Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 1

Introduction

COURS 1 **Mardi 13.04.2010**

Objets de la MMC sont :

- la matière sous ses formes fluides (liquides, gaz, plasmas…) et solides,
- Les matériaux
- Et les structures: assemblages d'éléments de matériaux ou de sous structures.

On étudie le mvt de ces objets sous l'action de forces et les variations de mvt d'un point matériel à un autre.

La température influe aussi sur le mvt.

Un grand pb dans la modélisation: Pb entre le discret et le continu.

1. Structures, microstructures, nanostructures

Structures.

A proprement parler. Structures de génie civil, composantes et pièces industriels…

En particulier, on s'intéresse à l'équilibre des structures pour connaître les charges qu'elles supportent.

Optimiser la forme et le type de matériau en minimisant le coût et l'impact sur l'environnement. C'est le rôle de la MMC.

Microstructures.

Les MEMS (micro electro-mechanical systems). Représentent ces dernières années un domaine de la MMC.

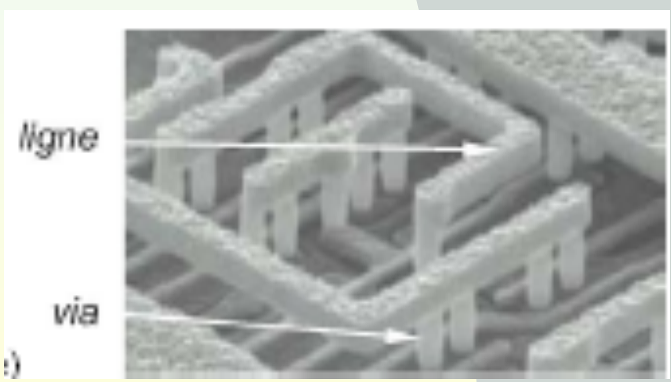
S'agit d'assurer une élaboration de précision (contraintes résiduelles) et de prévoir la tenue en service de composants de l'électronique (par ex) soumises à des sollicitations de fatigue thermomécaniques sévères.

Structures

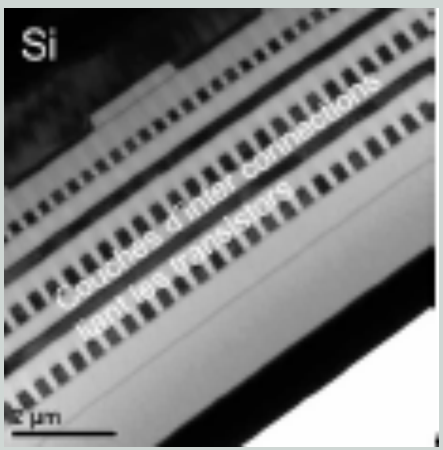
Pile du viaduc de Millau

Aube de turbine haute pression de moteur d'avion

Microstructures: Composant électronique



Réseau de connections en cuivre



Structure multicouches d'un microprocesseur

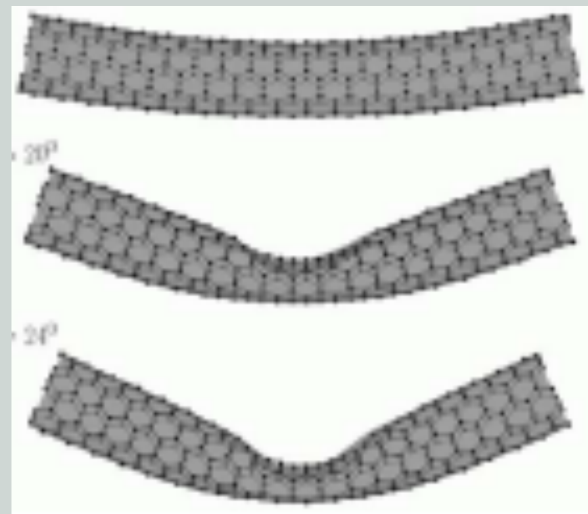
Structures, microstructures, nanostructures (Suite)

Nanostructures.

C'est la miniaturisation de systèmes mécaniques.

Ex: les nanotubes de carbone (molécule géante) semblables à des coques en grandes transformations élastiques.

NanoEngrenages en polysilicium (diam des engrenages = 7µm



déformation en flexion de nanotubes de carbone.

