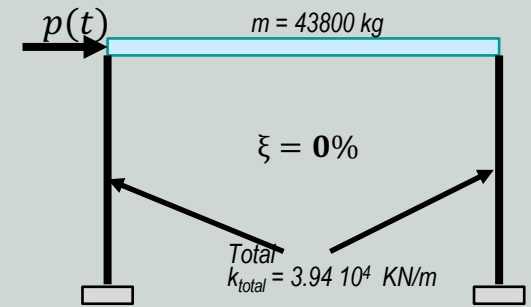
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.21 \text{ s}$$

En utilisant l'intégrale de Duhamel, on aura (éqs. 6.15, 6.23 et 6.24):

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau \quad u(t) = \frac{1}{m\omega_0} [A(t) \sin(\omega_0 t) - B(t) \cos(\omega_0 t)]$$

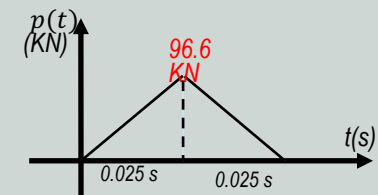
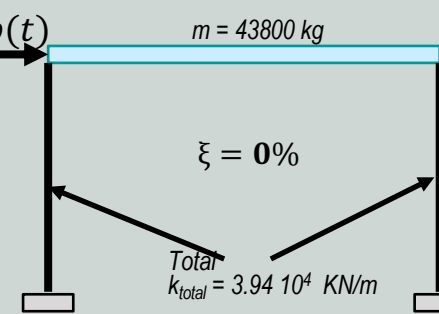
$$A_i = A_{i-1} + \left( p_{i-1} - t_{i-1} \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \right) \frac{(\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta p_i}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1} + \omega_0 (t_i \sin \omega_0 t_i - t_{i-1} \sin \omega_0 t_{i-1})]$$

$$B_i = B_{i-1} - \left( p_{i-1} - t_{i-1} \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \right) \frac{(\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta p_i}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1} - \omega_0 (t_i \cos \omega_0 t_i - t_{i-1} \cos \omega_0 t_{i-1})]$$



# Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel

t	p (N)	$\Delta p$	$\Delta A$	$\Delta B$	A	B	u(t) (mm)	T=u.k/2 (KN)	M=T.L/2 (KN.m)
0	0				0,0000	0,0000	<b>0,0000</b>	0,00	0,0000
0,005	19320	19320	48,0287	4,8191	48,0287	4,8191	<b>0,0018</b>	0,07	0,0904
0,01	38640	19320	140,8460	33,4742	188,8747	38,2934	<b>0,0146</b>	0,58	0,7209
0,015	57960	19320	224,0650	89,4949	412,9396	127,7882	<b>0,0491</b>	1,94	2,4193
0,02	77280	19320	291,6869	170,3456	704,6266	298,1338	<b>0,1155</b>	4,55	5,6897
0,025	96600	19320	338,3011	272,3304	1042,9277	570,4643	<b>0,2234</b>	8,80	11,0006
0,03	77280	-19320	295,5787	318,1898	1338,5064	888,6540	<b>0,3775</b>	14,88	18,5940
0,035	57960	-19320	190,5520	278,9065	1529,0584	1167,5605	<b>0,5673</b>	22,35	27,9382
0,04	38640	-19320	105,1204	217,1730	1634,1788	1384,7336	<b>0,7773</b>	30,62	38,2812
0,045	19320	-19320	43,3534	138,1253	1677,5322	1522,8589	<b>0,9919</b>	39,08	48,8486
0,05	0	-19320	8,2045	47,5674	1685,7367	1570,4263	<b>1,1951</b>	47,09	58,8611
0,055	0	0	0,0000	0,0000	1685,7367	1570,4263	<b>1,3734</b>	54,11	67,6421
0,06	0	0	0,0000	0,0000	1685,7367	1570,4263	<b>1,5209</b>	59,92	74,9040

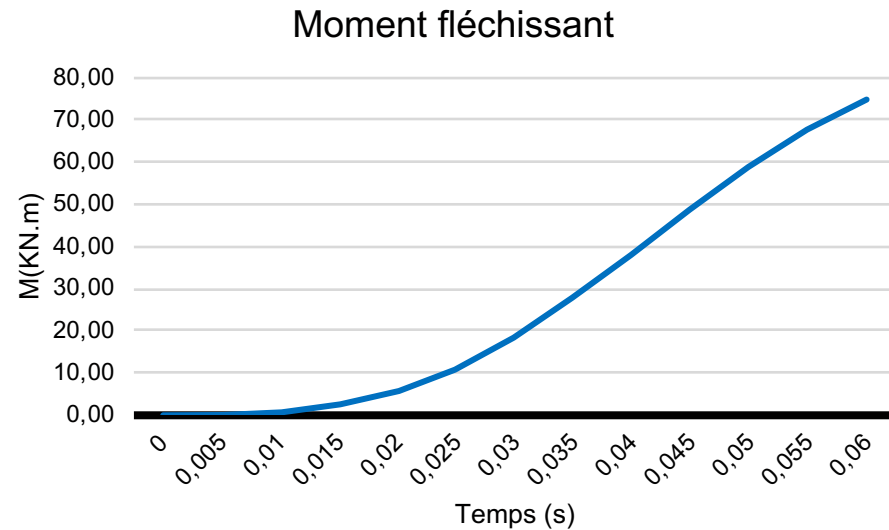
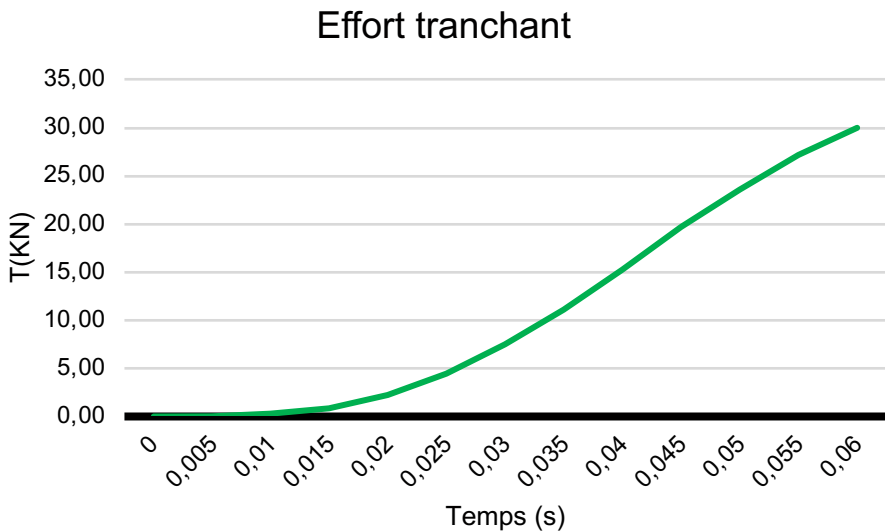
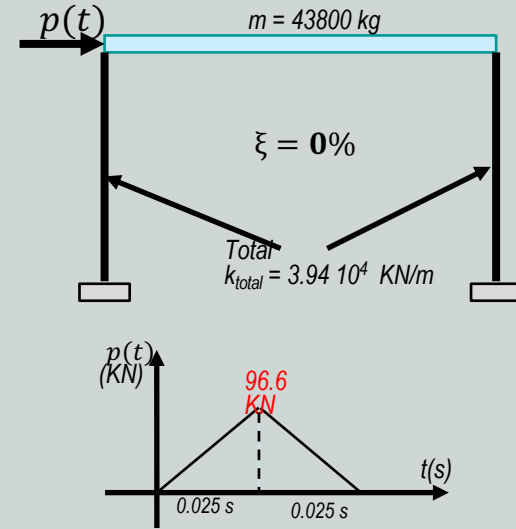
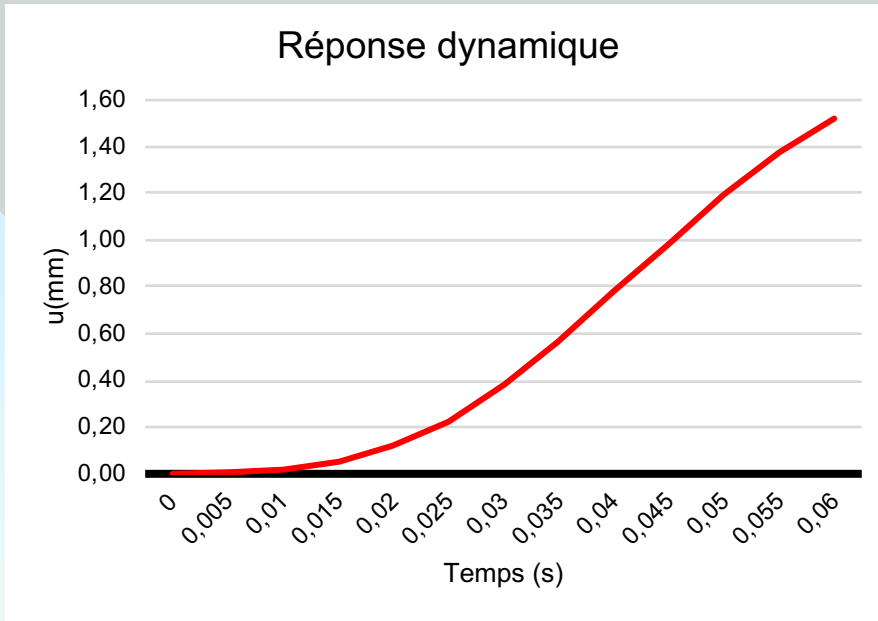


$$A_i = A_{i-1} + \left( p_{i-1} - t_{i-1} \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \right) \frac{(\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta p_i}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1} + \omega_0 (t_i \sin \omega_0 t_i - t_{i-1} \sin \omega_0 t_{i-1})]$$

$$B_i = B_{i-1} - \left( p_{i-1} - t_{i-1} \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \right) \frac{(\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta p_i}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1} - \omega_0 (t_i \cos \omega_0 t_i - t_{i-1} \cos \omega_0 t_{i-1})]$$

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_0} [A(t) \sin(\omega_0 t) - B(t) \cos(\omega_0 t)]$$

