Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 2

Notions de tenseurs

COURS 2 Jeudi 15.04.2010

1. Notation Indicielle

1.1 Convention de la sommation (ou de l'indice muet)

Considérons un repère orthonormé d'axes $Ox_1x_2x_3$

Un vecteur $\vec{V}$ de composantes V1, V2 et V3 peut s'écrire sous la forme:

$$\vec{V} = V_1 \vec{x}_1 + V_2 \vec{x}_2 + V_3 \vec{x}_3 = \sum_{i=1}^{3} V_i \vec{x}_i \qquad (2.1)$$

La sommation est indépendante de la lettre utilisée, i.e:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3} V_j \vec{x}_j = \sum_{k=1}^{3} V_k \vec{x}_k \qquad (2.2)$$

On peut simplifier l'écriture de la sommation par:

Convention d'Einstein.

$$\vec{V} = V_i \vec{x}_i \qquad (i=1,2,3) \qquad (2.3)$$

Notation Indicielle (Suite) Convention de la sommation

L'indice « i » est appelé indice **muet**

Si l'indice apparait une seule fois dans le monôme c'est un indice **franc (ou libre)**.

On peut aussi écrire: $\vec{V} = V_i \vec{x}_i = V_j \vec{x}_j = V_k \vec{x}_k$

Exemple $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Rem: L'indice ne peut être répété que deux fois.

L'expression suivante « $a_i b_i x_i$ » n'a pas de sens et la sommation doit rester en écriture. Soit

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i x_i$$

Notation Indicielle (Suite) Convention de la sommation

La convention peut aussi être appliquée à la double sommation.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j$$

i et j : sont deux indices muets.

$$a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3$$

Ou bien à la triple sommation.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_i x_j x_k = a_{ijk}x_i x_j x_k$$

Somme de 27 termes.

Notation Indicielle (Suite)

1.2 Symbole du delta Kronecker.

Défini par:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

En forme matricielle:

$$[\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice identité)

Notation Indicielle (Suite) Symbole du delta Kronecker

Quelques relations:

(a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

(b) $\delta_{1m}\, a_m = \delta_{11}\, a_1 + \delta_{12}\, a_2 + \delta_{13}\, a_3 = a_1$

$\delta_{2m}\, a_m = \delta_{21}\, a_1 + \delta_{22}\, a_2 + \delta_{23}\, a_3 = a_2$

$\delta_{3m}\, a_m = \delta_{31}\, a_1 + \delta_{32}\, a_2 + \delta_{33}\, a_3 = a_3$

Ou bien: $\delta_{im}\, a_m = a_i$

(c) $\delta_{1m}\, T_{mj} = \delta_{11}\, T_{1j} + \delta_{12}\, T_{2j} + \delta_{13}\, T_{3j} = T_{1j}$

$\delta_{2m}\, T_{mj} = T_{2j}$

$\delta_{3m}\, T_{mj} = T_{3j}$

Ou bien: $\delta_{im}\, T_{mj} = T_{ij}$

En particulier: $\delta_{im}\, \delta_{mj} = \delta_{ij}$

$\delta_{im}\, \delta_{mn}\, \delta_{nj} = \delta_{ij}$

Notation Indicielle (Suite)

1.3 Symbole de permutation.

Défini par:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i, j, k \quad \text{rotation aiguille d' une montre} \\ 0 & \text{si} \quad \text{deux} \quad \text{indices} \ \ \text{se} \ \ \text{répétent} \\ -1 & \text{si} \quad i, j, k \quad \text{rotation inverse aiguille d' une montre} \end{cases} \qquad (2.5)$$

$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=$

$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=$

$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{122}=\varepsilon_{112}=\ldots=0$

On peut montrer qu'on a:

$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}= -\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}$

Notation Indicielle (Suite) Symbole de permutation

Si e_1, e_2 et e_3 forment un trièdre d'axes, on a:

$$e_1 \times e_2 = e_3 \quad ; \quad e_2 \times e_3 = e_1 \quad ; \quad e_2 \times e_1 = -e_3 \quad ; \quad e_1 \times e_1 = 0 \ldots.$$

Qui peuvent s'écrire sous la forme:

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk}\, e_k = \varepsilon_{jki}\, e_k = \varepsilon_{kij}\, e_k$$

En plus, si on a : $a = a_i e_i$ et $b = b_i e_i$, alors

$$a x b = (a_i e_i) \times (b_j e_j) = a_i b_j (e_i x e_j) = a_i b_j\, \varepsilon_{ijk}\, e_k$$

Enfin, on peut démontrer que:

$$\varepsilon_{ijm}\, \varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\, \delta_{jl} - \delta_{il}\, \delta_{jk}$$

1.4 Manipulations avec la notation indicielle.

1.4.1 Substitution.

Si on a $a_i = U_{im}\, b_m$

Et $b_i = V_{im}\, c_m$

Alors $a_i = U_{im}\, V_{mn}\, c_n$ (2.6)

m,n deux indices muets qui doivent être différents et doivent être différents de l'indice franc « i ».

(2.6) représente 03 équations chacune est une sommation de neuf termes coté droit.

1.4.2 Multiplication.

Si on a $p = a_m b_m$

Et $q = c_m d_m$

Alors $p\,q = a_m b_m c_n d_n \neq a_m b_m c_m d_m$ (2.7)

Si on a: $a = a_i e_i$ et $b = b_i e_i$ alors le produit scalaire sera

$$a\,.\,b = (a_i e_i)\,.\,(b_j e_j) = a_i b_j (e_i . e_j)$$

Si e_1 e_2 et e_3 sont des vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux, alors:

$e_i\,.\,e_j = \delta_{ij}$

Et $a\,.\,b = (a_i b_j)\,\delta_{ij} = a_i b_i = a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (2.8)

Notation Indicielle (Suite) Manipulations avec la notation indicielle

1.4.3 Factorisation

Si on a $T_{ij}\, n_j - \lambda\, n_i = 0$

Or on peut écrire $n_i = \delta_{ij}\, n_j$

Alors; $T_{ij}\, n_j - \lambda\, n_i = T_{ij}\, n_j - \lambda\, \delta_{ij}\, n_j = (T_{ij} - \lambda\, \delta_{ij})\, n_j = 0$ (2.9)

1.4.4 Contraction

L'opération qui consiste à identifier deux indices et les sommer est connue sous le nom de contraction.

Exemple; T_{ii} est la contraction de T_{ij}.