(les points désignent les atomes de carbone et les traits les liaisons covalentes)

2. Généralités

Milieu continu, milieu dans lequel les propriétés physiques (ex: la masse volumique, la pression, la température…) varient de façon continue d'un point à un autre et sont dérivables.

(hypothèse vraie à l'échelle macroscopique, fausse à l'échelle moléculaire)

De cela, les milieux diphasiques ou bien les mélanges tels que eau-huile seront exclus de cette MMC

02 points voisins P et Q à « t » restent voisins à un instant « t' ».

Si 02 points sont distincts restent distincts.

Il n y a ni mélange ni faille dans le milieu continu.

Généralités (Suite)

Mathématiquement:

Coordonnées de « P_0» $$\bar{x}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad à \quad t = 0$$

$$x_i(x_1, x_2, x_3) \quad à \quad t$$

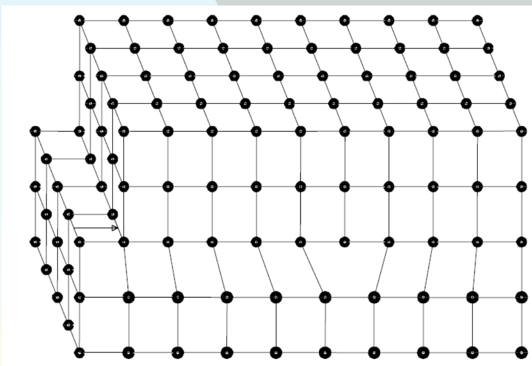
Le passage de la position initiale « P_0» à la position finale « P » est appelé transformation du milieu continu

L'hypothèse de continuité implique que les fonctions $\bar{x}_i \quad et \quad x_i$

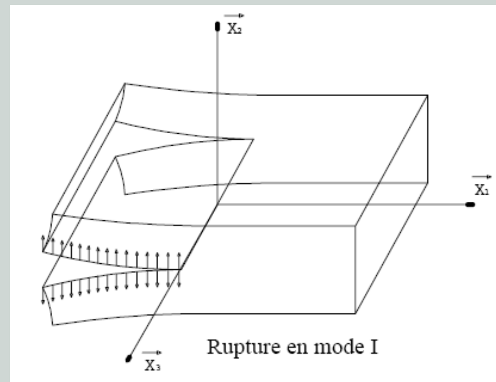
et leurs dérivées premières soient continues et uniformes

Généralités (Suite)

- L’hypothèse de continuité touche aussi la transformation qui va être traduite par le fait que les fonctions scalaires du champ vectoriel doivent être des fonctions continues des variables d’espaces et de temps.
- La MMC exclut donc les transformations discontinues telles que la dislocation métallurgique, les phénomènes de cavitation dans les écoulements de domaine fluide ou bien les domaines fissurés.

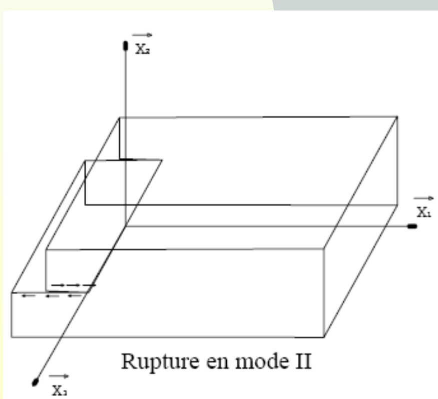


Dislocation Coin

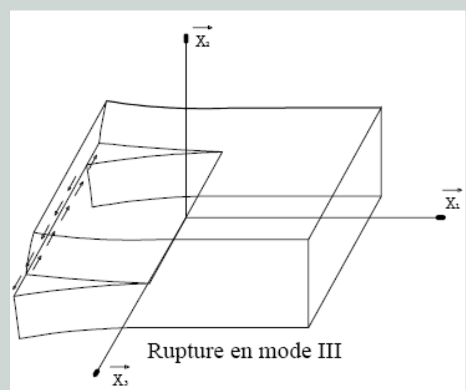


Rupture en mode I

Cas qui peuvent être traités en considérant la notion de continuité par sous domaines.



