

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 3

Les contraintes

Introduction

Forces extérieures et intérieures

**Efforts
extérieurs**

**Efforts
intérieurs**

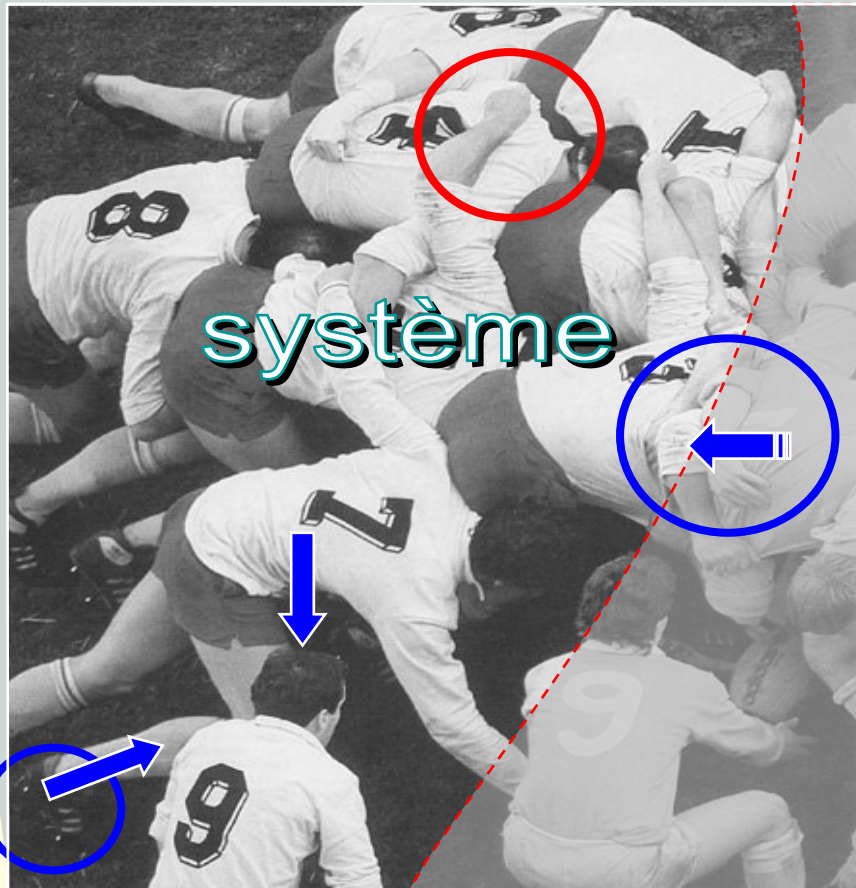


Photo extraite
de *Le Rugby*
P. VILLEPREUX
Cours de J.Salençon
Polytechnique

1. Sollicitations appliquées au M.C

On peut distinguer 02 catégories

1.1 sollicitations appliquées sur la frontière

- ❖ Appelées **forces de surface** (\vec{f}_s) : forces réparties par unité de surface qui s'appliquent sur tout ou partie de la surface extérieure du milieu.
- ❖ Elle a un module constant ou variable. Ex: la pression d'un liquide.
- ❖ Il peut arriver que sur une surface dS_e très petite s'applique une force

$$\vec{F}_s = \int_{dS_e} \vec{f}_s dS$$

de valeur finie. C'est la force **concentrée**

1.2 sollicitations appliquées au volume

- ❖ Appelées **forces de volume** (\vec{f}_v) : appliquées en tout point du volume « dv » occupé par le milieu.
- ❖ Ces forces sont réparties par unité de volume. Exemple: la pesanteur, les forces d'accélération...
- ❖ De même on peut parler de force concentrée