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

Si on a : $T_{ij} = \lambda\, \theta\, \delta_{ij} + 2\, \mu\, E_{ij}$

Alors $T_{ii} = \lambda\, \theta\, \delta_{ii} + 2\, \mu\, E_{ii} = 3\, \lambda\, \theta + 2\, \mu\, E_{ii}$ (2.10)

2. Tenseurs

2.1 Une transformation linéaire - tenseur

Supposons T, une transformation qui transforme n'importe quel vecteur en un autre.

Si T transforme le vecteur « a » en « c » et le vecteur « b » en « d », on peut écrire:

$$T\,a = c \quad \text{et} \quad T\,b = d$$

Si « T » a les propriétés linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} T\,(a+b) &= T\,a + T\,b \\ T\,(\alpha\, a) &= \alpha\, T\,a \end{aligned} \tag{2.11}$$

a, b deux vecteurs arbitraires et «α » un scalaire qlq, alors

« T » est appelée transformation linéaire ou bien tenseur de second-ordre ou tenseur.

Tenseurs (Suite) Une transformation linéaire

Une définition équivalente de la transformation linéaire en passant par une seule propriété linéaire (combinaison des deux):

$$\mathbf{T}\,(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\, \mathbf{T}\, a + \beta\, \mathbf{T}\, b \qquad (2.12)$$

Exemple 1.

« T » est une transformation qui transforme n'importe quel vecteur en un vecteur fixe « n ». Est-ce que cette transformation est un tenseur?

Soient a et b deux vecteurs qlqs, alors par définition:

$T\,a = n \quad ; \quad T\,b = n \quad$ **et** $\quad T(a+b) = n$

D'où $\quad T\,(a+b) \neq T\,a + T\,b$

« T » n'est pas un tenseur

Exemple 2.

« T » est une transformation qui transforme n'importe quel vecteur en un vecteur qui est « k » fois le vecteur d'origine. Est-ce que cette transformation est un tenseur?

Soient a et b deux vecteurs qlqs et «α » et « β » 02 scalaires qlqs :

$$T\,a = k\,a \quad ; \quad T\,b = k\,b \quad \text{et} \quad T(\alpha\, a + \beta\, b) = k(\alpha\, a + \beta\, b)$$

Alors, $$k(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\,(k\, a) + \beta\,(k\, b) = \alpha\, T\, a + \beta\, T\, b$$

« T » est un tenseur

Rem: Si « k » = 0, le tenseur T transforme tous les vecteurs en zéro. C'est le tenseur (0).

Tenseurs (suite)

2.2 Composantes du tenseur

Les composantes d'un tenseur dépendent de la base utilisée (comme les vecteurs).

e_1, e_2 et e_3 vecteurs unitaires d'un repère cartésien (x_1,x_2,x_3). En les transformant (par « T ») , ces vecteurs deviennent Te_1, Te_2 et Te_3, avec:

$$\begin{aligned} T\,e_1 &= T_{11}\,e_1 + T_{21}\,e_2 + T_{31}\,e_3 \\ T\,e_2 &= T_{12}\,e_1 + T_{22}\,e_2 + T_{32}\,e_3 \\ T\,e_3 &= T_{13}\,e_1 + T_{23}\,e_2 + T_{33}\,e_3 \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Ou bien $$T\,e_i = T_{ji}\,e_j \qquad (2.14)$$

De l'éq (2.13), on peut dire que:

$$T_{11} = e_1.T\,e_1;\quad T_{12} = e_1.T\,e_2;\quad T_{21} = e_2.Te_1\ldots$$

i.e. $$T_{ij} = e_i\,.\,T\,e_j \qquad (2.15)$$

Les « T_{ij} » sont les composantes du tenseur « T ».

Tenseurs (suite) Composantes du tenseur

Les composantes d'un tenseur peuvent être écrites sous forme matricielle, comme suit:

$$[T]=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Appelée matrice du tenseur T correspondant à la base {e_1, e_2, e_3}.

La 1ère colonne correspond aux composantes de Te_1

La 2ème colonne à ceux de Te_2 et la 3ème colonne à Te_3.

Exemple 1.

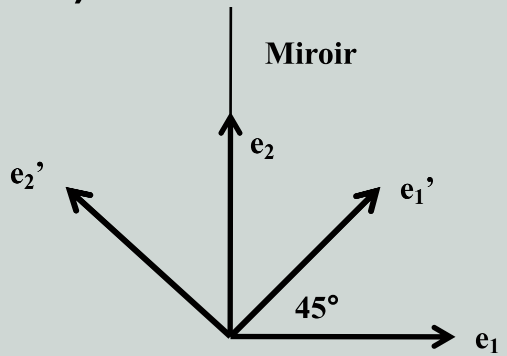
Définir la matrice du tenseur T qui transforme la base des vecteurs comme suit: $T\,e_1 = 4e_1+e_2$; $T\,e_2=2e_1+3e_3$; $T\,e_3=-e_1+3e_2+e_3$

Soit:

$$[T]=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.

Déterminer la matrice du tenseur qui transforme un vecteur qlq en son image par rapport un plan fixe. Prendre e_1 normal au plan de réflexion (e_2, e_3 // à ce plan).



La normale est transformée en négatif et les autres restent inchangés, alors:

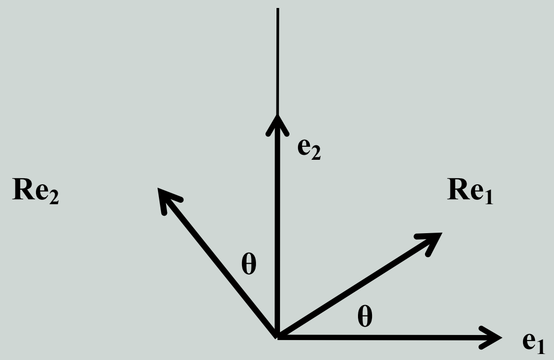
$$Te_1 = -e_1; \quad Te_2=e_2 \quad \text{et} \quad Te_3=e_3.$$

Ou bien:

$$[T]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.

Déterminer la matrice du tenseur R de la rotation autour de l'axe x_3



On peut tirer de la figure

$$Re_1 = \cos\theta\ e_1 + \sin\theta\ e_2$$

$$Re_2 = -\sin\theta\ e_1 + \cos\theta\ e_2$$

$$Re_3 = e_3$$

Ou bien:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseurs (suite)

2.3 Composantes d'un vecteur transformé

Connaissant les composantes d'un vecteur « a » et du tenseur « T », on veut déterminer les composantes du vecteur « b=Ta ».