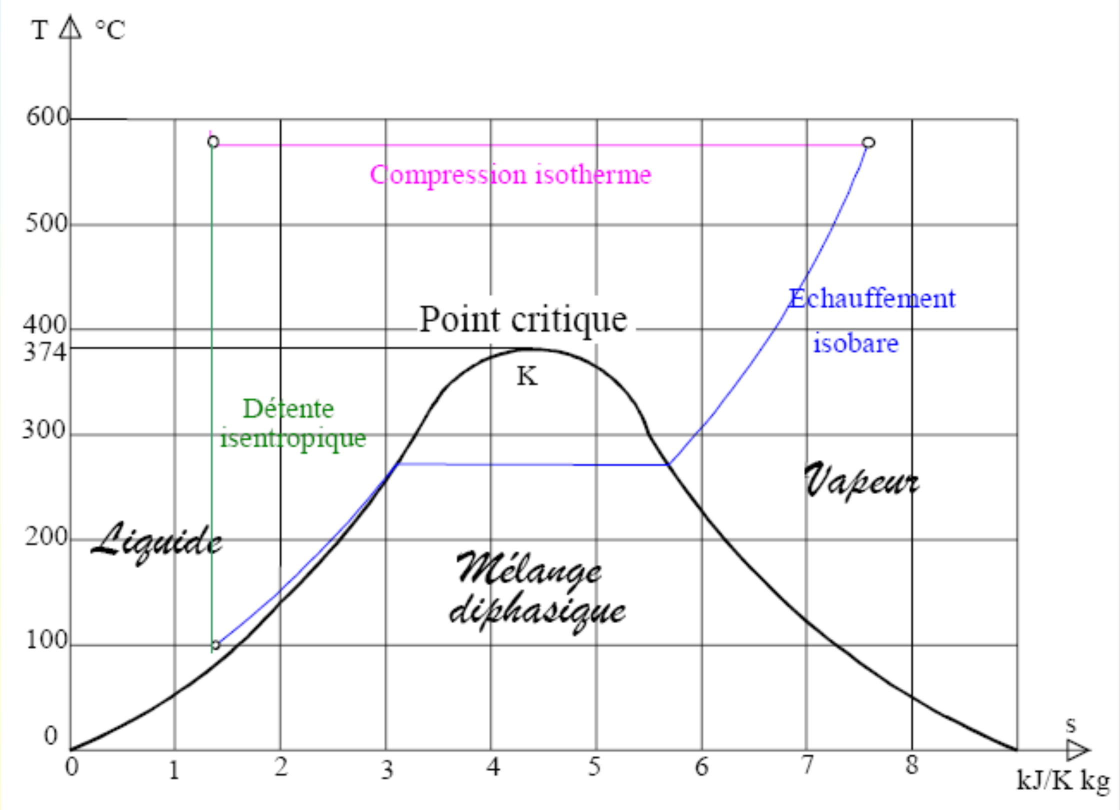
Rupture en mode II



Rupture en mode III

3. Domaine d'étude

- La MMC normalement applicable à tous les types de domaines matériels.
- En particulier aux corps solides et aux fluides (liquide et gaz).
- La distinction entre ces états n'est pas évidente.
- Exemple: changement d'état liquide-vapeur-liquide pour un cycle englobant le point K (sommet de la courbe d'ébullition) dans le diagramme température-entropie.



Domaine d'étude (Suite)

Quelques questionnements pour définir les états

- Quelle est la frontière entre un solide plus ou moins mou et un liquide plus ou moins visqueux?
- Le sable est –il un solide ou un fluide?
- Certaines peintures ont un comportement solide mais après brassage deviennent fluides.
- Le verre est un solide à notre échelle de temps, mais avec les siècles, on constate que c'est un liquide à très forte viscosité.
- Le yaourt est un fluide à mémoire
- Etc…

- La détermination de l'état n'est pas simple. Ça dépend de plusieurs paramètres (pression, température, temps…)

4. Hypothèses fondamentales de la MMC

3.1 Continuité

C'est un milieu dans lequel les propriétés physiques varient de façon continue d'un point à un autre.