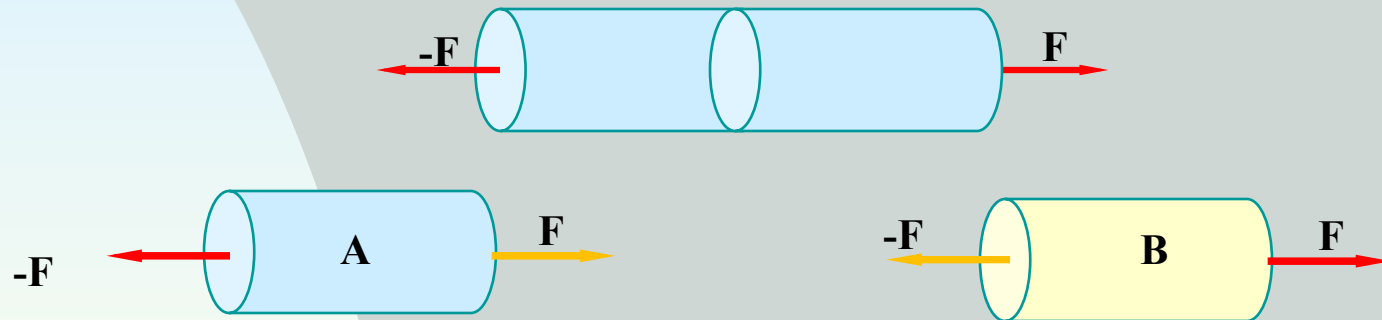
$$\vec{F}_v = \int_{dv} \vec{f}_v dv$$

2. Vecteur Contrainte

Principe de la coupe.

2.1 Forces internes. Action-réaction

- ❖ Si on considère un milieu de section constante et on lui applique une coupe qlq pour le diviser en 02 parties « A » et « B ».



L'action de « A » sur « B » est notée $F(A/B)$

L'action de « B » sur « A » est notée $F(B/A)$

Alors:

$$F(A/B) = - F(B/A)$$

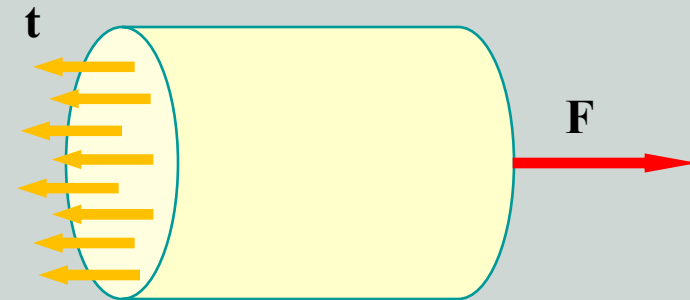
La résultante des forces internes est toujours nulle.

Vecteur Contrainte (suite)

Principe de la coupe.

2.2 Forces internes. Répartition homogène

- ❖ Le milieu est divisé en 02 parties et l'effort interne est supposé uniforme



Le vecteur « T » représente la résultante des efforts internes.
On peut l'exprimer par unité de surface. C'est une contrainte

$$t = \frac{F}{S}$$

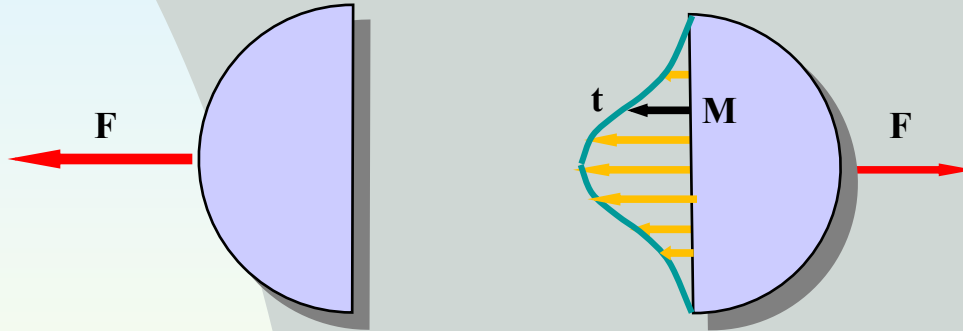
Il est indépendant du point de la surface

Vecteur Contrainte (suite)

Principe de la coupe.