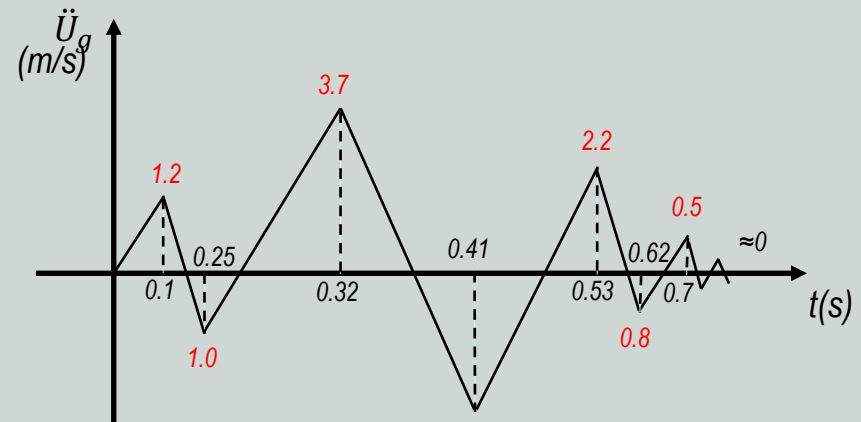
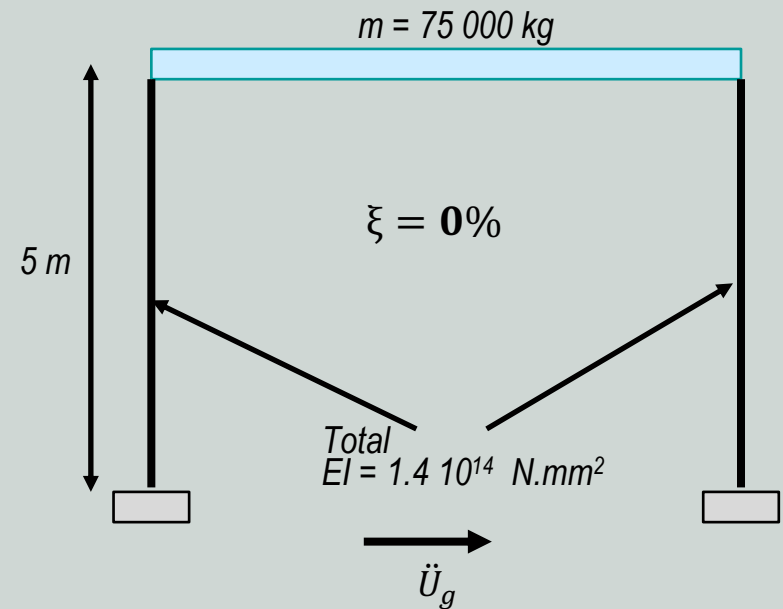
# Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel



## Exemple 2

Considérons le portique de la figure ci-contre avec les données mentionnées, soumis à l'excitation du support donnée par son graphe de variation de l'accélération du sol par rapport au temps. En supposant un comportement élastique de la réponse dynamique,

- i) Déterminer la variation de la réponse en fonction du temps en utilisant l'intégrale de Duhamel avec une variation linéaire de la fonction



## Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel

Les poteaux encasturé-encasturé, d'où (voir chap 2).

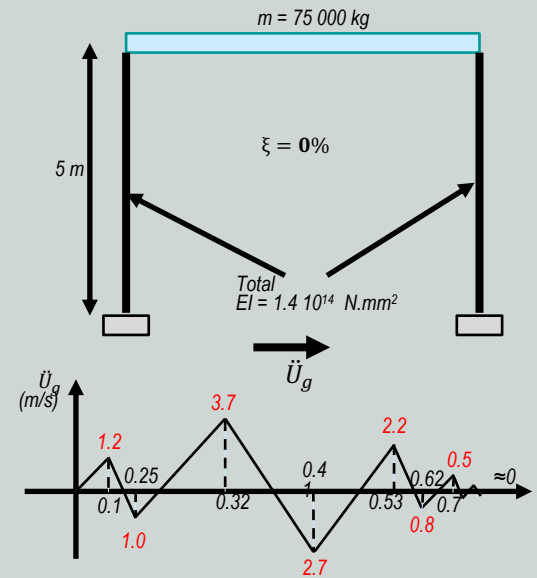
$$k = 12 \frac{EI}{H^3}$$

A.N :  $k = \left( 12 \frac{1.4 \cdot 10^{14}}{5000^3} \right) = 13\,440 \text{ N/mm}$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{13\,440}{75}} = 13.38 \text{ rd/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.47 \text{ s}$$



En utilisant l'intégrale de Duhamel, on aura (éqs. 6.15, 6.23 et 6.24):

Puisque  
 $p(\tau) = m \ddot{u}_g(\tau)$

$$u(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{\tau_1}^t \ddot{u}_g(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau \quad u(t) = \frac{1}{\omega_0} [A(t) \sin(\omega_0 t) - B(t) \cos(\omega_0 t)]$$

$$A_i = A_{i-1} + \left( \ddot{u}_{g_{i-1}} - t_{i-1} \frac{\Delta \ddot{u}_{g_i}}{\Delta t_i} \right) \frac{(\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} +$$

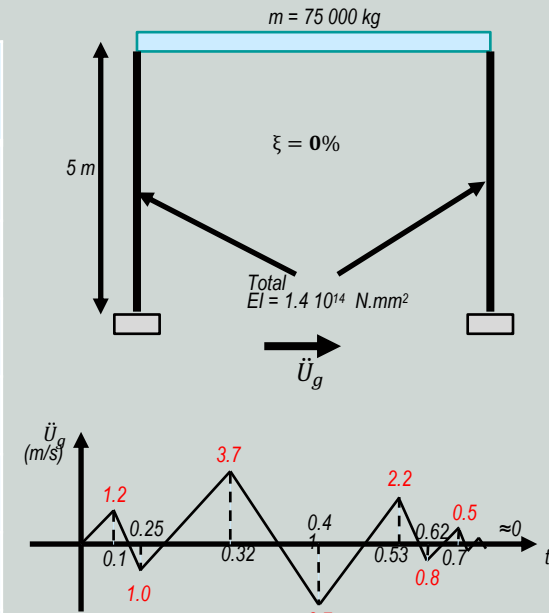
$$\frac{\Delta \ddot{u}_{g_i}}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1} + \omega_0 (t_i \sin \omega_0 t_i - t_{i-1} \sin \omega_0 t_{i-1})]$$

$$B_i = B_{i-1} - \left( \ddot{u}_{g_{i-1}} - t_{i-1} \frac{\Delta \ddot{u}_{g_i}}{\Delta t_i} \right) \frac{(\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} +$$

$$\frac{\Delta \ddot{u}_{g_i}}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1} - \omega_0 (t_i \cos \omega_0 t_i - t_{i-1} \cos \omega_0 t_{i-1})]$$

# Evaluation numérique de l'intégrale de Duhamel

t	$\ddot{U}_g$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta A$	$\Delta B$	A	B	u(t) (mm)	T=u.k/2 (N)	M=T.H/2 (KN.m)
0.0	0			0,0000	0,0000	<b>0,000</b>	0,00	0,00
0.1	1.2	0,0357	0,0445	0,0357	0,0445	<b>1,828</b>	12286,98	30,72
0.25	-1.0	0,0270	0,0438	0,0627	0,0883	<b>5,516</b>	37070,37	92,68
0.32	3.7	-0,0557	-0,0763	0,0070	0,0119	<b>-0,103</b>	-691,53	-1,73
0.41	-2.7	-0,0477	-0,0512	-0,0407	-0,0393	<b>4,227</b>	28402,76	71,01
0.53	2.2	-0,0273	0,0736	-0,0680	0,0343	<b>-5,444</b>	-36586,98	-91,47
0.62	-0.8	0,0353	0,0543	-0,0327	0,0886	<b>0,621</b>	4170,11	10,43
0.7	0.5	0,0044	-0,0139	-0,0283	0,0748	<b>5,454</b>	36648,53	91,62
1.0	0	-0,0179	-0,0435	-0,0462	0,0312	<b>-4,111</b>	-27628,13	-69,07



$$u(t) = \frac{1}{\omega_0} [A(t) \sin(\omega_0 t) - B(t) \cos(\omega_0 t)]$$

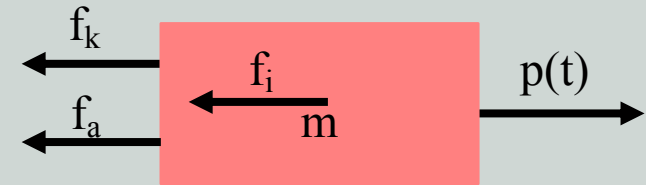
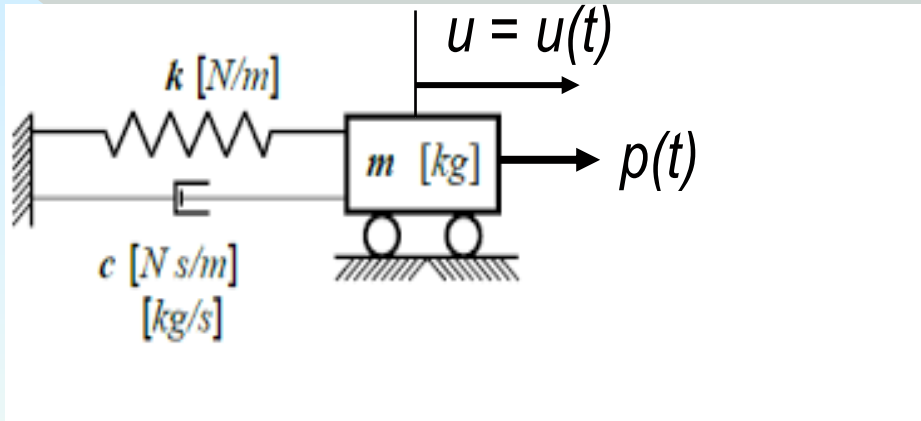
$$A_i = A_{i-1} + \left( \ddot{U}_{g_{i-1}} - t_{i-1} \frac{\Delta \ddot{U}_{g_i}}{\Delta t_i} \right) \frac{(\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta \ddot{U}_{g_i}}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1} + \omega_0 (t_i \sin \omega_0 t_i - t_{i-1} \sin \omega_0 t_{i-1})]$$

$$B_i = B_{i-1} - \left( \ddot{U}_{g_{i-1}} - t_{i-1} \frac{\Delta \ddot{U}_{g_i}}{\Delta t_i} \right) \frac{(\cos \omega_0 t_i - \cos \omega_0 t_{i-1})}{\omega_0} + \frac{\Delta \ddot{U}_{g_i}}{\omega_0^2 \Delta t_i} [\sin \omega_0 t_i - \sin \omega_0 t_{i-1} - \omega_0 (t_i \cos \omega_0 t_i - t_{i-1} \cos \omega_0 t_{i-1})]$$

## 5. Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

- Souvent, le chargement est connu par des données expérimentales (cas par ex. des séismes).
- Dans ce cas, la résolution analytique de l'équation du mouvement n'est pas possible.
- On a recours aux méthodes numériques basées sur des suppositions de variation de déplacement, de vitesse ou d'accélération à l'intérieur d'un petit intervalle.
- Equations d'équilibre incrémentales.
- Très utilisée pour les systèmes non linéaires (la seule).