3.2 Homogénéité

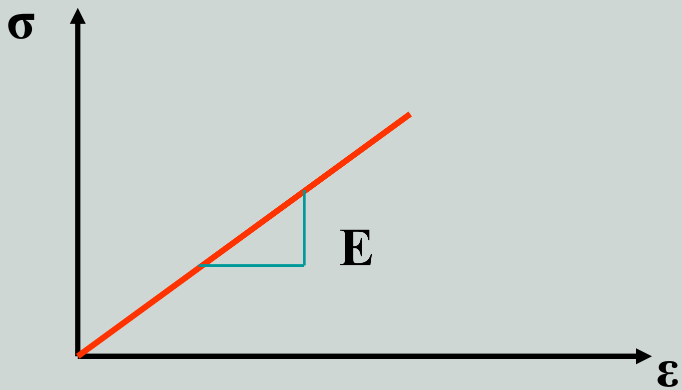
Milieu homogène s'il possède les mêmes propriétés physiques en n'importe quel point. (masse volumique, densité…)

3.3 Isotropie

Milieu isotrope s'il possède les mêmes propriétés élastiques (E et ν) en n'importe quelle direction. Généralement assurée qu'à l'échelle macroscopique.

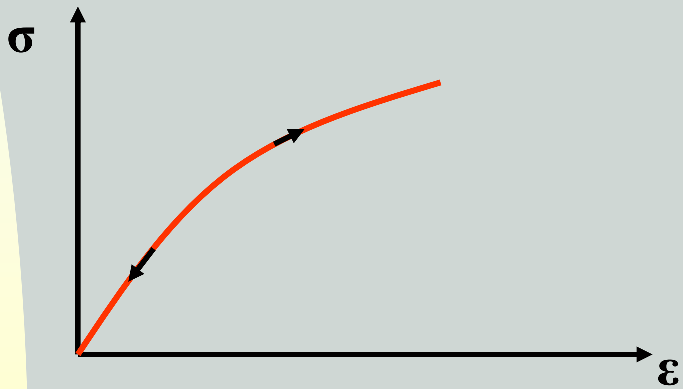
3.4 Linéarité

Relations contraintes – déformations linéaires



3.5 Élasticité

Les contraintes s'annulent avec les déformations



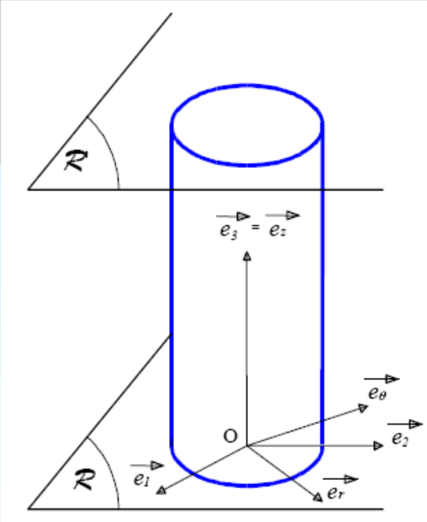
5. Variables utilisées

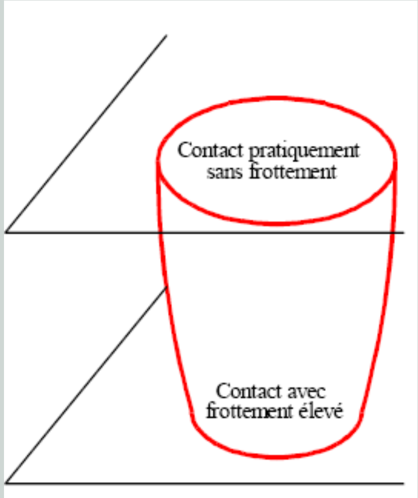
5.1 Différence entre Référentiels et Repères

- En MMC, la notion de référentiel est importante pour préciser les évolutions du domaine matériel au cours du temps (description t repérage).
- Le référentiel (R) est lié à l'observateur et représente l'ensemble des points animés du mvt de corps rigide de l'observateur.
- On utilise ensuite une base vectorielle associée à un point origine O pour effectuer les repérages spatiaux des points dans le référentiel. On obtient ainsi le repère (R).
- On peut changer de repères, c'est la notion de transformation de quantités (vecteur, tenseur…) d'un repère à un autre.
- On peut aussi changer d'observateur. C'est le changement de référentiel

Variables utilisées (Suite) Différence entre Référentiels et Repères

Exemple: Eprouvette cylindrique écrasée par une presse.