Soit « a_1, a_2 et a_3 » les composantes de « a » suivant e_1, e_2 et e_3

$$a = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3$$

alors: $b = Ta = T(a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3) = a_1\, Te_1 + a_2\, Te_2 + a_3\, Te_3$

D'où

$$b_1 = e_1 \,.\, b = a_1\,(e_1.Te_1) + a_2\,(e_1.Te_2) + a_3\,(e_1.Te_3)$$

$$b_2 = e_2 \,.\, b = a_1\,(e_2.Te_1) + a_2\,(e_2.Te_2) + a_3\,(e_2.Te_3)$$

$$b_3 = e_3 \,.\, b = a_1\,(e_3.Te_1) + a_2\,(e_3.Te_2) + a_3\,(e_3.Te_3)$$

Or on a eq (2.15) ($T_{ij} = e_i \,.\, T\, e_j$)

D'où

$$b_1 = T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3$$

$$b_2 = T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3$$

$$b_3 = T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3$$

$$[b] = [T]\,[a] \qquad b_k = T_{ki}\, a_i \qquad (2.16)$$

 Composantes d'un vecteur transformé

Exemple.

Soit le tenseur T qui transforme la base de vecteurs comme suit:

$$T\,e_1 = 2\,e_1 - 6\,e_2 + 4\,e_3$$

$$T\,e_2 = 3\,e_1 + 4\,e_2 - e_3$$

$$T\,e_3 = -2\,e_1 + e_2 + 2\,e_3$$

Comment ce tenseur transforme le vecteur $a = e_1 + 2e_2 + 3e_3$

Soit:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -6 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Soit le vecteur $b = 2e_1 + 5e_2 + 8e_3$

Tenseurs (suite)

2.4 Somme de tenseurs

La somme (ou la différence) de deux tenseurs T et S de même ordre est définie par:

$$(T + S)\, a = Ta + Sa \qquad (2.17)$$

La somme W=T + S est aussi un tenseur de même ordre, ces composantes sont définies par:

$$W_{ij}=e_i.we_j = e_i.(T+S)e_j = e_i.Te_j + e_i.Se_j \qquad (2.18)$$

i.e. $W_{ij} = T_{ij}+S_{ij}$

En notation matricielle

$$[W] = [T] + [S]$$

La somme et la différence de tenseurs d'ordre différent est impossible.

Tenseurs (suite)

2.5 Produit de deux tenseurs

Le produit de 02 tenseurs est un tenseur dont l'ordre est égal à la somme des ordres des 02 tenseurs.

Soit: $W = T\,S$

$$(T\,S)\,a = T\,(S\,a) \qquad (2.19)$$

Avec

$$W_{ij}=(T\,S)_{ij} = e_i.we_j = e_i.T\,(Se_j)= e_i.TS_{mj}e_m = S_{mj}e_i.Te_m=T_{im}S_{mj}$$

i.e.

$$W_{ij} = T_{im}+S_{mj} \qquad (2.20)$$

Le produit (T S) est généralement différent du produit (S T)

La multiplication d'un tenseur par un scalaire est aussi un tenseur de même ordre que le tenseur initial.

Exemple.

Soit R la rotation de corps rigide de 90° autour de l'axe X_3 et S la rotation de corps rigide de 90° autour de l'axe X_1.

a) **Trouver la matrice du tenseur correspondant à R.**

b) **Trouver la matrice du tenseur correspondant à S.**

c) **Trouver la matrice du tenseur correspondant à la rotation R puis à celle de S.**

d) **Trouver la matrice du tenseur correspondant à la rotation S puis à celle de R.**

e) **Soit un point P de position initiale (1,1,0). Trouver la nouvelle position du point après la rotation défini en (c) et celle définie en (d).**

La rotation autour de x_3 est définie comme suit

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseurs (suite) Produit de tenseurs

Avec « θ » = 90°, on aura:

$$[R]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

De même pour « S » avec « θ » = 90°, on aura:

$$[S]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

c) Rotation R puis S, on aura:

$$[SR]=[S][R]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

d) Rotation S puis R, on aura:

$$[RS]=[R][S]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

e) Position après rotations c):

$$[r^*]=[SR][r]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$r^* = -e_1 + e_3$

e) Position après rotations d):

$$[r^{**}]=[RS][r]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$r^{**} = e_2 + e_3$

2.6 Transpose d'un tenseur

La transpose d'un tenseur T^T est le tenseur qui satisfait, pout tous vecteurs a et b, ce qui suit:

$$\mathbf{a.Tb = b.T^Ta} \qquad (2.21)$$

D'où

$$e_i.Te_j = e_j.T^Te_i$$

i.e. $$T_{ij} = T_{ji}{}^T \qquad (2.22)$$

Ainsi $[T^T] = [T]^T$

$$[T^T]^T = T$$

$$[T\ S]^T = [S]^T\ [T]^T$$

$$(A\ B\ C\ D)^T = D^T\ C^T\ B^T\ A^T$$

2.7 Produit dyadique de 02 vecteurs

Est défini comme la transformation qui transforme n'importe quel vecteur « c » (à partir de 02 vecteurs donnés a et b) selon la régle:

$$(a\ b)\ c = a\ (b.c) \tag{2.23}$$

En général:

$$(a\ b)\ (\alpha c + \beta d) = a\ (b.(\alpha c + \beta d)) = a((\alpha bc) + (\beta bd)) = \alpha(ab)c + \beta(ab)d \tag{2.24}$$

Si W=ab, on aura

$$W_{ij}=e_i.We_j=e_i.(ab)e_j=e_i.a(b.e_j)= a_i b_j$$

i.e. $W_{ij} = a_i b_j$

En matriciel

$$[W]=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

Cas particulier, le produit dyadique des vecteurs de base e_i, on a:

$$[e_1e_1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [e_1e_2]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{ d'où } \quad T = T_{ij}\ e_i\ e_j \tag{2.25}$$

Tenseurs (suite)

2.8 Trace d'un tenseur

La trace de « ab » est le scalaire donné par:

$$\text{tr } ab = a.b$$

En général:

$$\text{tr } (\alpha ab + \beta cd) = \alpha \text{ tr } ab + \beta \text{ tr } cd \qquad (2.26)$$

$$\text{tr } T = \text{tr } (T_{ij}\, e_i\, e_j) = T_{ij} \text{ tr}(e_i\, e_j)\ T_{ij}\, e_i.e_j = T_{ij}\, \delta_{ij} = T_{ii}$$

$$\text{tr } T = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad \text{(Somme des éléments de la diagonale)} \qquad (2.27)$$