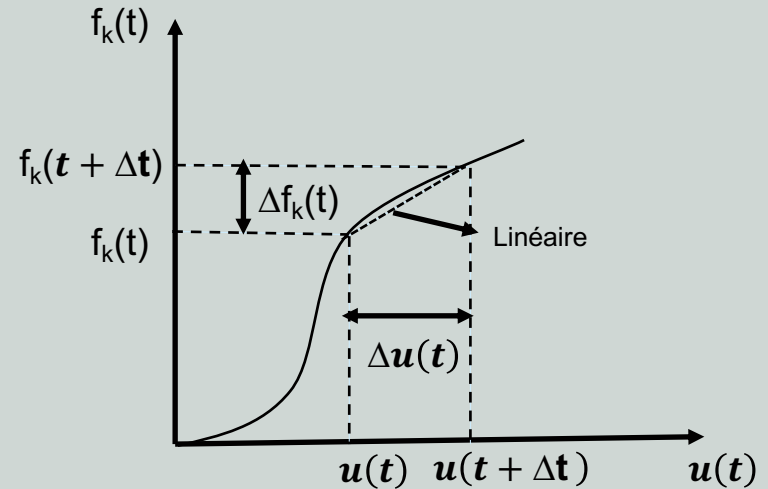
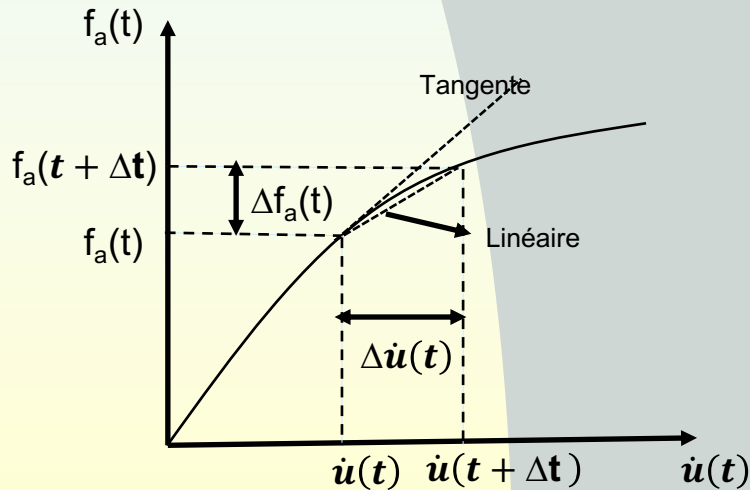
### i. Equations d'équilibre incrémentales



$$f_i(t) + f_a(t) + f_k(t) = p(t)$$

(6.27)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$





# Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

## i. Equations d'équilibre incrémentales

Après un court temps « $\Delta t$ » on aura:

$$f_i(t + \Delta t) + f_a(t + \Delta t) + f_k(t + \Delta t) = p(t + \Delta t) \quad (6.28)$$

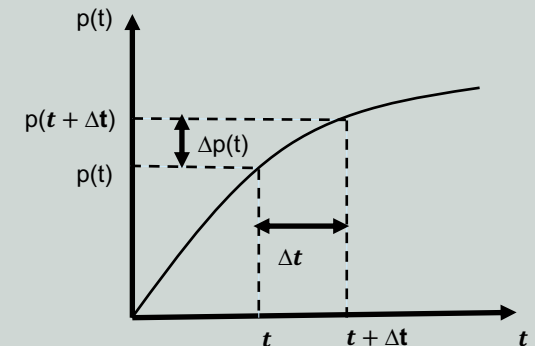
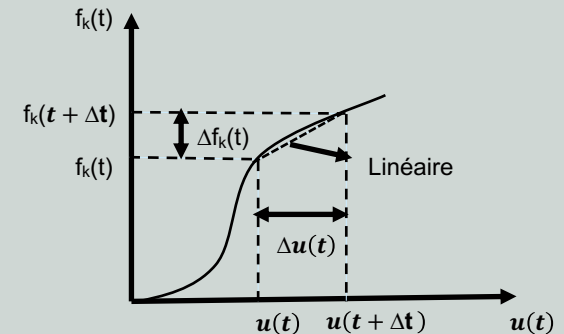
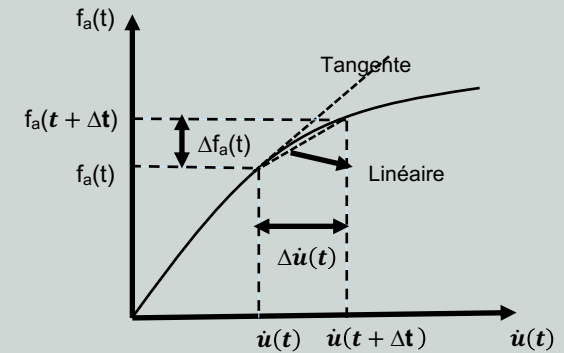
Soustrayant (6.27) de (6.28), on aura:

$$\Delta f_i(t) + \Delta f_a(t) + \Delta f_k(t) = \Delta p(t) \quad (6.29)$$

Equation d'équilibre incrémentale

Soit:

$$m \Delta \ddot{u}(t) + c \Delta \dot{u}(t) + k \Delta u(t) = \Delta p(t) \quad (6.30)$$



## ii. Méthode pas à pas

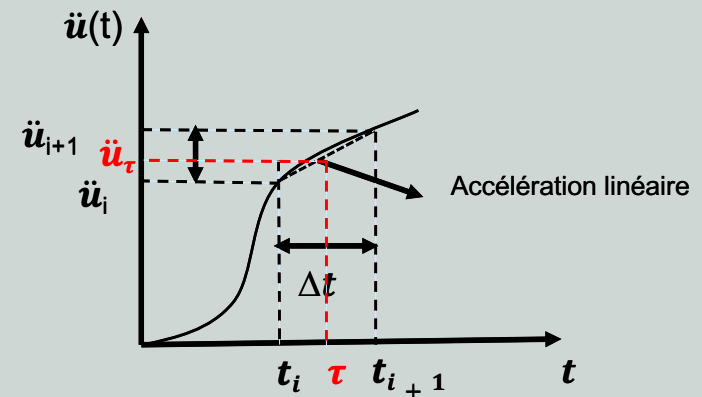
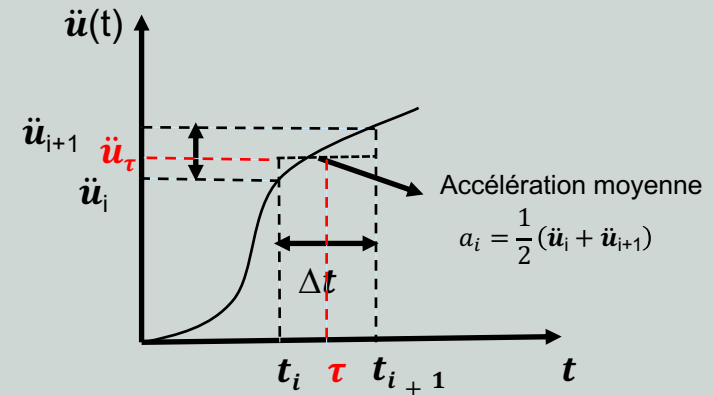
La méthode consiste à évaluer approximativement les dérivées de l'équation du mouvement et générer une solution pas à pas pour un intervalle «  $\Delta t$  ».

La méthode la plus utilisée consiste à supposer une certaine variation de l'accélération dans l'intervalle de temps «  $\Delta t$  ».

### Méthode de Newmark $\beta$

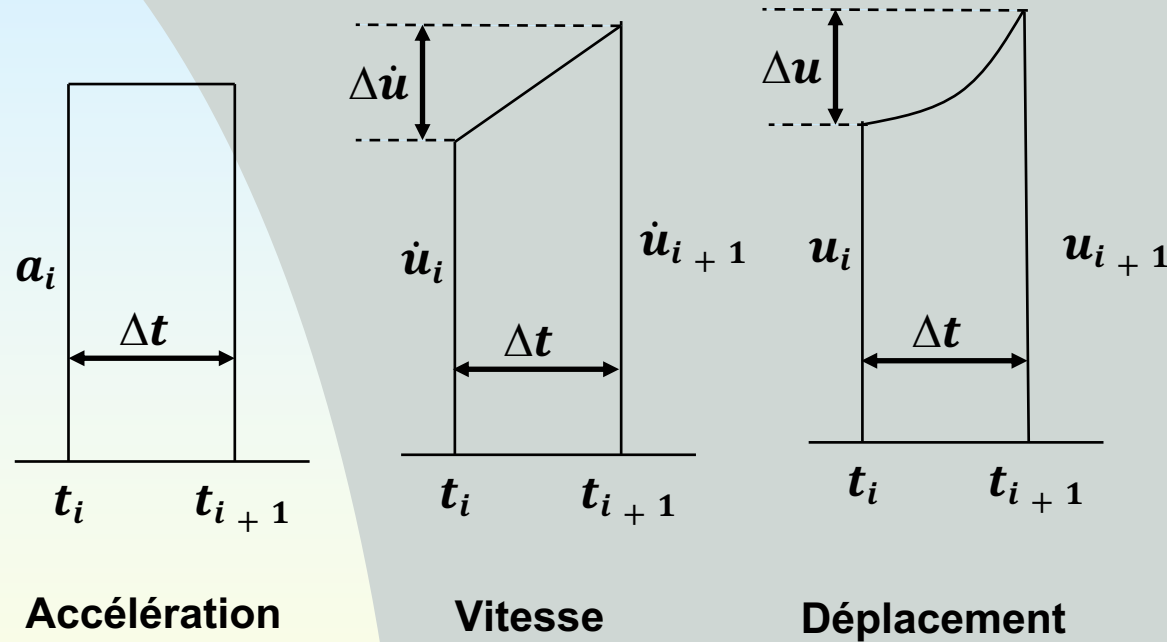
Variation constante (Moyenne) :  
Newmark  $\beta=1/4$