On peut faire des observations à partir du référentiel (R) associé au plateau fixe de la presse en utilisant soit le repère cartésien orthonormé $R_C \ (O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ **soit le repère cylindro-polaire orthonormé** $R_P \ (O;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$.

Mais pour étudier le pb de contact pièce-plateau mobile, on fait des observations à partir du référentiel (R') associé au plateau mobile.

Notion d'objectivité: Caractère d'indépendance vis-à-vis de l'observateur choisi.

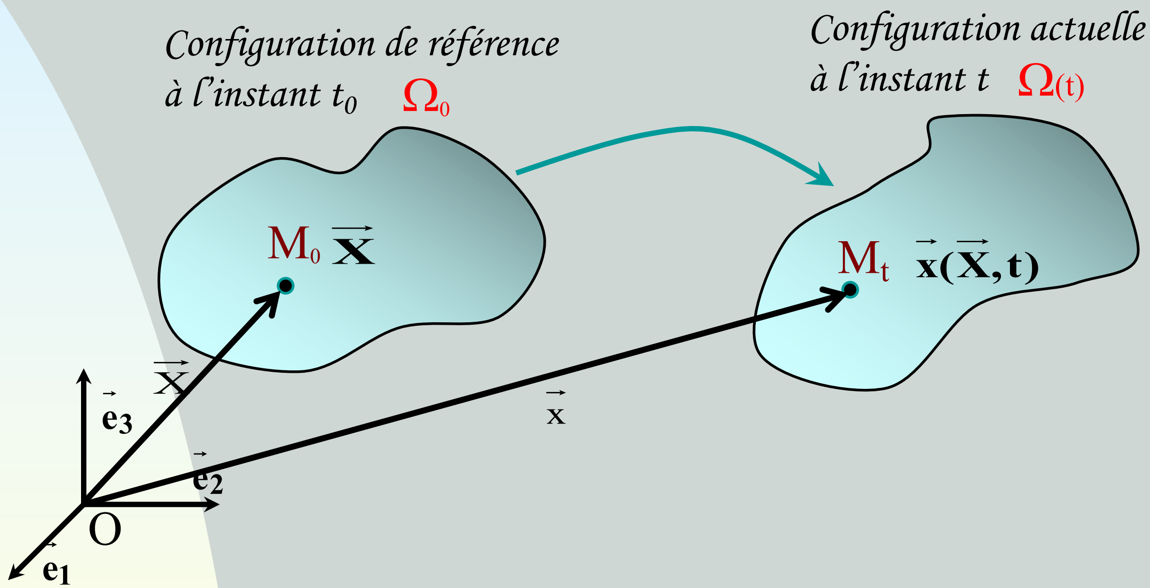
Déformations, contraintes, masse volumique sont objectives

Vitesse, matrice de changement de base…non objectives.

5.2 Description Lagrangienne (ou variables de Lagrange)

(Valable surtout pour les solides)

Considérons un point M_0 définit par sa position (X_1, X_2, X_3) à t=0 dans le repère R. (système de coordonnée dans la configuration de référence Ω_0.



On peut écrire alors:

$$\overrightarrow{OM_0} = X_1\vec{E}_1 + X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3 = X_i\vec{E}_i = \vec{X} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Variables utilisées (Suite) Description Lagrangienne

Pour suivre le mvt, il faut se donner la loi d'évolution au cours du temps des positions des points matériels. On obtient la configuration actuelle $\Omega(\mathbf{t})$.

On peut alors écrire les coordonnées du point M_t, à l'instant « t » par:

$$\overrightarrow{OM_t} = x_1 \vec{E}_1 + x_2 \vec{E}_2 + x_3 \vec{E}_3 = x_i \vec{E}_i = \vec{x} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Où les « x_i » et les « X_i » sont reliés par:

$$x_i = \Phi_i\left(X_j, t\right) \qquad \textbf{(1.3)}$$

Dans cette description les « X_i » et « t » sont dites variables de Lagrange

Les « Φi » représentent la description Lagrangienne du mvt par rapport au référentiel (R).

Les équations (1.3) définissent les trajectoires des points du domaine.

<u>Une trajectoire:</u> c'est le lieu d'un point de matière que l'on suit dans son mouvement.