2.3 Forces internes. Répartition non homogène

- ❖ Le milieu est divisé en 02 parties et l'effort interne est supposé non uniforme



La répartition n'étant pas homogène, Le vecteur contrainte dépend du point M de la section droite.

$$\vec{F} = \iint_S \vec{t}(M) dS$$

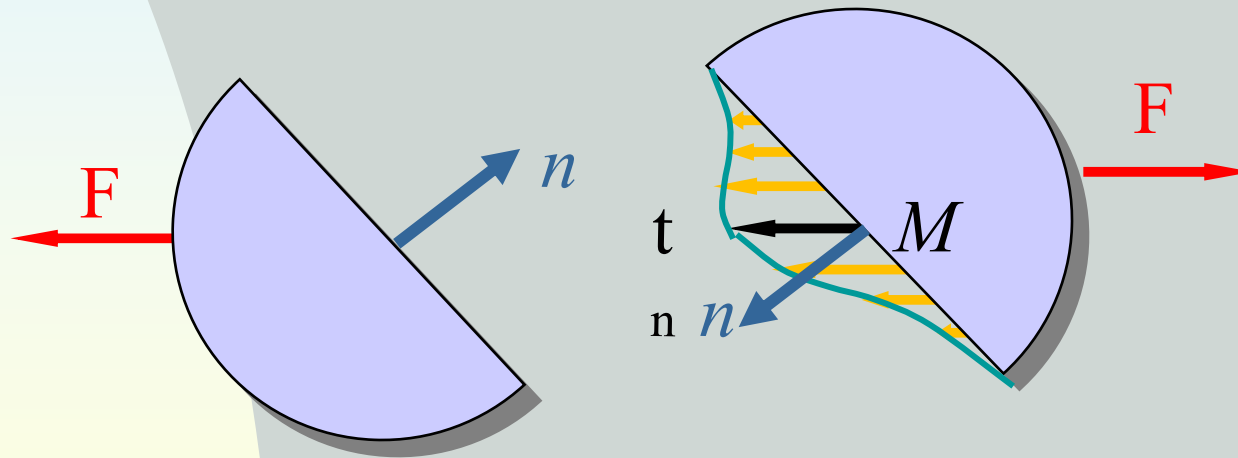
Vecteur Contrainte (suite)

Principe de la coupe.

2.4 Vecteur contrainte

- ❖ Le milieu est divisé en 02 parties et l'effort interne est supposé non uniforme

La répartition n'étant pas homogène, Le vecteur contrainte dépend du point M de la section droite.

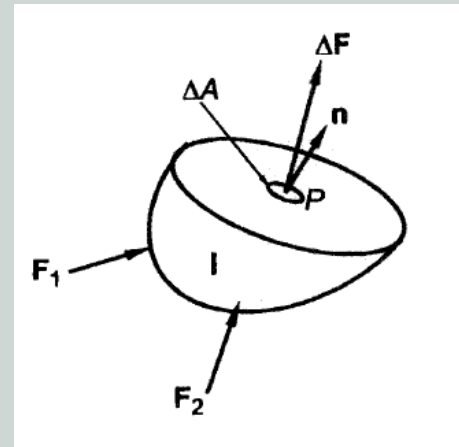
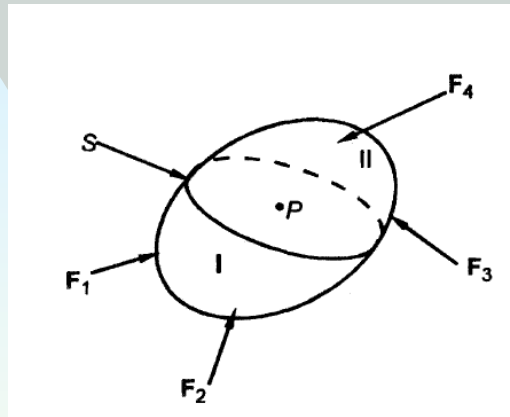


Le vecteur contrainte dépend du point M de la surface et de l'orientation de la section de coupe définie par sa normale.

$$\vec{F} = \iint_S \vec{t}_n(M, \vec{n}) dS$$

Vecteur contrainte (Suite)

Dans un cas général, considérons le milieu que l'on a divisé en 02 parties (I) et (II).