Variation linéaire: Newmark  $\beta=1/6$



ii. Méthode pas à pas

Méthode de l'accélération constante : Newmark  $\beta=1/4$



Avec

$$a_i = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (6.31)$$

## Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

ii. Méthode pas à pas **Newmark  $\beta=1/4$**

$$a_i = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

En intégrant l'accélération, on aura:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) d\tau$$

$$\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\Delta t_i \quad \text{D'où} \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\Delta t_i \quad (6.32)$$

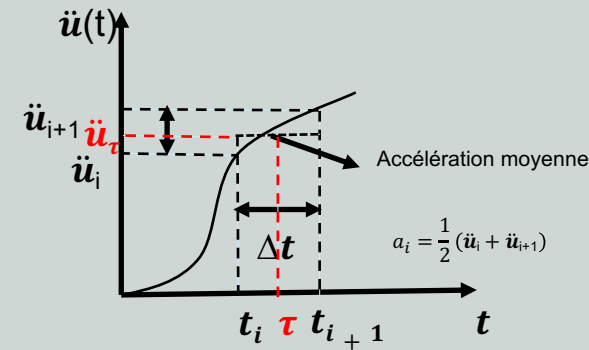
Intégrant l'éq. 6.32:

$$u_{i+1} - u_i = \dot{u}_i\Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad \text{D'où} \quad u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (6.33)$$

Généralement on travaille avec la forme incrémentale, avec

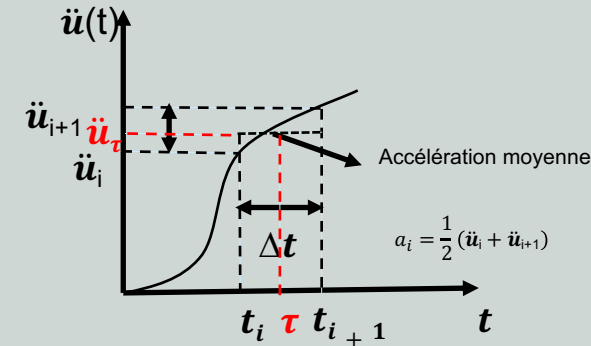
$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \quad \Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \quad (6.34)$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$



# Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

## ii. Méthode pas à pas **Newmark $\beta=1/4$**



L'équation (6.33) devient

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} - u_i = \dot{u}_i \Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{4} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i + 2\ddot{u}_i)$$

$$\Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{4} (\Delta \ddot{u}_i + 2\ddot{u}_i)$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{4}{\Delta t_i^2} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t_i) - 2\ddot{u}_i \quad (6.35)$$

En combinant (6.32) et (6.33)

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Delta t_i$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

On aura

$$\frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t_i^2} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Delta t_i = \frac{2}{\Delta t_i} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t_i)$$

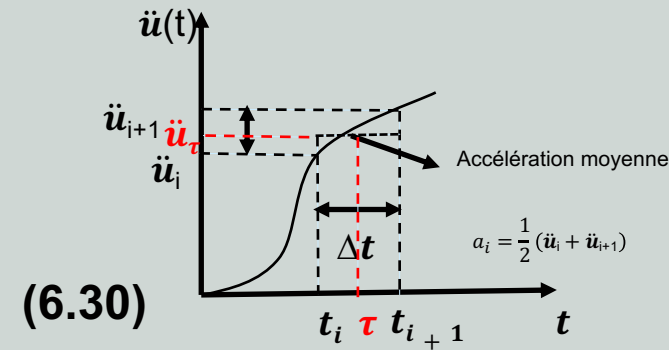
$$\Delta \dot{u}_i = \frac{2}{\Delta t_i} \Delta u_i - 2\dot{u}_i \quad (6.36)$$

## Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

### ii. Méthode pas à pas **Newmark $\beta=1/4$**

L'équation du mouvement est vérifiée sous forme incrémentale, on aura (éq. 6.30):

$$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta u_i = \Delta p_i$$



En remplaçant (6.35) et (6.36) dans (6.30), on aura:

$$m \left( \frac{4}{\Delta t_i^2} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t_i) - 2\ddot{u}_i \right) + c \left( \frac{2}{\Delta t_i} \Delta u_i - 2\dot{u}_i \right) + k \Delta u_i = \Delta p_i$$

En réarrangeant les termes, on aura:

$$\left( k + \frac{2}{\Delta t_i} c + \frac{4}{\Delta t_i^2} m \right) \Delta u_i = \Delta p_i + \left( \frac{4m}{\Delta t_i} - 2c \right) \dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i \quad (6.37)$$

En posant :

$$A = k + \frac{2}{\Delta t_i} c + \frac{4}{\Delta t_i^2} m \quad B = \Delta p_i + \left( \frac{4m}{\Delta t_i} - 2c \right) \dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i \quad (6.38)$$

On aura:

$$A \Delta u_i = B \quad \Delta u_i = B/A \quad (6.39)$$

**A: rigidité équivalente**

**B: Force d'excitation équivalente**

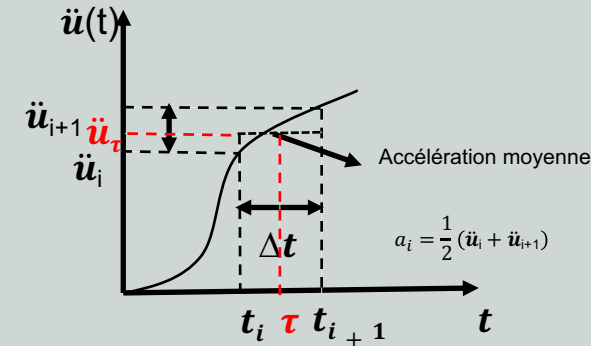
## Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

### ii. Méthode pas à pas Newmark $\beta=1/4$

Les valeurs initiales de « $u_0$ » et « $\dot{u}_0$ » sont connues, la valeur initiale de « $\ddot{u}_0$ » sera calculée par l'équation du mouvement.

On peut entamer le processus pas à pas

- On calcule A et B (6.38), puis on détermine  $\Delta u_i$  (6.39)
- On calcule  $\Delta \dot{u}_i = \frac{2}{\Delta t_i} \Delta u_i - 2\dot{u}_i$  (6.36)
- On déduit :  $\dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i$  et  $u_{i+1} = \Delta u_i + u_i$

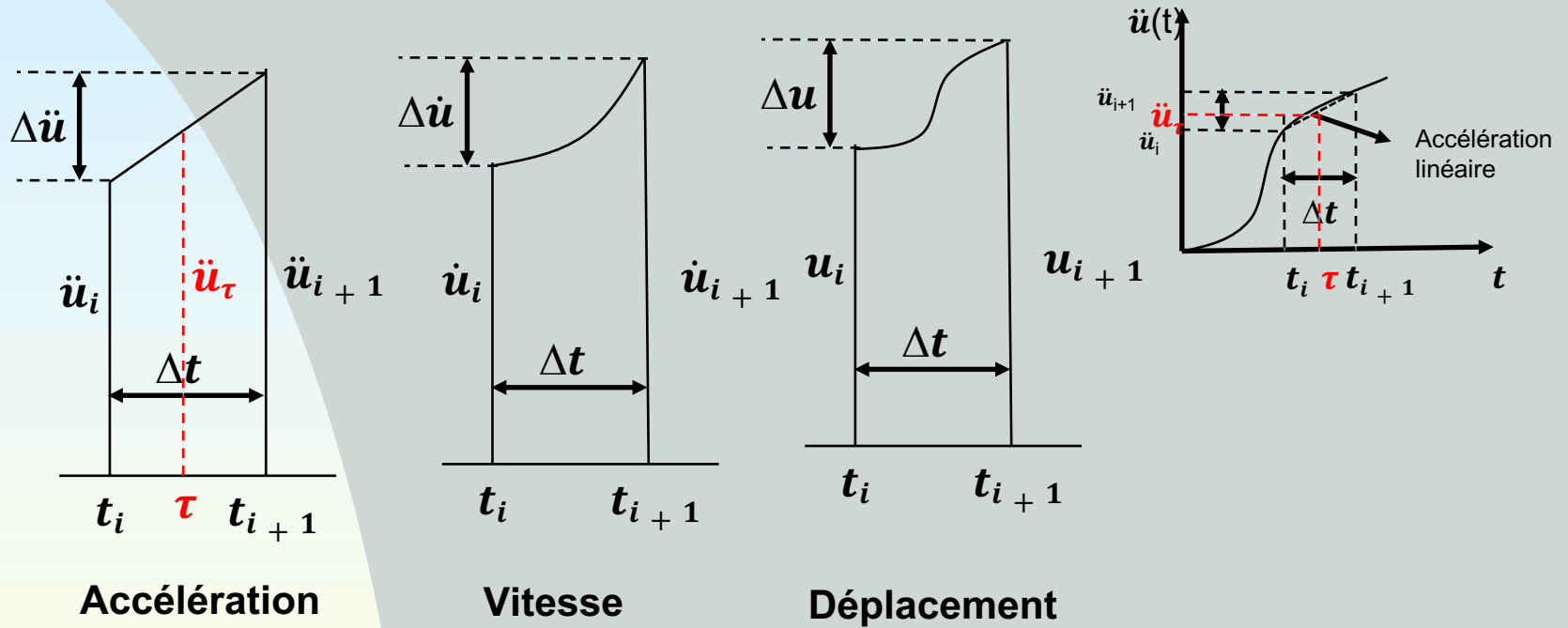


**Pb avec l'accélération.** Elle est très sensible aux changements de rigidité

- Si le problème est linéaire, on calcule (6.35)  $\Delta \ddot{u}_i = \frac{4}{\Delta t_i^2} (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t_i) - 2\ddot{u}_i$
- On Déduit :  $\ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$
- Si le problème est non linéaire,  $\ddot{u}_{i+1}$  est calculée directement de l'équation du mouvement à «  $t=t_{i+1}$  »  $\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} (p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1})$

ii. Méthode pas à pas

Méthode de l'accélération linéaire : Newmark  $\beta=1/6$



Du graphe

$$\frac{\ddot{u}_\tau - \ddot{u}_i}{\Delta\ddot{u}_i} = \frac{\tau - t_i}{\Delta t_i}$$

D'où

$$\ddot{u}_\tau = \ddot{u}_i + \frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t_i} (\tau - t_i) \quad (6.40)$$



## Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

### ii. Méthode pas à pas **Newmark $\beta=1/6$**

$$\ddot{u}_\tau = \ddot{u}_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t_i} (\tau - t_i)$$

En intégrant l'accélération, on aura:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t_i} (\tau - t_i) d\tau$$

$$\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i = \ddot{u}_i \Delta t_i - \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t_i} t_i \Delta t_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t_i} \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)}{2} \quad \text{D'où} \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t_i \ddot{u}_i + \frac{\Delta t_i}{2} \Delta \ddot{u}_i \quad (6.41)$$

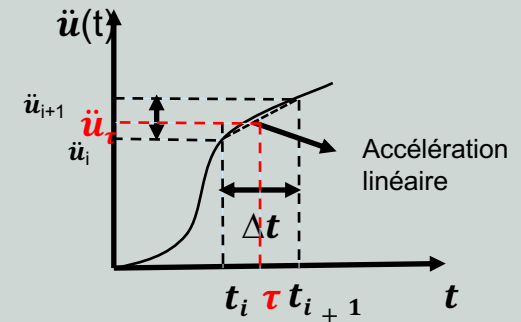
Intégrant l'éq. 6.41:

$$u_{i+1} - u_i = \dot{u}_i \Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t_i^2}{6} \Delta \ddot{u}_i \quad \text{D'où} \quad u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t_i + \frac{\Delta t_i^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t_i^2}{6} \Delta \ddot{u}_i \quad (6.42)$$

De l'équation (6.42) on tire «  $\Delta \ddot{u}_i$  » et on la remplace dans (6.41)

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t_i^2} \Delta u_i - \frac{6}{\Delta t_i} \dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \quad (6.43)$$

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t_i} \Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t_i}{2} \ddot{u}_i \quad (6.44)$$

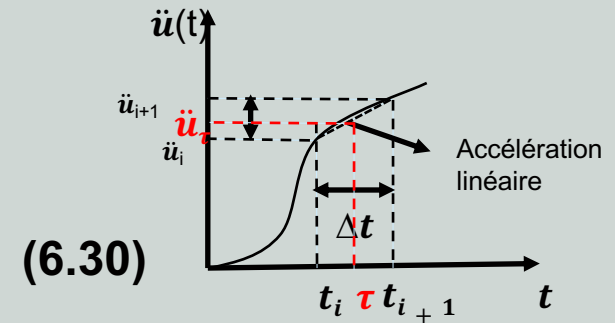


## Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

### ii. Méthode pas à pas **Newmark $\beta=1/6$**

L'équation du mouvement est vérifiée sous forme incrémentale, on aura (éq. 6.30):

$$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta u_i = \Delta p_i$$



En remplaçant (6.43) et (6.44) dans (6.30), on aura:

$$m \left( \frac{6}{\Delta t_i^2} \Delta u_i - \frac{6}{\Delta t_i} \dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \right) + c \left( \frac{3}{\Delta t_i} \Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t_i}{2} \ddot{u}_i \right) + k \Delta u_i = \Delta p_i$$

En réarrangeant les termes, on aura:

$$\left( k + \frac{3}{\Delta t_i} c + \frac{6}{\Delta t_i^2} m \right) \Delta u_i = \Delta p_i + \left( \frac{6m}{\Delta t_i} + 3c \right) \dot{u}_i + \left( 3m + \frac{\Delta t_i}{2} c \right) \ddot{u}_i \quad (6.45)$$

En posant :

$$A = k + \frac{3}{\Delta t_i} c + \frac{6}{\Delta t_i^2} m \quad B = \Delta p_i + \left( \frac{4m}{\Delta t_i} - 2c \right) \dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i + \frac{3}{\Delta t_i} c \dot{u}_i + \frac{6}{\Delta t_i^2} m \ddot{u}_i \quad (6.46)$$

On aura:

$$A \Delta u_i = B \quad \Delta u_i = B/A \quad (6.47)$$

**A:** rigidité équivalente

**B:** Force d'excitation équivalente

## Evaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes à 1 SDDL (Méthode pas-à-pas)

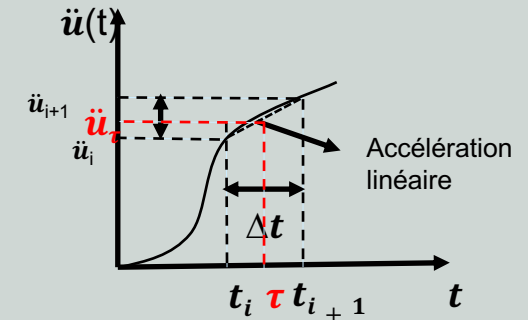
### ii. Méthode pas à pas Newmark $\beta=1/6$

#### Procédure : la même

Les valeurs initiales de « $u_0$ » et « $\dot{u}_0$ » sont connues, la valeur initiale de « $\ddot{u}_0$ » sera calculée par l'équation du mouvement.

On peut entamer le processus pas à pas

- On calcule A et B (6.46), puis on détermine  $\Delta u_i$  (6.47)
- On calcule  $\Delta \dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t_i} \Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t_i}{2} \ddot{u}_i$ . (6.44)
- On déduit :  $\dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i$  et  $u_{i+1} = \Delta u_i + u_i$



#### Pb avec l'accélération. Elle est très sensible aux changements de rigidité

- Si le problème est linéaire, on calcule (6.43).  $\Delta \ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t_i^2} \Delta u_i - \frac{6}{\Delta t_i} \dot{u}_i - 3\ddot{u}_i$
- On Déduit :  $\ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$
- Si le problème est non linéaire,  $\ddot{u}_{i+1}$  est calculée directement de l'équation du mouvement à «  $t=t_{i+1}$  »  $\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} (p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1})$

## Résumé de la méthode de Newmark

$\beta=1/4$  : Accélération constante

$\beta=1/6$  : Accélération linéaire

### Données

- ✓ Les valeurs initiales de « $u_0$ » et « $\dot{u}_0$ » sont connues, la valeur initiale de « $\ddot{u}_0$ » sera calculée par l'équation du mouvement.
- ✓ « $\Delta t_i$ » Généralement connue, sinon on prend  $\approx T/20$
- ✓ « $\Delta p$ » Généralement connue par sa courbe ou par son expression mathématique.
- ✓  $c$ ,  $m$  et  $k$  : Connues (Dans certains cas « $k$ » et/ou « $c$ » varient avec le temps (problème non linéaire))

### Procédure

➤ On calcule A et B

$$A = k + \frac{1}{\beta \Delta t_i^2} m + \frac{1}{2\beta \Delta t_i} c \quad \text{et} \quad B = \Delta p_i + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t_i} m + \frac{1}{2\beta} c \right] \dot{u}_i + \left[ \frac{1}{2\beta} m + \Delta t_i \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i$$

➤ On calcule  $\Delta u_i = B/A$

➤ On déduit :  $u_{i+1} = \Delta u_i + u_i$

➤ On calcule  $\Delta \dot{u}_i = \frac{1}{2\beta \Delta t_i} \Delta u_i - \frac{1}{2\beta} \dot{u}_i - \Delta t_i \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i$

➤ On déduit :  $\dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i$

## Résumé de la méthode de Newmark

$\beta=1/4$  : Accélération constante

$\beta=1/6$  : Accélération linéaire

### Procédure

**Pb avec l'accélération.** Elle est très sensible aux changements de rigidité

- Si le problème **est linéaire**, on calcule  $\Delta\ddot{u}_i = \frac{1}{\beta\Delta t_i^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta\Delta t_i} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$
- On Dédait :  $\ddot{u}_{i+1} = \Delta\ddot{u}_i + \ddot{u}_i$
- Si le problème **est non linéaire**,  $\ddot{u}_{i+1}$  est calculée directement de l'équation du mouvement à «  $t=t_{i+1}$  »  $\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} (p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1})$

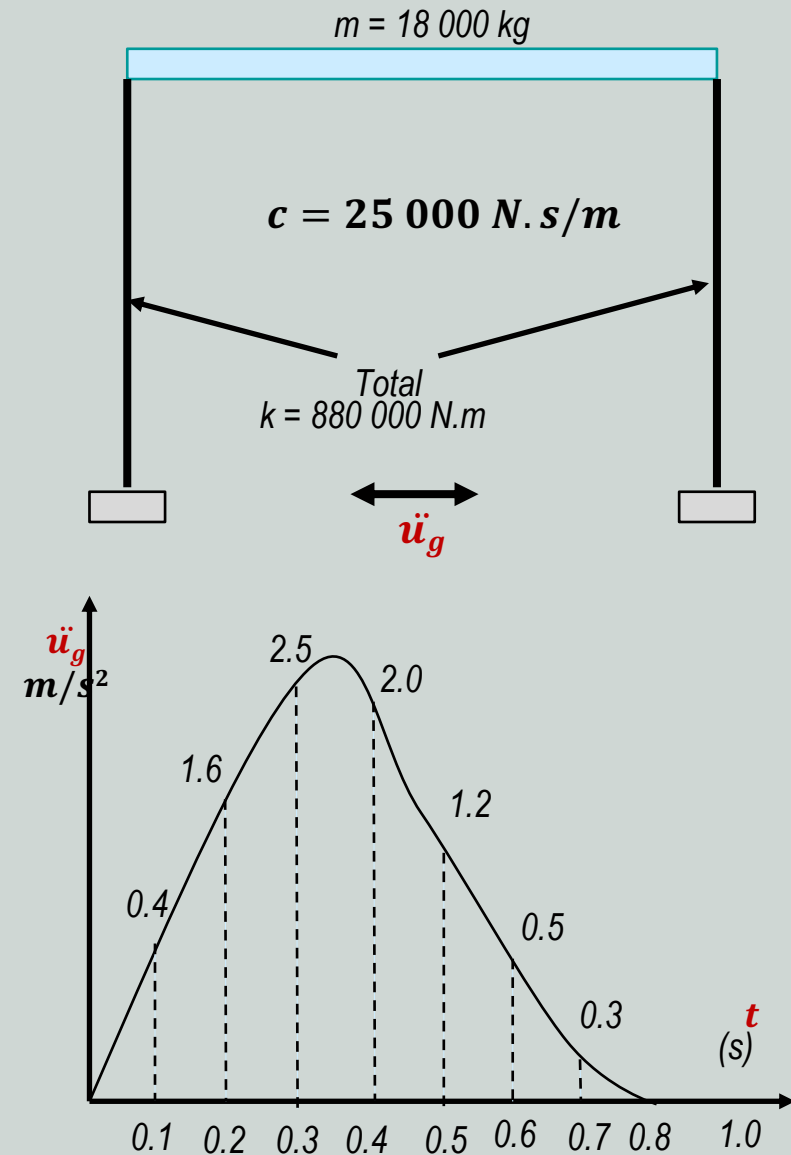
## Exemple 1 Comportement linéaire

Considérons le portique de la figure ci-contre avec les données mentionnées, soumis à une excitation de support dont la variation de l'accélération du support est donnée sur le graphe. En utilisant la méthode pas-à-pas dans ses 02 versions (Newmark  $\beta=1/4$  et  $\beta=1/6$ ), calculer

i) La variation de la réponse dynamique jusqu'au temps  $t=1.0$  s

On suppose que la structure a une grande capacité pour répondre dans le domaine élastique.