Variables utilisées (Suite) Description Lagrangienne

Connaissant la position du point à « t », on peut définir sa vitesse et son accélération en Lagrangienne.

5.2.1 Vitesse

$$\vec{V}(M,t)=\frac{d\overrightarrow{OM}_t}{dt} \qquad (1.4)$$

Dans une base cartésienne orthonormée, les composantes de vitesse seront:

$$v_i=\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\left(X_j,t\right) \qquad (1.5)$$

X_j, indépendantes du temps

5.2.2 Accélération

$$\vec{\gamma}(M,t)=\frac{d^2\overrightarrow{OM}_t}{dt^2} \qquad (1.6)$$

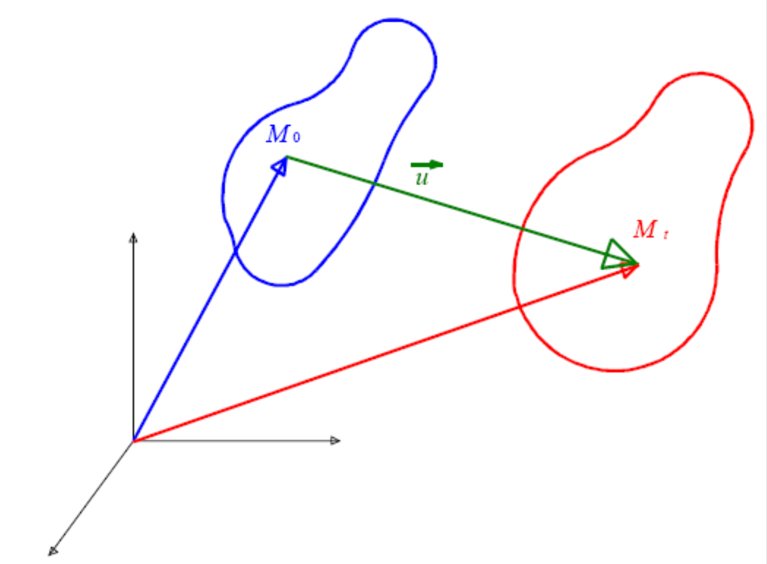
Avec

$$\gamma_i=\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}\left(X_j,t\right) \qquad (1.7)$$

Variables utilisées (Suite) Description Lagrangienne

5.2.3 Déplacement

Utiliser plutôt vecteur déplacement au lieu du vecteur position.



$$\vec{u}(X_j, t) = \overrightarrow{OM_t} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{x} - \vec{X} \qquad (1.8)$$

On peut alors écrire:

$$\vec{v}(M, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\left(X_j, t\right) = \frac{d\vec{u}}{dt}(X_j, t) \qquad (1.9)$$

5.3 Description Eulerienne (ou variables d'Euler)

(Valable surtout pour les fluides)

Hypothèses de continuité imposent que les fonctions « Φ_i » soient des bijections de la configuration C_0 sur la configuration C_t.

Il ya donc la relation entre le référence et l'actuel:

$$X_I = \Psi_I(x_j, t) \qquad \textbf{(1.10)}$$

Il est possible donc de changer de variables spatiales.

La description Eulérienne consiste à considérer les variables x_1, x_2, x_3 et t comme indépendantes et à les utiliser sous formes de variables d'Euler.

Dans cette description on ne se préoccupe pas de savoir ce qu'il advient de chaque particule mais on étudie ce qui se passe, à chaque instant, en chaque point de l'espace.

Variables utilisées (Suite) Description Eulérienne

Connaissant la position du point à « t », on peut définir sa vitesse et son accélération en Eulérienne.

5.3.1 Vitesse

$$\vec{V}(M,t) = \frac{d\overrightarrow{OM_t}}{dt} \quad \text{et} \quad v_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(X_j, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\left(\Psi_j(x_k, t), t\right)$$

5.3.2 Accélération

$$\vec{\gamma}(M,t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM_t}}{dt^2} \quad \text{et} \quad \gamma_i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}(X_j, t) = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}\left(\Psi_j(x_k, t), t\right)$$

(1.12)

Description Lagrangienne: on suit la particule dans son mvt.