2.9 Tenseur identité et tenseur inverse

La transformation qui transforme chaque vecteur en lui-même est un tenseur identité.

$$I\, a = a \qquad (2.28)$$

En particulier $I\, e_1 = e_1$; $I\, e_2 = e_2$; $I\, e_3 = e_3$

D'où $I_{ij} = e_i.\, Ie_j = e_i.e_j = \delta_{ij}$

i.e.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi $T\, I = I\, T = T$ (2.29)

Tenseurs (suite) tenseur inverse

Soient «T » et « S » 02, tenseurs. Si on a

$$S\,T = I \qquad (2.30)$$

Alors « S » est appelée le tenseur inverse de « T » et est notée $S=T^{-1}$

Trouver l'inverse du tenseur c'est trouver l'inverse de la matrice correspondant à T (cas où det ≠0).

2.10 Tenseur orthogonal

Un tenseur orthogonal est une transformation linéaire qui permet aux vecteurs transformés de garder leurs longueurs et leurs angles.

Ainsi, pour chaque « a » et « b », on a: (Q tenseur orthogonal)

$$|Q\,a| = |a| \quad \text{et} \quad \cos(a, b) = \cos(Qa, Qb) \qquad (2.31)$$

En passant par la transposé, on aura:

$$(Q\,a).(Q\,b) = b.\,Q^T(Q\,a) = b.(Q^TQ)\,a$$

D'où $\quad b.(Q^TQ)\,a = a.b = b.a = b.I\,a$

Puisque « a » et « b » sont qlqs, alors:

$$Q^TQ = I \;\; ; \; Q^{-1}=Q^T \qquad (2.32)$$

En matriciel, $[Q][Q]^T=[Q]^T[Q]=[I] \qquad Q_{im}Q_{jm}=Q_{mi}Q_{mj}=\delta_{ij}$

Tenseurs (suite) tenseur orthogonal

Le déterminant de la matrice d'un tenseur orthogonal est égal à « +1 » ou à « -1 ».

$$\det([Q][Q]^T) = \det([Q])\det([Q]^T) = \det[I]$$

Or $\det[Q]) = \det[Q]^T) = \det[Q]^2)$ **et** $\det[I] = 1$

d'où $\det[Q] = \pm 1$ **(2.33)**

Exemple.

Pb de la transformation d'un vecteur en son image par rapport à un plan fixe. Son tenseur était:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors $[T][T]^T$=

$$[T][T]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det[T] = -1 (réflexion)

Exemple.

Pb de la transformation rotation autour d'un axe. Son tenseur était:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors $[R][R]^T$=

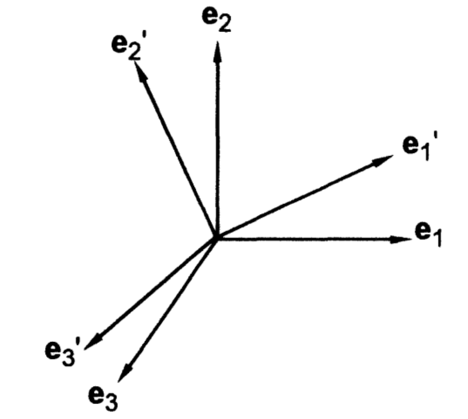
$$[R][R]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det[R] = +1 (rotation)

2.11 Matrice de transformation de 02 systèmes cartésiens

Soient 02 systèmes cartésiens définis par les vecteurs unités « e_i » et « e'_i »

On peut obtenir l'un de l'autre par rotation de de corps rigide ou par rotation suivie d'une réflexion.



$$e'_i = Q\, e_i = Q_{mi} e_m$$

i.e.

$$\begin{aligned} e'_1 &= Q_{11}e_1 + Q_{21}e_2 + Q_{31}e_3 \\ e'_2 &= Q_{12}e_1 + Q_{22}e_2 + Q_{32}e_3 \\ e'_3 &= Q_{13}e_1 + Q_{23}e_2 + Q_{33}e_3 \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Où

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}$$

On note que:

$Q_{11} = e_1.Q\, e_1 = e_1.e'_1 = \cos(e_1, e'_1)$ …. $Q_{ij} = \cos(e_i, e'_j) = e_i \cdot e'_j$ (2.35)

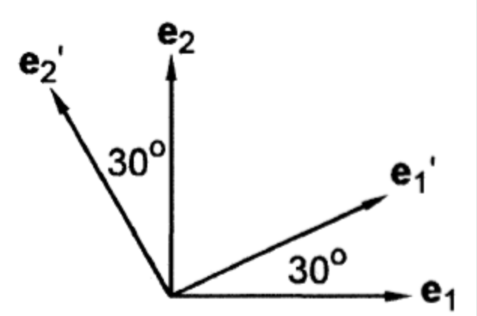
La matrice de ces cosinus directeurs est appelée matrice de transformation des axes.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

Tenseurs (suite) Matrice de transformation de 02 systèmes cartésiens

Exemple

Trouver la matrice de transformation du repère « e'_i » obtenu par rotation du repère « e_i » de 30° par rapport à « e_3 ».



e_3 coïncide avec e'_3.

En utilisant l'équation (2.35), on a:

$$Q_{11}=\cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}'_1)=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2},\ Q_{12}=\cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}'_2)=\cos 120^o=-\frac{1}{2},\ Q_{13}=\cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}'_3)=\cos 90^o=0$$

$$Q_{21}=\cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}'_1)=\cos 60^o=\frac{1}{2},\ Q_{22}=\cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}'_2)=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2},\ Q_{23}=\cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}'_3)=\cos 90^o=0$$

$$Q_{31}=\cos(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}'_1)=\cos 90^o=0,\ Q_{32}=\cos(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}'_2)=\cos 90^o=0,\ Q_{33}=\cos(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}'_3)=\cos 0^o=1$$

Et la matrice de transformation sera donc:

$$[\mathbf{Q}]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Tenseurs (suite)

2.12 Transformation des composantes de vecteurs

Soit un vecteur « a » qlq avec comme composantes (par rapport à « e_i » et « e'i »)

$$a_i = a.e_i \quad \text{et} \quad a'_i = a.e'_i$$

Or $e'_i = Q_{mi} e_m$ **(éq. 2.34),** $a'_i = a.Q_{mi}e_m = Q_{mi}(a.e_m) = Q_{mi}a_m$ **(2.36)**

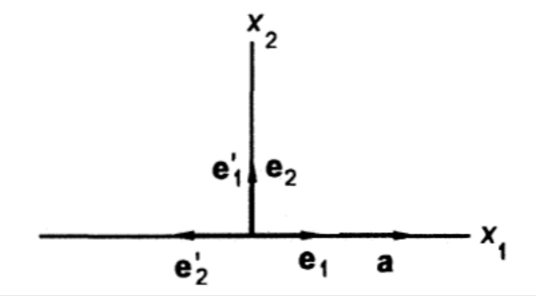
En matriciel

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{a}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{a}]$$

Exemple

Trouver les composantes du vecteur a(2,0,0) dans le nouveau repère « e'_i » obtenu par rotation de 90° contraire aux aiguilles d'une montre autour de l'axe « e_3 ».