Le système est au repos.



## Exemple 1

### Données

- ❖ Système au repos :  $u_0 = 0$ . et  $\dot{u}_0 = 0$
- ❖ De l'équation du mouvement  $\ddot{u}_0 = \frac{1}{m} (p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0) = 0$
- ❖  $\Delta t_i = 0.1$
- ❖ « $\Delta p$ » Donnée par le graphe pour chaque  $\Delta t_i$
- ❖  $c=25000$  N.s/m;  $k_{\text{tot}}=880000$  N/m et  $m=18000$  kg.
- ❖ Problème élastique

## Exemple 1

### Procédure

- On calcule **A** et **B**

$$A = k + \frac{1}{\beta \Delta t_i^2} m + \frac{1}{2\beta \Delta t_i} c = 880000 + \frac{1}{\beta 0.1^2} 18000 + \frac{1}{2\beta 0.1} 25000 = 880000 + \frac{1925000}{\beta}$$

$$B = \Delta p_i + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t_i} m + \frac{1}{2\beta} c \right] \dot{u}_i + \left[ \frac{1}{2\beta} m + \Delta t_i \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i = \Delta p_i + \left[ \frac{192500}{\beta} \right] \dot{u}_i + \left[ \frac{9625}{\beta} - 2500 \right] \ddot{u}_i$$

- On calcule  $\Delta u_i = B/A$

- On déduit :  $u_{i+1} = \Delta u_i + u_i$

- On calcule  $\Delta \dot{u}_i = \frac{1}{2\beta \Delta t_i} \Delta u_i - \frac{1}{2\beta} \dot{u}_i - \Delta t_i \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i = \frac{5}{\beta} \Delta u_i - \frac{0.5}{\beta} \dot{u}_i - \left( \frac{0.025}{4\beta} - 0.1 \right) \ddot{u}_i$

- On déduit :  $\dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i$

- Pb **linéaire**,  $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta \Delta t_i^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t_i} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i = \frac{100}{\beta} \Delta u_i - \frac{0.1}{\beta} \dot{u}_i - \frac{0.5}{\beta} \ddot{u}_i$

- On Déduit :  $\ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$



## Exemple 1

### Résultats

(Newmark  $\beta=1/4$ )

t(s)	$\ddot{u}_g(m/s^2)$	P(N)	u(t) (m)	$\dot{u}(t)(m/s)$	$\ddot{u}(t) (m/s^2)$	$\Delta p$ (N)	A (N/m)	B (N)	$\Delta u_i$ (m)	$\Delta \dot{u}_i$ (m/s)	$\Delta \ddot{u}_i$ (m/s <sup>2</sup> )
0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	7200	8580000	7200,00	0,000839	0,016783	0,335664
0,1	0,4	7200	0,000839	0,016783	0,335664	21600	8580000	46606,99	0,005432	0,075075	0,830163
0,2	1,6	28800	0,006271	0,091858	1,165827	16200	8580000	128900,28	0,015023	0,116751	0,003371
0,3	2,5	45000	0,021295	0,208609	1,169198	-9000	8580000	193720,11	0,022578	0,034344	-1,651518
0,4	2,0	36000	0,043873	0,242953	-0,482320	-14400	8580000	155310,26	0,018101	-0,123877	-1,512907
0,5	1,2	21600	0,061974	0,119076	-1,995227	-12600	8580000	7260,06	0,000846	-0,221228	-0,434107
0,6	0,5	9000	0,062820	-0,102152	-2,429334	-3600	8580000	-169713,36	-0,019780	-0,191297	1,032719
0,7	0,3	5400	0,043040	-0,293450	-1,396615	-5400	8580000	-281634,52	-0,032825	-0,069591	1,401409
0,8	0,0	0	0,010216	-0,363041	0,004794	0	8580000	-279368,88	-0,032560	0,074872	1,487856
0,9	0,0	0	-0,022345	-0,288169	1,492651	0	8580000	-168154,43	-0,019598	0,184369	0,702077
1,0	0,0	0	-0,041943	-0,103800	2,194728	0	8580000	-915,60	-0,000107	0,205465	-0,280151

## Exemple 1

### Résultats

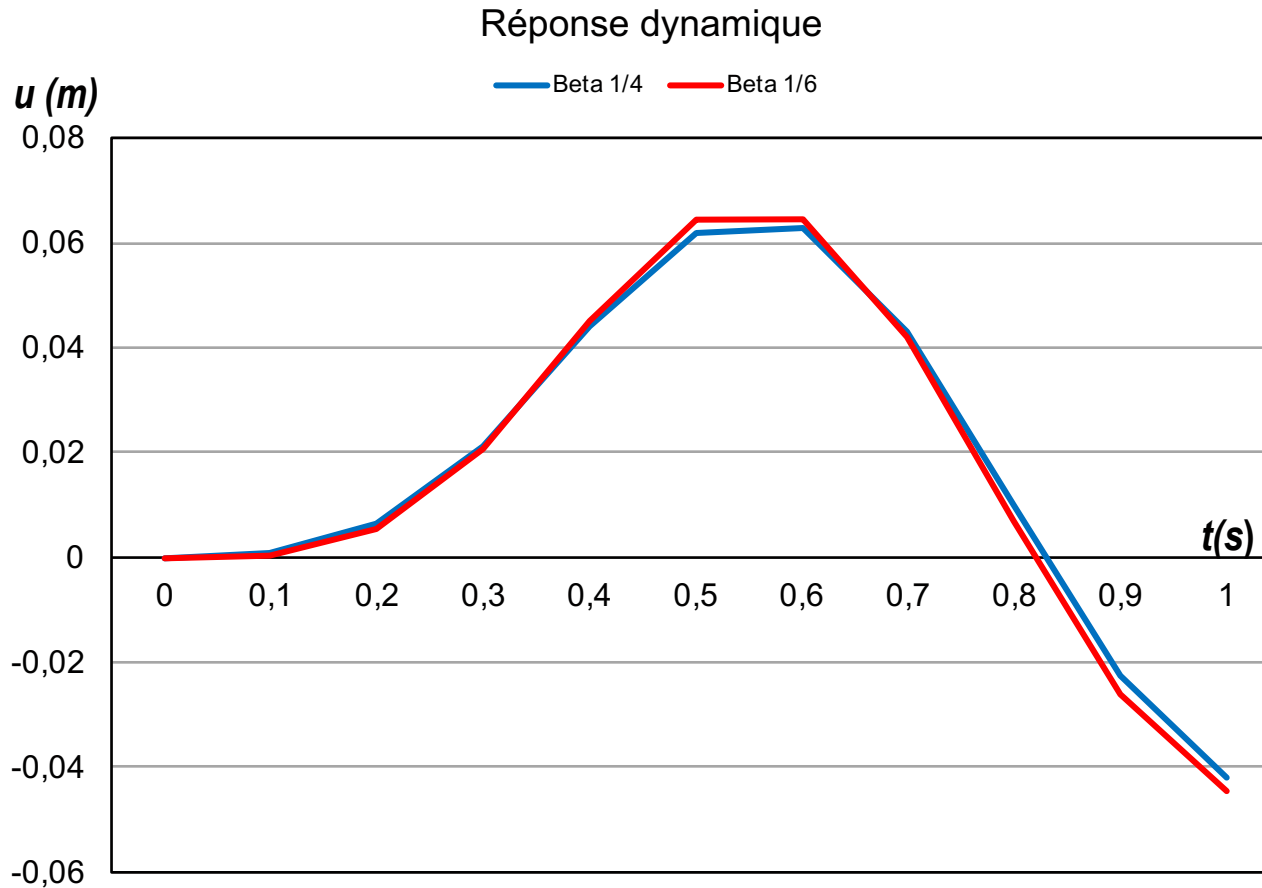
(Newmark  $\beta=1/6$ )

t(s)	$\ddot{u}_g(m/s^2)$	P(N)	u(t) (m)	$\dot{u}(t)(m/s)$	$\ddot{u}(t) (m/s^2)$	$\Delta p$ (N)	A (N/m)	B (N)	$\Delta u_i$ (m)	$\Delta \dot{u}_i$ (m/s)	$\Delta \ddot{u}_i$ (m/s <sup>2</sup> )
0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	7200	12430000	7200,00	0,000579	0,017377	0,347546
0,1	0,4	7200	0,000579	0,017377	0,347546	21600	12430000	60872,73	0,004897	0,077408	0,853068
0,2	1,6	28800	0,005476	0,094785	1,200614	16200	12430000	192011,02	0,015447	0,119035	-0,020532
0,3	2,5	45000	0,020924	0,213820	1,180083	-9000	12430000	303161,90	0,024390	0,031221	-1,735740
0,4	2,0	36000	0,045313	0,245041	-0,555657	-14400	12430000	237922,82	0,019141	-0,133111	-1,550906
0,5	1,2	21600	0,064454	0,111930	-2,106564	-12600	12430000	291,95	0,000023	-0,229758	-0,382039
0,6	0,5	9000	0,064478	-0,117828	-2,488603	-3600	12430000	-277186,64	-0,022300	-0,191080	1,155602
0,7	0,3	5400	0,042178	-0,308908	-1,333001	-5400	12430000	-435837,29	-0,035063	-0,058525	1,495493
0,8	0,0	0	0,007115	-0,367434	0,162492	0	12430000	-415408,22	-0,033420	0,091582	1,506660
0,9	0,0	0	-0,026305	-0,275851	1,669152	0	12430000	-226387,86	-0,018213	0,197706	0,615822
1,0	0,0	0	-0,044518	-0,078145	2,284974	0	12430000	35987,08	0,002895	0,207042	-0,429101