La contrainte au point « P », appartenant au plan est définie par:

$$t_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (3.1)$$

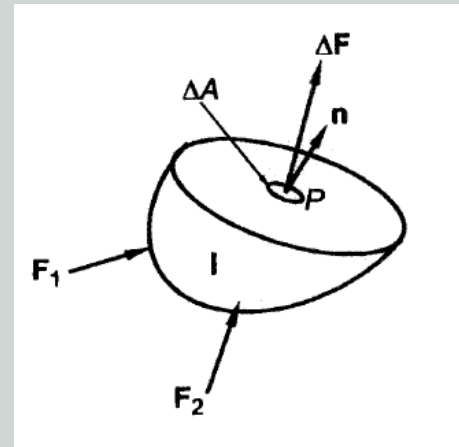
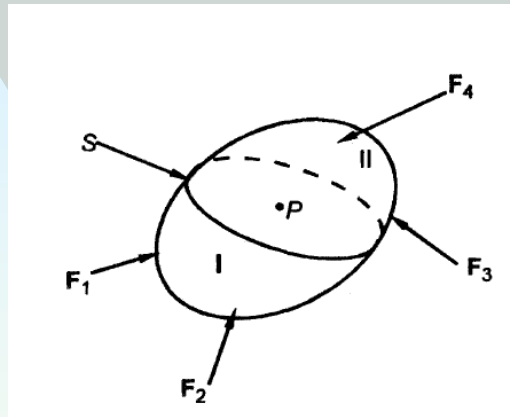
Appelée vecteur **contrainte de Cauchy**

Si on considère l'action de « I » sur « II » par principe de l'action et de la réaction, on aura:

$$t_n = -t_{-n} \quad (3.2)$$

Vecteur contrainte (Suite)

Si « S » est une surface (au lieu d'un plan) passant par « P », alors le vecteur contrainte de Cauchy sera défini par:



La contrainte de Cauchy au point « P », est définie par:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

(3.3)

Où: $\Delta \mathbf{F}$: force résultante sur l'élément de surface ΔS

Vecteur contrainte (Suite)

Principe de la contrainte de Cauchy

Le vecteur contrainte à n'importe quelle place et temps a une valeur commune sur toutes les parties du matériau ayant un plan tangent commun en « P » et du même côté.

i.e. Si « n » est le vecteur (sortant) unitaire normal au plan tangent, alors:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (3.4)$$

Où « t » est la variable temps

On peut montrer à partir de la 2^{ème} loi de Newton que la dépendance en « n » peut être exprimée par:

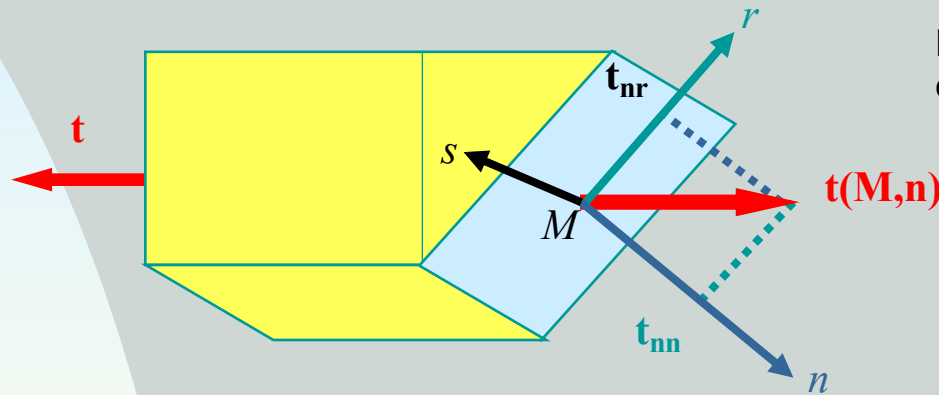
$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad (3.5)$$

Où « T » est une transformation linéaire.