La matrice de transformation est, avec $e'_1=e_2$, $e'_2=-e_1$ et $e'_3=e_3$.

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$[\mathbf{a}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a = 2\,e_1 = -2\,e'_2$$

Tenseurs (suite)

2.13 Transformation des composantes de tenseurs

Soit un tenseur « T » qlq avec comme composantes (par rapport à « e_i » et « e'i »)

$$T_{ij}=e_i.\ Te_j \quad \text{et } T'_{ij}=e'_i.\ Te'_j$$

Or $e'_i = Q_{mi}e_m$ (éq. 2.34), $T'_{ij} = Q_{mi}e_m.TQ_{nj}e_n = Q_{mi}Q_{nj}(e_m.Te_n)$ **(2.37)**

D'où: $T'_{ij} = Q_{mi}Q_{ni}T_{mn}$ **(2.38)**

En matriciel

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{Q}]$$

Ou bien, l'inverse

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{T}]'[\mathbf{Q}]^T$$

$$T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn}$$

Tenseurs (suite) Transformation des composantes de tenseurs

Exemple

Soit la matrice du tenseur T,
$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer la transformée des composantes de ce tenseur dans le nouveau repère obtenu par rotation (contre aiguilles montre) de 90° par rapport à e_3.

Puisque: $e'_1=e_2$, $e'_2=-e_1$ et $e'_3=e_3$, on a alors la transformation

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et les nouvelles composantes du tenseur seront:

$$[T]' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseurs (suite)

2.14 Définition des tenseurs par les transformations

Lorsque les composantes d'un vecteur ou d'un tenseur sont connues dans le repère « e_i », alors les composantes dans un autre repère « e'_i » sont déterminées de façon unique à partir des composantes initiales.

On peut donc utiliser les transformations d'un repère à un autre pour définir un tenseur. Ainsi:

$\alpha' = \alpha$	**Tenseur d'ordre zéro (scalaire)**
$a'_i = Q_{mi} a_m$	**Tenseur d'ordre 1 (vecteur)**
$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$	**Tenseur d'ordre 2 (tenseur)**
$T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} T_{mnr}$	**Tenseur d'ordre 3**

2.15 Tenseur symétrique et tenseur antisymétrique

Tenseur symétrique si: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

d'où

$$T_{ij} = T_{ij}^T = T_{ji}$$

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{23} = T_{32} \qquad (2.39)$$

Tenseur antisymétrique si: $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$

d'où

$$T_{ij} = -T_{ij}^T = -T_{ji}$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$$ **et** $$T_{12} = -T_{21}, \quad T_{13} = -T_{31}, \quad T_{23} = -T_{32}.$$

Chaque tenseur peut être décompose en tenseur symétrique et tenseur antisymétrique.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A$$

Avec:

$$\mathbf{T}^S = \frac{\mathbf{T}+\mathbf{T}^T}{2}$$ **et** $$\mathbf{T}^A = \frac{\mathbf{T}-\mathbf{T}^T}{2}$$

2.16 Vecteur dual d'un tenseur antisymétrique

Un tenseur antisymétrique a réellement 03 composantes indépendantes, puisque $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$ et $T_{12} = -T_{21},\ T_{13} = -T_{31},\ T_{23} = -T_{32}.$
Il va se comporter comme un vecteur.

Pour chaque tenseur antisymétrique « T », correspond un vecteur « t^A » de façon à ce que la transformée « T a » de chaque vecteur « a » peut être obtenue par le produit:

$$\mathbf{Ta} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{a} \qquad (2.40)$$

« t^A » est appelé vecteur dual (ou vecteur axial) du tenseur antisymétrique. Sa forme est (sachant que a.bxc = b.cxa:

$$\begin{aligned} T_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 = -t_3^A \\ T_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 = -t_2^A \\ T_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 = -t_1^A \end{aligned} \qquad (2.41)$$

De même: $T_{21} = t_3^A,\ T_{13} = t_2^A, T_{32} = t_1^A$ et $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0.$

Ainsi $\mathbf{t}^A = -(T_{23}\mathbf{e}_1 + T_{31}\mathbf{e}_2 + T_{12}\mathbf{e}_3) = (T_{32}\mathbf{e}_1 + T_{13}\mathbf{e}_2 + T_{21}\mathbf{e}_3)$ Ou $2\mathbf{t}^A = -\varepsilon_{ijk} T_{jk} \mathbf{e}_i$ (2.42)

Tenseurs (suite) Vecteur dual d'un tenseur antisymétrique

Exemple

Soit le tenseur suivant: $[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Décomposer en sym et antisym.
b) Trouver le vecteur dual de la partie antisymétrique.
c) Vérifier que $T^A a = t^A x a$ pour $a = e_1 + e_3$.

a) $[T] = [T^S] + [T^A]$ avec $[\mathbf{T}^S] = \frac{[\mathbf{T}]+[\mathbf{T}]^T}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **et** $[\mathbf{T}^A] = \frac{[\mathbf{T}]-[\mathbf{T}]^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Vecteur dual de T^A sera:

$$\mathbf{t}^A = -(T_{23}^A\mathbf{e}_1 + T_{31}^A\mathbf{e}_2 + T_{12}^A\mathbf{e}_3) = -(0\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

c) En posant $b = T^A a$, on a:

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

De l'autre coté

$$\mathbf{t}^A \times \mathbf{a} = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$$

2.17 Valeurs et vecteurs propres d'un tenseur

Si un vecteur « a » transforme par le biais d'un tenseur « T » en vecteur parallèle à lui-même, i.e:

$$\mathbf{Ta} = \lambda \mathbf{a} \qquad (2.43)$$

Alors « a » est un vecteur propre et « λ » est la valeur propre correspondante.