Description Eulérienne: on observe l'évolution du système en un point géométrique fixe pour l'observateur

6. Notions fondamentales de la MMC

6.1 Cinématique

- **Fournit le cadre spatio-temporel dans lequel peuvent être décrits les mouvements.**
- **Un système est en mvt lorsqu'on peut définir une correspondance biunivoque entre la position du système au temps t_0 initial (C_0) et la position au temps t (C_t).**
- **C'est-à-dire à chaque point M_t de C_t correspond le point M_0 de C_0.**
- **Le lieu d'un point que l'on suit dans son mouvement est appelé Trajectoire de M.**

La cinématique se construit à partir de la géométrie en introduisant le temps.

Notions fondamentales de la MMC (Suite)

6.2 Cinétique

- **La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la masse.**
- **En MMC, la masse est définie à partir de la masse volumique « ρ(M,t) », fonction définie à chaque instant « t » et en chaque point « M » du domaine.**
- **Par définition, la masse de la partie (D) du domaine (S)**

$$M(\mathrm{D}) = \iiint_{(\mathrm{D})} \rho(\mathrm{M},\mathrm{t})\,\mathrm{dv}$$

- **Conservation de la masse: (Loi fondamentale de la mécanique classique)**

« La masse d'une partie d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante, quand le temps varie »

6.3 Dynamique

- **La dynamique introduit la notion d'efforts et formule les lois liants ces efforts au mouvement du système.**
- **Sont généralement des efforts extérieures s'exerçant sur une surface (S) ou bien des efforts intérieurs à (S).**
- **Les efforts extérieurs exerçant dans le volume (D) déterminent un Torseur [F] dont les éléments de réduction en un point « O » sont définis par:**

$$[F] = \begin{cases} F = \iiint_{(D)} f(M)\,dv \\ M_0(F) = \iiint_{(D)} OM \wedge f(M)\,dv \end{cases}$$

- **f(M): Force de volume**
- **(D) : le domaine défini par son volume « v ».**
- **OM: Bras de levier (distance de M par rapport à « O »)**

Conséquences de la loi fondamentale de la dynamique

❖ Loi fondamentale de la statique:

Si un système (S) est en équilibre, alors le torseur des forces extérieurs sur (S) est nul.

$$\left[F\right]=0$$

❖ Théorème de l'action et de la réaction:

Soient (S_i) et (S_j) deux parties de (S).

A chaque instant « t », les actions mutuelles s'exerçant entre ces deux parties forment un torseur nul.

$$\left[F\right]_{ij}+\left[F\right]_{ji}=0$$

$\left[F\right]_{ij}$: **Actions de S_i sur S_j**

$\left[F\right]_{ji}$: **Actions de S_j sur S_i**

7. Rappels d'analyse vectorielle

Si $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ est une fonction à valeurs réelles, on définit:

Le gradient de φ (est un vecteur)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{x}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\vec{x}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{x}_3=\varphi_{,i}\vec{x}_i$$

Le laplacien de φ (est un scalaire)

$$\nabla(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}=\varphi_{,ii}$$

Si $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ est un champ de vecteur, on définit:

La divergence de $\vec{v}$ (est un scalaire)

$$\text{div}(\vec{v})=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=v_{i,i}$$

Le Rotationnel de $\vec{v}$ (est un vecteur)

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{v})=(v_{3,2}-v_{2,3})\overrightarrow{x_1}+(v_{1,3}-v_{3,1})\overrightarrow{x_2}+(v_{2,1}-v_{1,2})\overrightarrow{x_3}=\varepsilon_{ijk}v_{k,j}\overrightarrow{x_i}$$

Rappels d'analyse vectorielle (Suite)

Quelques identités élémentaires

$$\operatorname{div}(\vec{v}.\varphi) = \varphi\,\operatorname{div}(v) + v.\operatorname{grad}(\varphi)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}.\varphi) = \varphi\,\operatorname{rot}(v) + \operatorname{grad}(\varphi) \wedge v$$

$$\operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w}\,\operatorname{rot}\vec{v} - \vec{v}\,\operatorname{rot}\vec{w}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi) = 0$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi) = \nabla\,\varphi$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \nabla\,\vec{v}$$

Merci. **Fin du chapitre 1**

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 2

Notions de Tenseurs

COURS 2 **Jeudi 15.04.2010**