Vecteur contrainte (Suite)

Contrainte normale et tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en deux parties: une normale et une tangentielle.



Facette de centre M
et de normale « n »

n, r et t sont coplanaires

Trièdre local **direct** n, r, s

$$t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad \text{Traction} > 0 \quad \text{Compression} < 0$$

$$t_{nr} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r} \quad \text{Cisaillement}$$

$$t_{ns} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = 0$$

Contrainte normale

1^{ère} Contrainte tangentielle

2^{ème} Contrainte tangentielle

$$\vec{t}_n = \vec{t}(\mathbf{M}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{t}_{nr} = \vec{n} \wedge \vec{t}(\mathbf{M}, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{t}(\mathbf{M}, \vec{n}) - t_n \vec{n}$$

(3.6)

3. Tenseur des Contraintes

Le vecteur contrainte ne suffit pas à lui seul pour caractériser l'état de contrainte en un point. Puisqu'il dépend de la normale « n », il faut donc une autre représentation.

Considérons un tétraèdre petit représentant un point du milieu « P ».

Il est tellement petit, que le volume est presque zéro et que sa surface inclinée passe par « P »

Considérons la transformation: $t_n = T n$

Sur la face PAB (de direction $-e_1$), agit une contrainte qlq t_{-e_1} dont la force sera:

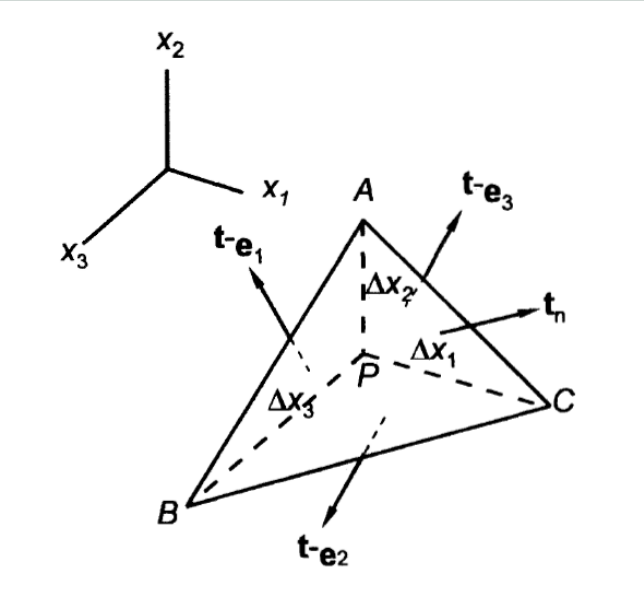
$$t_{-e_1} \Delta A_1$$

ΔA_1 est la surface (PAB). De façon similaire sur les 02 autres faces, on aura:

$$t_{-e_2} \Delta A_2, \quad t_{-e_3} \Delta A_3$$

et

$$t_n \Delta A_n$$



Tenseur des Contraintes (Suite)

De la 2^{ème} loi de Newton, on aura:

$$\Sigma \mathbf{F} = t_{-e_1}(\Delta A_1) + t_{-e_2}(\Delta A_2) + t_{-e_3}(\Delta A_3) + t_{\mathbf{n}}(\Delta A_n) = ma \quad (3.7)$$

Puisque la masse = (densité)x(volume) et le volume est proportionnel aux dimensions (Δx_1 , Δx_2 et Δx_3), qd ces dimensions tendent vers zéro, le coté droit de l'équation s'annule.