De plus chaque vecteur // à « a » est aussi un vecteur propre avec la même valeur propre « λ ». Donc, pour chaque scalaire «α », on a:

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{Ta} = \alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(\alpha\mathbf{a}) \qquad (2.44)$$

Supposons un vecteur propre unitaire « n », alors:

$\mathbf{Tn} = \lambda\mathbf{n} = \lambda\mathbf{In}$ Soit $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$

En posant « $n = \alpha_i e_i$ » on aura

$$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})\alpha_j = 0 \qquad (2.45)$$

Soit

 Valeurs et vecteurs propres d'un tenseur

Soit

$$\begin{aligned} (T_{11}-\lambda)\alpha_1+T_{12}\alpha_2+T_{13}\alpha_3 &= 0 \\ T_{21}\alpha_1+(T_{22}-\lambda)\alpha_2+T_{23}\alpha_3 &= 0 \\ T_{31}\alpha_1+T_{32}\alpha_2+(T_{33}-\lambda)\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.46)$$

Système de 03 équations à 04 inconnues qui ne peut donner de solutions différentes de zéro que si le déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.47)$$

Dont la résolution donne une équation caractéristique (polynômes cubique) en «λ » donnant les valeurs propres du tenseur. En remplaçant dans le système initial, on peut obtenir pour chaque valeur de «λ », le vecteur propre correspondant, sachant aussi que:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1 \qquad (2.48)$$

2.18 Valeurs et directions principales d'un tenseur symétrique

Pour des tenseurs symétriques réels, les valeurs et vecteurs propres sont appelés valeurs principales et directions principales du tenseur.

Pour un tenseur symétrique réel, il existe toujours 03 directions principales qui sont mutuellement perpendiculaires.

2.19 Matrice d'un tenseur par rapport aux directions principales

Soient n_1, n_2 et n_3 les vecteurs unités dans les directions principales.

Les composantes du tenseur peuvent s'écrire alors:

$$T_{11} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \lambda_1 \mathbf{n}_1 = \lambda_1$$
$$T_{22} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \lambda_2 \mathbf{n}_2 = \lambda_2$$
$$T_{33} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3 \cdot \lambda_3 \mathbf{n}_3 = \lambda_3$$
$$T_{12} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{n}_2 = \lambda_2(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0 = T_{21}$$
$$T_{13} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \cdot \lambda_3 \mathbf{n}_3 = \lambda_3(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3) = 0 = T_{31}$$
$$T_{23} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_2 \cdot \lambda_3 \mathbf{n}_3 = \lambda_3(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3) = 0 = T_{32}$$

Soit

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad (2.49)$$

Tenseurs (suite)

2.20 Invariants d'un tenseur

L'équation caractéristique d'un tenseur peut s'écrire:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad (2.50)$$

Avec:

$$I_1 = T_{11}+T_{22}+T_{33} = T_{ii} = \mathrm{tr}\,\mathbf{T} \qquad I_1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

Invariant linéaire (2.51)

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{T}^2)]$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$$

Invariant quadratique (2.52)

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det[\mathbf{T}] \qquad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Invariant cubique (2.53)

3. Calculs sur les Tenseurs

3.1 Fonctions valeur-tenseur d'un scalaire

Soit T = T(t) une fonction valeur-tenseur du scalaire « t » (ex temps).
La dérivée de « T » est définie par le tenseur d'ordre 2 donné par:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{T}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t} \qquad (2.54)$$

Quelques relations:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{T}+\mathbf{S}) &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{T}) &= \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{T} + \alpha\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{TS}) &= \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{S} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{S}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{Ta}) &= \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{a}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T) &= \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^T
\end{aligned} \qquad (2.55)$$

3.2 Champ scalaire – Gradient d'une fonction scalaire

Soit Φ(r) une fonction valeur-scalaire du vecteur position « r ».

i.e. pour chaque position « r », Φ(r) donne la valeur d'un scalaire (densité, température, potentiel électrique…) au point.

Φ(r) décrit un champ scalaire.

On peut associer au champ scalaire, un champ vecteur appelé gradient de Φ défini par $\nabla\phi$: (en le multipliant par « dr », on obtient la différence des valeurs de scalaires à (r+dr) et « r ».

$$d\phi = \phi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \qquad (2.56)$$

Les composantes cartésiennes du gradient peuvent s'écrire:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 \qquad (2.57)$$

Exemple

Si $\Phi = x_1 x_2 + x_3$, trouver un vecteur unitaire « n » normal à la surface de constante « Φ » passant par (2,1,0).

On a: $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}e_3$ $= x_2 e_1 + x_1 e_2 + e_3$

Au point (2,1,0), on a

$$\nabla\phi = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad ; \quad \text{alors} \quad n = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(e_1 + 2e_2 + e_3\right)$$

3.3 Champ de vecteur – Gradient de champ de vecteur

Soit v(r) une fonction valeur-vecteur de position, comme par exemple celle qui décrit un champ de déplacement ou de vitesse.

v(r) décrit un champ de vecteur.

On peut associer au champ vecteur, un champ de tenseur appelé gradient de v défini par $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}$: (en le multipliant par « dr », on obtient la différence des valeurs de vecteurs à (r+dr) et « r ».

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v})d\mathbf{r} \qquad (2.58)$$

Notons la longueur de dr par |dr| = *dr*, alors e=dr/ |dr| = dr/*dr*

Avec ça, on aura:

$$\left(\frac{\mathrm{dv}}{dr}\right)_{\text{en direction "e"}} = (\nabla \mathrm{v})\mathrm{e} \qquad (2.59)$$

Ainsi, le tenseur de second ordre $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}$ transforme le vecteur unitaire « e » en vecteur décrivant le taux de changement de « v » dans cette direction.