## Exemple 1

### Résultats

### Graphes de réponse

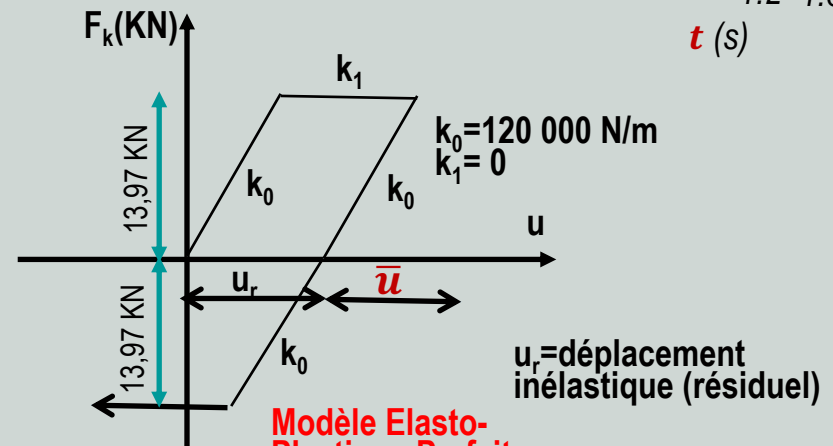
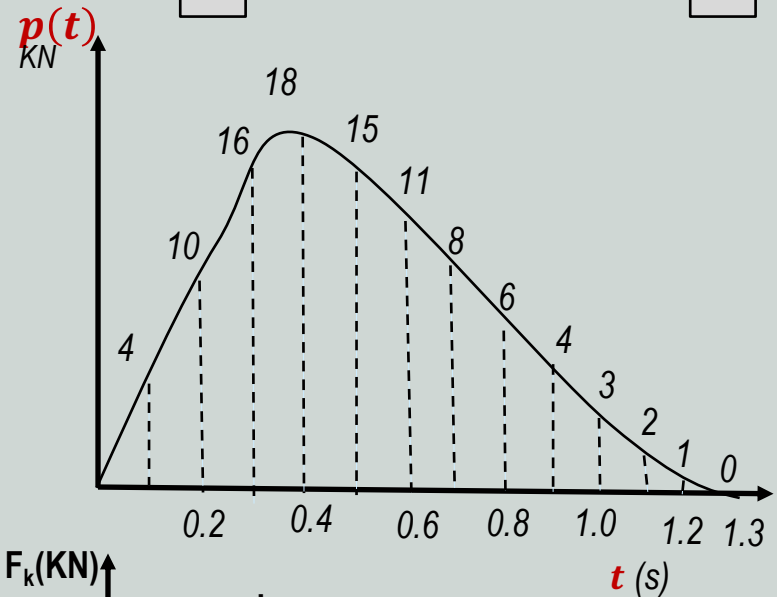
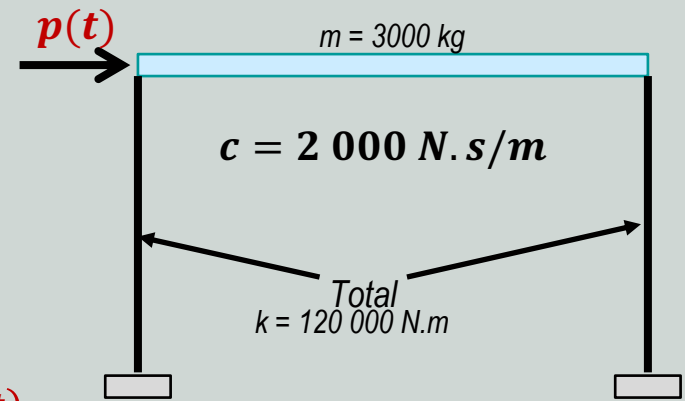


## Exemple 2 Comportement non linéaire

Considérons le portique de la figure ci-contre avec les données mentionnées, soumis à une charge d'excitation  $p(t)$  dont la variation par rapport au temps est donnée sur le graphe. Les colonnes de la structure commencent à céder 0,3 s après le début de l'excitation du sol. En utilisant le **modèle Elasto-Plastique parfait** représenté dans le graphe suivant et en utilisant la méthode pas-à-pas Newmark  $\beta=1/6$ , calculer

- i) La variation de la réponse dynamique jusqu'au temps  $t=1.5$  s

Le système est au repos.



## Exemple 2

### Données

- ❖ Système au repos :  $u_0 = 0$ . et  $\dot{u}_0 = 0$
- ❖ De l'équation du mouvement  $\ddot{u}_0 = \frac{1}{m} (p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0) = 0$
- ❖  $\Delta t_i = 0.1$
- ❖ « $\Delta p$ » Donnée par le graphe pour chaque  $\Delta t_i$
- ❖  $c = 2000 \text{ N.s/m}$
- ❖  $k_{\text{tot}}$  = Varie avec le déplacement et  $m=3000 \text{ kg}$ .
- ❖ Problème non linéaire selon le modèle élasto-plastique parfait où  $f_y=13,97 \text{ KN}$
- ❖ Méthode de Newmark  $\beta=1/6$  (Variation linéaire de l'accélération)

## Exemple 2

### Procédure

- On calcule **A** et **B**

$$A = k_i + \frac{m}{\beta \Delta t_i^2} + \frac{c_i}{2\beta \Delta t_i}$$

$$B = \Delta p_i + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t_i} m + \frac{1}{2\beta} c_i \right] \dot{u}_i + \left[ \frac{1}{2\beta} m + \Delta t_i \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) c_i \right] \ddot{u}_i$$

- On calcule  $\Delta u_i = B/A$

- On déduit :  $u_{i+1} = \Delta u_i + u_i$

- On calcule  $\Delta \dot{u}_i = \frac{1}{2\beta \Delta t_i} \Delta u_i - \frac{1}{2\beta} \dot{u}_i - \Delta t_i \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i$

- On déduit :  $\dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i$

- Si le problème est **linéaire**, on calcule  $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta \Delta t_i^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t_i} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$

- On Déduit :  $\ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$

- Si le problème est **non linéaire**,  $\ddot{u}_{i+1}$  est calculée directement de l'équation du mouvement à «  $t=t_{i+1}$  »  $\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} (p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - k u_{i+1})$

## Exemple 2

On commence par supposer un comportement élastique linéaire pour avoir une idée sur l'effet de la non linéarité. On suppose  $k=120\ 000\ \text{N/m}$