Alors, on aura

$$t_{-e_1}(\Delta A_1) + t_{-e_2}(\Delta A_2) + t_{-e_3}(\Delta A_3) + t_{\mathbf{n}}(\Delta A_n) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Le vecteur normal « n » sur le plan ABC, s'écrit:

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.9)$$

Les surfaces ΔA_1 , ΔA_2 et ΔA_3 sont les projections de ΔA_n , on aura:

$$\Delta A_1 = n_1 \Delta A_n, \quad \Delta A_2 = n_2 \Delta A_n, \quad \Delta A_3 = n_3 \Delta A_n \quad (3.10)$$

Tenseur des Contraintes (Suite)

(3.10) dans (3.8) donne:

$$\mathbf{t}_{-e_1}n_1 + \mathbf{t}_{-e_2}n_2 + \mathbf{t}_{-e_3}n_3 + \mathbf{t}_n = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Or par principe de l'action et de la réaction:

$$\mathbf{t}_{-e_1} = -\mathbf{t}_{e_1}, \quad \mathbf{t}_{-e_2} = -\mathbf{t}_{e_2}, \quad \mathbf{t}_{-e_3} = -\mathbf{t}_{e_3} \quad (3.12)$$

D'où, on aura:

$$\mathbf{t}_n = n_1\mathbf{t}_{e_1} + n_2\mathbf{t}_{e_2} + n_3\mathbf{t}_{e_3} \quad (3.13)$$

(3.9) et (3.13) dans l'équation de la transformation donne

$$\mathbf{T}(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3) = n_1\mathbf{T}\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{T}\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{T}\mathbf{e}_3 \quad (3.14)$$

La transformation « T » définie par $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \mathbf{n}$; est une transformation linéaire appelée **tenseur de contrainte** ou **tenseur de contrainte de Cauchy**.

4. Composantes du tenseur des Contraintes

Puisque $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \mathbf{n}$, elle peut être appliquée aux 03 axes de coordonnées:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} = \mathbf{T} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2} = \mathbf{T} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3} = \mathbf{T} \mathbf{e}_3 \quad (3.15)$$

Or on sait que les composantes du tenseur sont:

$$\mathbf{T} \mathbf{e}_i = T_{mi} \mathbf{e}_m \quad (3.16)$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} &= T_{11} \mathbf{e}_1 + T_{21} \mathbf{e}_2 + T_{31} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2} &= T_{12} \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 + T_{32} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3} &= T_{13} \mathbf{e}_1 + T_{23} \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

T_{ii} sont les composantes **normales** (traction compression) et T_{ij} ($i \neq j$) sont les composantes **tangentielles** (cisaillement)

Par **notation** T_{ij} : « i » direction de la normale à la face
« j » direction de la contrainte

Composantes du tenseur des Contraintes (suite)

02 contraintes tangentielles sur chaque face. On peut calculer leur résultante. Ex. selon \mathbf{e}_1

$$\boldsymbol{\tau}_1 = T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 \quad (3.18)$$

Dont la magnitude sera:

$$|\boldsymbol{\tau}_1| = \sqrt{T_{21}^2 + T_{31}^2} \quad (3.19)$$

De même suivant \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3

$$\boldsymbol{\tau}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 \quad (3.20)$$

Ainsi, les composantes de « \mathbf{t} » sont reliées à « \mathbf{T} » et « \mathbf{n} » par

$$t_i = T_{ij}n_j \quad \text{ou} \quad [\mathbf{t}] = [\mathbf{T}][\mathbf{n}] \quad (3.21)$$

« \mathbf{T} » est un tenseur de second ordre de contraintes.