Calculs sur les Tenseurs (Suite) Champ de vecteur – Gradient de champ de vecteur

Puisque:

$$\left(\frac{d\mathrm{v}}{dr}\right)_{\text{en direction "e1"}} \equiv \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1} = (\nabla \mathrm{v})\mathrm{e}_1$$

En cordonnées cartésiennes ça devient:

$$(\nabla \mathbf{v})_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v})$$

$$(\nabla \mathbf{v})_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

En général;

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_j \text{ direction}} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_j$$

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v})$$

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\rightarrow \quad [\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Calculs sur les Tenseurs (Suite)

3.4 Divergence d'un champ de vecteur – Divergence d'un champ de tenseur

Soit v(r) un champ de vecteur. La divergence de v(r) est un scalaire donné par la trace du gradient de « v ». Soit

$$\mathrm{div}(\mathrm{v}) \equiv \mathrm{tr}(\nabla \mathrm{v}) \tag{2.60}$$

En coordonnées cartésiennes, les éléments diagonaux de $\nabla \mathbf{v}$ sont:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \text{ et } \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Ainsi :

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \tag{2.61}$$

Soit T(r) un champ de tenseur d'ordre 2. La divergence de T(r) est un champ de vecteur donné par:

$$(\mathrm{div}\mathbf{T})\cdot\mathbf{a} \equiv \mathrm{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{a}) - \mathrm{tr}(\mathbf{T}^T(\nabla\mathbf{a})) \qquad (2.62)$$

En coordonnées cartésiennes, sachant que $\nabla\mathbf{e}_i = 0$ et en posant b=divT, on a (éq 2.62):

$$b_i = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_i = \mathrm{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{e}_i) - \mathrm{tr}(\mathbf{T}^T\nabla\mathbf{e}_i) = \mathrm{div}(T_{im}\mathbf{e}_m) - 0 = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} \qquad (2.63)$$

i.e.

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m}\mathbf{e}_i$$

3.5 Curl d'un champ de vecteur

Soit v(r) un champ de vecteur. Le curl de v(r) est un champ de vecteur donné par 02 fois le vecteur dual de la partie antisymétrique de $\nabla \mathbf{v}$:

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{v} \equiv 2\mathbf{t}^A \qquad (2.64)$$

Où t^A est le vecteur dual de $(\nabla \mathbf{v})^A$.

En base cartésienne rectangulaire :

$$[\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Et le curl sera (éq 2.41, 2.42) :

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{v} = 2\mathbf{t}^A = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 \qquad (2.65)$$

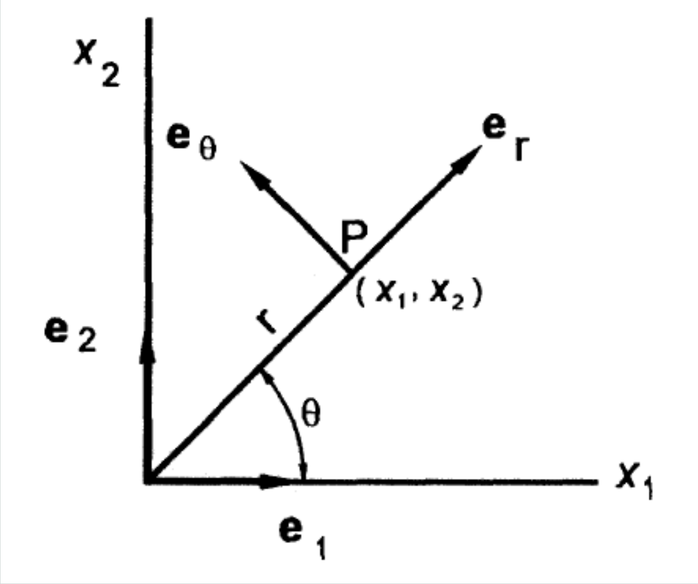
4. Coordonnées curvilignes

4.1 Coordonnées polaires

En plan, les coordonnées polaires sont:

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}$$



Le passage d'un repère à un autre se fait par:

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2 \qquad (2.66)$$

Les vecteurs de base unitaires varient en direction lorsque « θ » change.

Coordonnées curvilignes (suite) Coordonnées polaires

Des éq. (2.66), on peut tirer que:

$$d\mathbf{e}_r = d\theta\mathbf{e}_\theta$$
$$d\mathbf{e}_\theta = -d\theta\mathbf{e}_r \qquad (2.67)$$

i) Composantes du gradient de « f ».

Soit f(r, θ) un champ scalaire. Par définition du gradient de « f », on a:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = [a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta]].[dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta]$$

Où « a_r » et « a_θ» sont les composantes de ∇f dans les directions e_r et e_θ respectivement.

Alors $df = a_r dr + a_\theta r d\theta$ Or $df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta$ D'où $a_r = \frac{\partial f}{\partial r}$ et $ra_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}$

Finalement

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (2.68)$$

Coordonnées curvilignes (suite) Coordonnées polaires

ii) Composantes du gradient de « v ».

Soit v(r, θ)

$$\mathbf{v}(r,\theta) = v_r(r,\theta)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\theta)\mathbf{e}_\theta \qquad (2.69)$$

Par définition du gradient de « v », on a

$$d\mathbf{v} \equiv (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}$$

En posant $\mathbf{T} \equiv \nabla\mathbf{v}$, **On a**

$$d\mathbf{v} = \mathbf{T}d\mathbf{r} = \mathbf{T}(dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta) = dr\mathbf{T}\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{T}\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_r = T_{rr}\mathbf{e}_r + T_{\theta r}\mathbf{e}_\theta \quad \text{and} \quad \mathbf{T}\mathbf{e}_\theta = T_{r\theta}\mathbf{e}_r + T_{\theta\theta}\mathbf{e}_\theta$$

alors

$$d\mathbf{v} = (T_{rr}dr + T_{r\theta}rd\theta)\mathbf{e}_r + (T_{\theta r}dr + T_{\theta\theta}rd\theta)\mathbf{e}_\theta \qquad (2.70)$$

Or, éq 2.69

$$d\mathbf{v} = dv_r\mathbf{e}_r + v_r d\mathbf{e}_r + dv_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\theta d\mathbf{e}_\theta$$

D'où

$$dv_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}dr + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}d\theta \quad \textbf{et} \quad dv_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}dr + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}d\theta$$

Coordonnées curvilignes (suite) Coordonnées polaires

ii) Composantes du gradient de « v ».

De ces éqs et sachant que (eq 2.67):

$$d\mathbf{e}_r = d\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$d\mathbf{e}_\theta = -d\theta \mathbf{e}_r$$

On a

$$d\mathbf{v} = \left[\frac{\partial v_r}{\partial r}dr + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right)d\theta\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r}dr + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)d\theta\right]\mathbf{e}_\theta \qquad \textbf{(2.71)}$$

Donnant par similitude

$$T_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad T_{r\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right), \quad T_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \quad T_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)$$

En matriciel

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.72)}$$

Coordonnées curvilignes (suite) Coordonnées polaires

iii) Divergence de « v ».