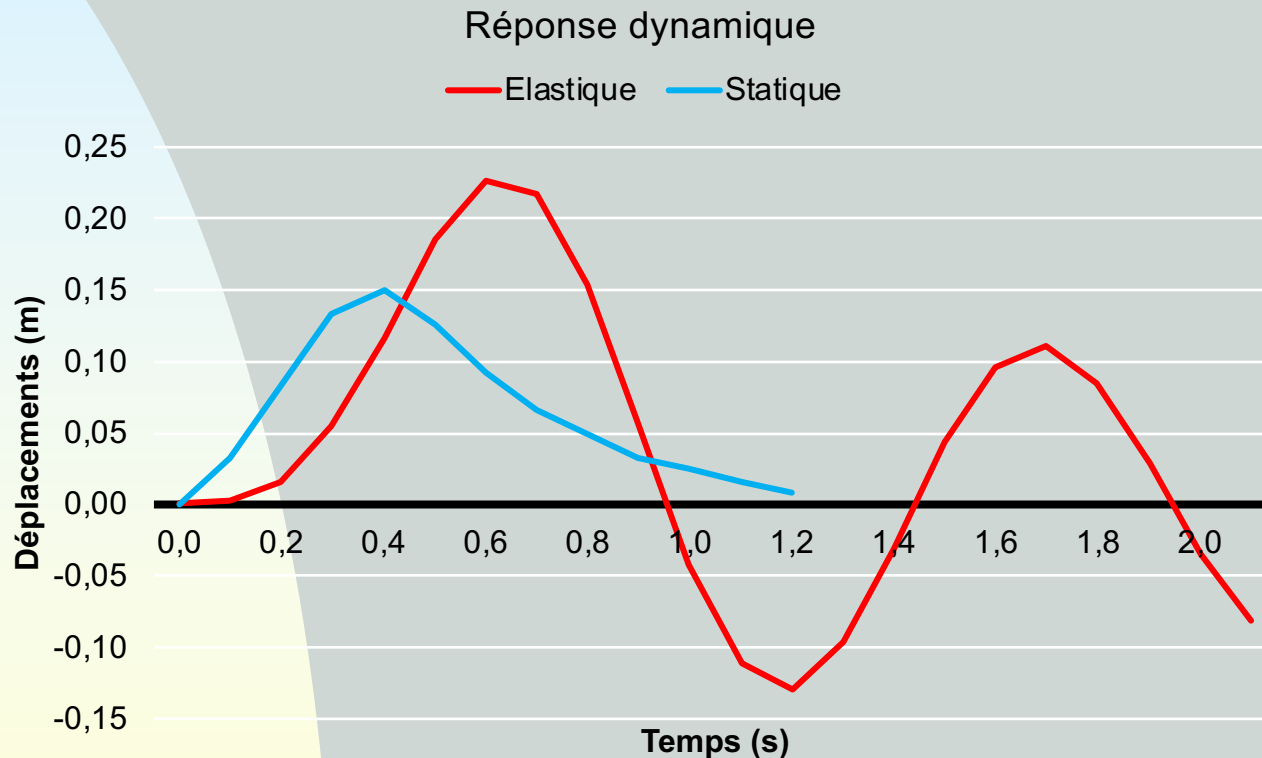
### Résultats

t(s)	P(KN)	u(t) (m)	$\dot{u}(t)$ (m/s)	$\ddot{u}(t)$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta p$ (KN)	A (KN/m)	B (KN)	$\Delta u_i$ (m)	$\Delta \dot{u}_i$ (m/s)	$\Delta \ddot{u}_i$ (m/s <sup>2</sup> )	U <sub>Statique</sub> (m)
0,0	0	0,0	0,0	0,0	4	1980	4,00	0,0020	0,0606	1,2121	0,0000
0,1	4	0,0020	0,0606	1,2121	6	1980	28,30	0,0143	0,1864	1,3039	0,0333
0,2	10	0,0163	0,2470	2,5161	6	1980	74,84	0,0378	0,2671	0,3100	0,0833
0,3	16	0,0541	0,5141	2,8261	2	1980	123,34	0,0623	0,1852	-1,9486	0,1333
0,4	18	0,1164	0,6993	0,8775	-3	1980	135,05	0,0682	-0,0955	-3,6647	0,1500
0,5	15	0,1846	0,6038	-2,7872	-4	1980	82,94	0,0419	-0,4153	-2,7321	0,1250
0,6	11	0,2265	0,1885	-5,5193	-3	1980	-18,17	-0,0092	-0,5648	-0,2565	0,0917
0,7	8	0,2173	-0,3763	-5,7758	-2	1980	-124,55	-0,0629	-0,4695	2,1624	0,0667
0,8	6	0,1544	-0,8457	-3,6134	-2	1980	-192,19	-0,0971	-0,1941	3,3453	0,0500
0,9	4	0,0574	-1,0398	-0,2681	-1	1980	-196,84	-0,0994	0,1503	3,5431	0,0333
1,0	3	-0,0421	-0,8895	3,2750	-1	1980	-136,64	-0,0690	0,4344	2,1374	0,0250
1,1	2	-0,1111	-0,4551	5,4124	-1	1980	-36,39	-0,0184	0,5432	0,0397	0,0167
1,2	1	-0,1294	0,0881	5,4522	-1	1980	65,01	0,0328	0,4480	-1,9453	0,0083
1,3	0	-0,0966	0,5361	3,5069	0	1980	131,63	0,0665	0,2107	-2,7996	
1,4	0	-0,0301	0,7468	0,7073	0	1980	145,34	0,0734	-0,0736	-2,8871	
1,5	0	0,0433	0,6732	-2,1798	0	1980	105,37	0,0532	-0,3140	-1,9195	
1,6	0	0,0965	0,3592	-4,0993	0	1980	29,51	0,0149	-0,4256	-0,3125	
1,7	0	0,1114	-0,0663	-4,4118	0	1980	-52,48	-0,0265	-0,3756	1,3107	
1,8	0	0,0849	-0,4420	-3,1011	0	1980	-110,43	-0,0558	-0,1922	2,3590	
1,9	0	0,0291	-0,6341	-0,7421	0	1980	-124,70	-0,0630	0,0501	2,4858	
2,0	0	-0,0339	-0,5841	1,7437	0	1980	-92,77	-0,0469	0,2594	1,7011	
2,1	0	-0,0807	-0,3246	3,4448	0	1980	-29,03	-0,0147	0,3618	0,3453	

## Exemple 2

### Résultats

## Réponse dynamique élastique





## Exemple 2

### Résultats

## Partie élasto-plastique parfaite

	t(s)	P(KN)	u(t) (m)	$\dot{u}(t)$ (m/s)	$\ddot{u}(t)$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta p$ (KN)	k (KN/m)	A (KN/m)	$f_k=ku$ (KN)	$f_a=c\dot{u}(t)$ (KN)	$f_i=p-f_k-f_a$ (KN)	B (KN)	$\Delta u_i$ (m)	$\Delta \dot{u}_i$ (m/s)
Elastique ↑ chargement	0,0	0	0,0	0,0	0,0	4	120	1980	0,0000	0,0000	0,0000	4,00	0,0020	0,0606
	0,1	4	0,0020	0,0606	1,2121	6	120	1980	0,2424	0,1212	3,6364	28,30	0,0143	0,1864
	0,2	10	0,0163	0,2470	2,5161	6	120	1980	1,9578	0,4940	7,5482	74,84	0,0378	0,2671
	0,3	16	0,0541	0,5141	2,8261	2	120	1980	6,4936	1,0282	8,4782	123,34	0,0623	0,1852
Plastique ↓ u <sub>max</sub>	0,4	18	0,1164	0,6993	0,8775	-3	0	1860	13,9690	1,3986	2,6324	135,05	0,0726	0,0365
	0,5	15	0,1890	0,7358	-0,1472	-4	0	1860	13,9700	1,4717	-0,4417	131,52	0,0707	-0,0788
	0,6	11	0,2597	0,6571	-1,4280	-3	0	1860	13,9700	1,3141	-4,2841	106,22	0,0571	-0,1866
	0,7	8	0,3168	0,4705	-2,3037	-2	0	1860	13,9700	0,9410	-6,9110	64,55	0,0347	-0,2552
	0,8	6	0,3515	0,2153	-2,8002	-2	0	1860	13,9700	0,4306	-8,4006	12,56	0,0068	-0,3032
	0,9	4	0,3583	-0,0880	-3,2644	-1	120	1980	13,9690	-0,1759	-9,7931	-47,07	-0,0238	-0,2860
	1,0	3	0,3345	-0,3740	-2,4562	-1	120	1980	11,1165	-0,7480	-7,3686	-92,91	-0,0469	-0,1630
	1,1	2	0,2876	-0,5370	-0,8038	-1	120	1980	5,4855	-1,0740	-2,4115	-108,19	-0,0546	0,0118
	1,2	1	0,2330	-0,5251	1,0407	-1	120	1980	-1,0717	-1,0503	3,1220	-89,21	-0,0451	0,1718
Elastique ↓ Déchargement	1,3	0	0,1879	-0,3534	2,3950	0	120	1980	-6,4782	-0,7067	7,1849	-43,93	-0,0222	0,2747
	1,4	0	0,1657	-0,0786	3,0993	0	120	1980	-9,1407	-0,1573	9,2979	13,58	0,0069	0,2867
	1,5	0	0,1726	0,2080	2,6340	0	120	1980	-8,3179	0,4160	7,9019	62,66	0,0316	0,1936
	1,6	0	0,2042	0,4017	1,2390	0	120	1980	-4,5203	0,8033	3,7170	85,98	0,0434	0,0359
	1,7	0	0,2476	0,4375	-0,5220	0	120	1980	0,6909	0,8750	-1,5659	76,63	0,0387	-0,1254
	1,8	0	0,2863	0,3121	-1,9864	0	120	1980	5,3350	0,6242	-5,9592	39,97	0,0202	-0,2313
	1,9	0	0,3065	0,0808	-2,6397	0	120	1980	7,7577	0,1616	-7,9192	-8,99	-0,0045	-0,2467
	2,0	0	0,3020	-0,1659	-2,2936	0	120	1980	7,2125	-0,3318	-6,8808	-51,72	-0,0261	-0,1714
	2,1	0	0,2759	-0,3373	-1,1344	0			4,0777	-0,6745	-3,4032			

À  $t=0,4$  s;  $f_k=f_p$  et  $u_{elas} = 0,1164$  m

$U_{inelastique} = u_r = u_{max} - u_{elas} = 0,3583 - 0,1164 = 0,2419$  m

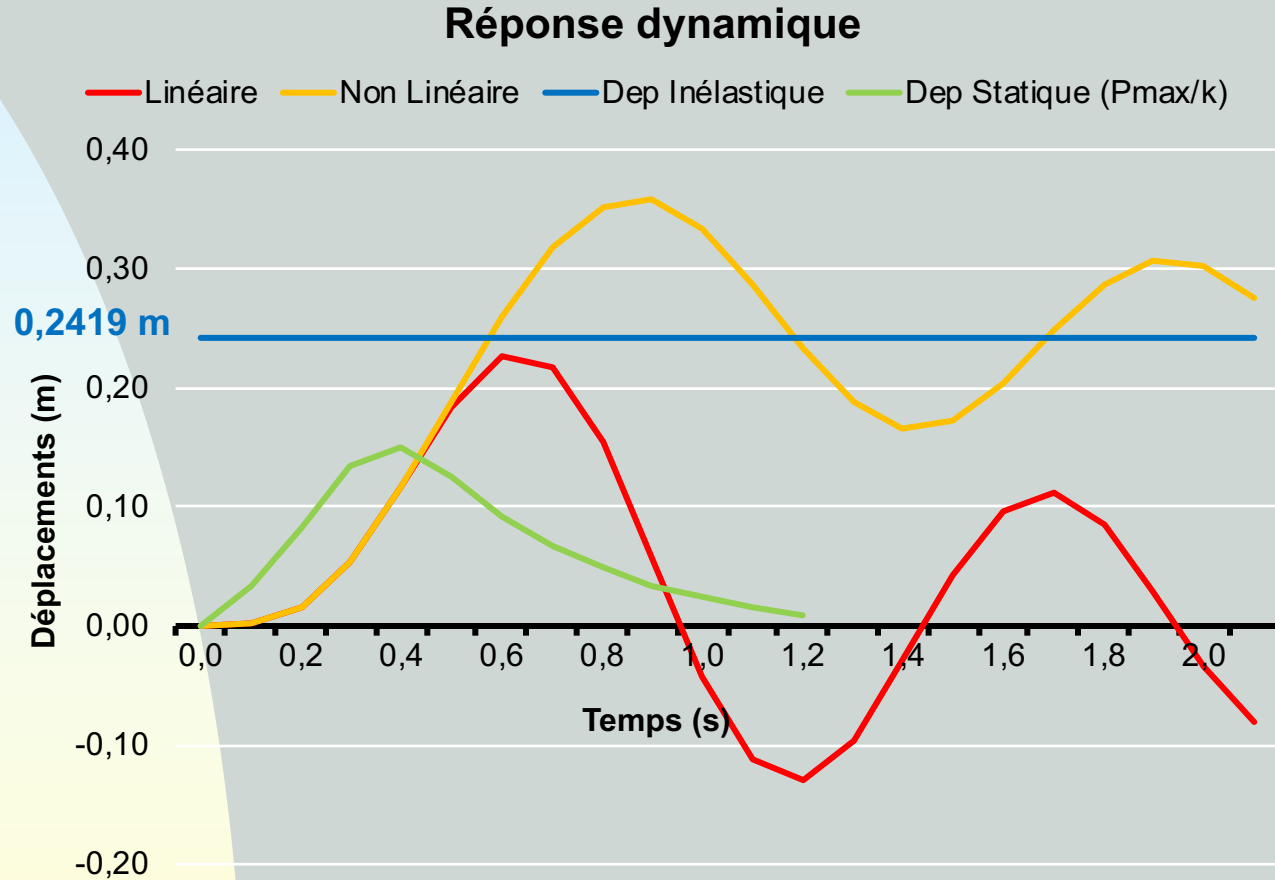
Après  $u_{max}$  (à  $t=0,9$  s) , il y aura déchargement élastique, d'où  $f_k= k(u-u_r)$

$f_k$  reste inférieure à 13,97 KN (d'où, on est en déchargement élastique)

## Exemple 2

Résultats

### Graphe récapitulatif



**Merci. Fin du chapitre 6**

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Prochain Cours**

**Chap. 7**

**Notion de spectre de  
réponse**