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Composantes du tenseur des Contraintes (suite)

Exemple

Dans un système d'axes (x_1, x_2, x_3) la matrice d'un état de contrainte à un certain point d'un milieu est donnée par:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

a) Déterminer le vecteur contrainte et l'intensité de la contrainte normale dans un plan passant par le point et // au plan $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$

b) Si

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

et

$$\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$$

Calculer T_{12}

Composantes du tenseur des Contraintes (suite)

Solution

a) La normale du plan $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ est donnée par:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

Le vecteur contrainte sera alors:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}][\mathbf{n}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{3}(16\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \text{ MPa}$$

La contrainte normale sera:

$$t_n = \{t_1 \quad t_2 \quad t_3\} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$T_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{9}(16 + 8 + 2) = 2.89 \text{ MPa}$$

b) Transformation dans un autre repère (voir chap 2). On a: et

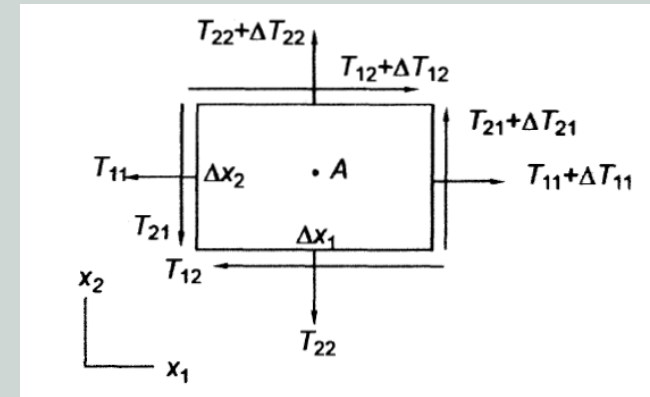
$$T'_{12} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} [2, 2, 1] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T'_{12} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = 1.65 \text{ MPa}$$

5. Réciprocité des contraintes tangentielles

Pour démontrer que le tenseur de contraintes est **symétrique**. Soit le plan

Déterminons le moment de toutes les forces autour de l'axe passant par le centre « A » et // à x_3 (force de volume négligée).



$$\begin{aligned} \Sigma(M_A)_3 = & T_{21}(\Delta x_2)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_1}{2} \right) + (T_{21} + \Delta T_{21})(\Delta x_2)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_1}{2} \right) \\ & - T_{12}(\Delta x_1)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_2}{2} \right) - (T_{12} + \Delta T_{12})(\Delta x_1)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Or les dimensions sont très petite, leurs carrés, cubes etc seront négligées. D'où

$$\Sigma(M_A)_3 = (T_{21} - T_{12})\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

Par équilibre statique cette équation est nulle d'où;

$$T_{12} = T_{21} \quad (3.22)$$

De même les autres équations donnent:

$$T_{13} = T_{31}$$

et

$$T_{23} = T_{32}$$

6. Contraintes principales

Lorsque le vecteur contrainte est dans la direction de la contrainte normale, les contraintes tangentielles sont nulles. Dans ce cas, les normales des 03 plans définissent les directions principales et les valeurs ont les contraintes principales (voir chap 2).

Soit « \vec{t} » une contrainte principale, alors

$$\vec{t} = t \cdot \vec{n} \quad \text{d'où} \quad t_i = t \cdot n_i \quad \text{or} \quad t_i = T_{ij} \cdot n_j$$

$$\text{D'où} \quad T_{ij} \cdot n_j = t \cdot n_i = t \cdot \delta_{ij} n_j \quad \left(T_{ij} - t \cdot \delta_{ij} \right) n_j = 0 \quad (3.23)$$

Ce système n'a de solutions que si le déterminant est nul.

$$\left| T_{ij} - t \cdot \delta_{ij} \right| = 0$$

On obtient alors l'équation caractéristique:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (3.22)$$

Avec comme invariants:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det[\mathbf{T}]$$