Utilisons les composantes du gradient de « v » obtenus en ii), on peut écrire:

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{v}) = T_{rr} + T_{\theta\theta} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \qquad (2.73)$$

iv) Curl de « v ».

Donné par:

$$\mathrm{curl}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_3 \qquad (2.74)$$

v) Composantes de divergence de « T ».

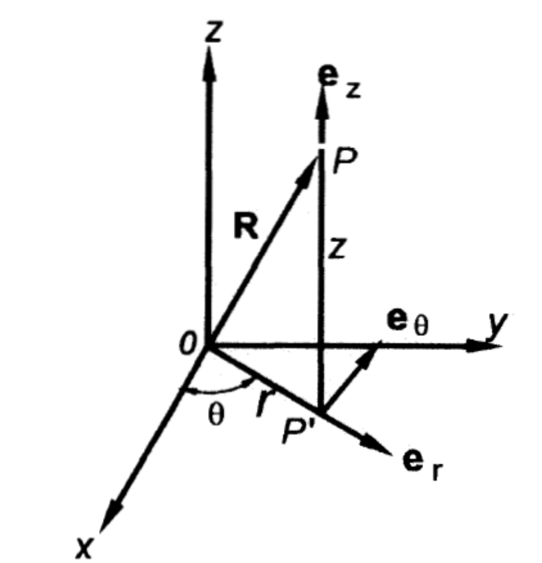
La divergence d'un tenseur de second ordre est:

$$(\mathrm{div}\mathbf{T})\cdot\mathbf{a} = \mathrm{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{a}) - \mathrm{tr}((\nabla\mathbf{a})\mathbf{T}^T) \qquad (2.75)$$

Coordonnées curvilignes (suite)

4.2 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, la position du point est déterminé par (r,θ,z) (i.e. coordonnées polaires (r,θ) dans le plan « xy » plus la coordonnée « z » perpendiculaire au plan « xy ».



On peut tirer de la figure que:

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \qquad (2.76)$$

et

$$d\mathbf{R} = dr\mathbf{e}_r + rd\mathbf{e}_r + dz\mathbf{e}_z + zd\mathbf{e}_z$$

Or qlq soit le point « P », e_z ne change jamais de direction et de magnitude, d'où $de_z=0$.

Alors

$$d\mathbf{R} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z \qquad (2.77)$$

En suivant la même démarche que les coordonnées polaires, on peut obtenir les différentes opérateurs.

Coordonnées curvilignes (suite) Coordonnées cylindriques

i) Composantes du gradient de « f ».

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \qquad (2.78)$$

ii) Composantes du gradient de « v ».

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (2.79)$$

iii) Divergence de « v ».

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (2.80)$$

iv) Curl de « v ».

$$\mathrm{curl}\mathbf{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z$$

(2.81)

v) Composantes de divergence de « T ».

$$(\mathrm{div}\mathbf{T})_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$(\mathrm{div}\mathbf{T})_\theta = \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

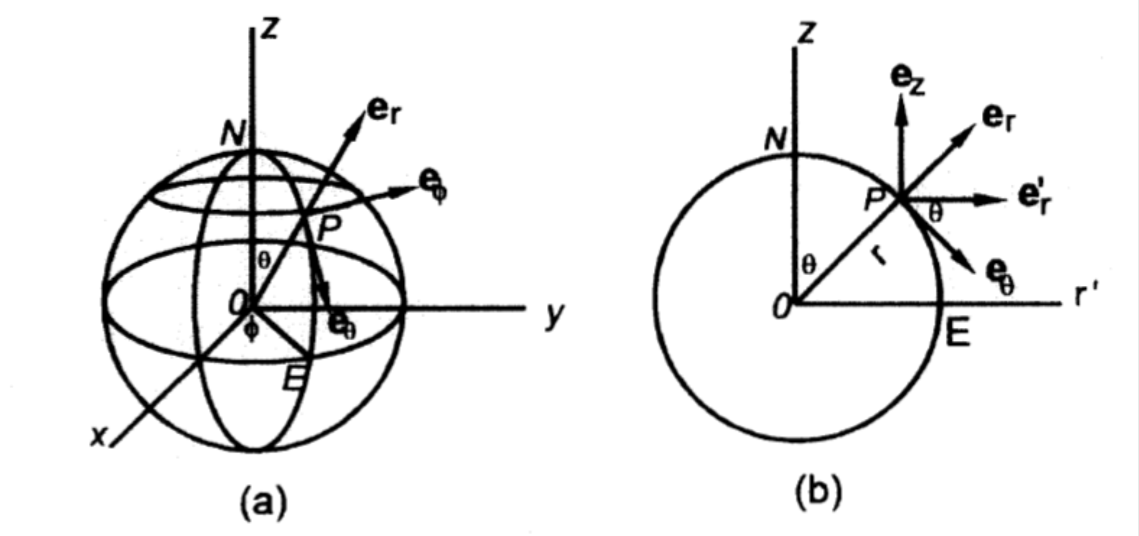
$$(\mathrm{div}\mathbf{T})_z = \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

(2.82)

Coordonnées curvilignes (suite)

4.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées cylindriques, la position du point est déterminé par (r,θ,Φ)
On peut tirer de la figure que:



Le vecteur position de « P » est donné par $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$

D'où $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r$ **(2.83)**

Après plusieurs transformations, on aura:

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r(d\theta)\mathbf{e}_\theta + r(\sin\theta d\phi)\mathbf{e}_\phi \qquad (2.84)$$

Coordonnées curvilignes (suite) Coordonnées sphériques

i) Composantes du gradient de « f ».

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{2.84}$$

ii) Composantes du gradient de « v ».

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{v_\theta \cot\theta}{r} \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

iii) Divergence de « v ».

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla\mathbf{v}) &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + 2\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \tag{2.86}$$

iv) Curl de « v ».

$$\operatorname{curl}\mathbf{v} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (v_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\phi \tag{2.87}$$

v) Composantes de divergence de « T ».

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\mathbf{T})_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (T_{r\theta}\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} \\ (\operatorname{div}\mathbf{T})_\theta &= \frac{1}{r^3}\frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (T_{\theta\theta}\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi}\cot\theta}{r} \\ (\operatorname{div}\mathbf{T})_\phi &= \frac{1}{r^3}\frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (T_{\phi\theta}\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi}\cot\theta}{r} \end{aligned} \tag{2.88}$$

Merci. **Fin du chapitre 2**

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 3

Les contraintes

COURS 3 **Mardi 22.04.2007**