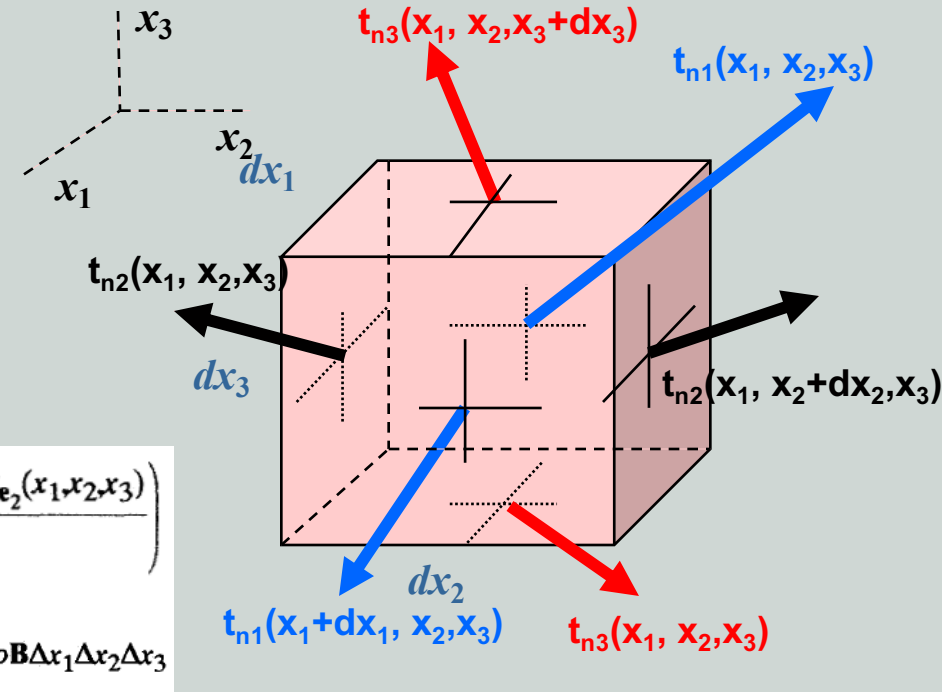
Ayant une racine « t_i » de (3.22), on peut la remplacer dans (3.21), on obtiendra la direction principale correspondante.

7. Equations du mouvement (Eq. Déséquilibre)

Pour un petit élément on considère l'équilibre des forces suivant les 03 axes:

Posons la force de volume $\mathbf{B} = B_i \mathbf{e}_i$ par unité de masse. « ρ » la densité au point x_i et « a » l'accélération de la particule.

La 2^{ème} loi de Newton s'écrit:



$$\left[\left(\frac{t_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - t_{e_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right) \right] + \left(\frac{t_{e_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - t_{e_2}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} \right) + \left(\frac{t_{e_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - t_{e_3}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \rho \mathbf{B} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = (\rho a) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.23)$$

En divisant par $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ et aussi $\Delta x_i \rightarrow 0$, on aura

$$\frac{\partial t_{e_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{e_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{e_3}}{\partial x_3} + \rho \mathbf{B} = \rho a \quad (3.24)$$

Equations du mouvement (Eq. Déséquilibre) (suite)

Puisque $t_{ei} = T_{ij}e_j$, on aura:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} e_i + \rho B_i e_i = \rho a_i e_i \quad \text{Ou bien} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i \quad (3.25)$$

En divisant par $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ et aussi $\Delta x_i \rightarrow 0$, on aura

$$T_{ij,j} + f_{vi} = \rho a_i \quad \text{div}(T) + f_v = \rho a \quad (3.26)$$

(3.26) sont appelées eq de **Cauchy** ou bien équations différentielles **d'équilibre**. Valables pour n'importe quel point du volume.

Pour le cas statique, l'accélération s'annule et on aura:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0 \quad (3.27)$$

$$T_{ij,j} + f_{vi} = 0 \quad \text{div}(T) + f_v = 0 \quad (3.28)$$

8. Equations du mouvement en coordonnées cylindriques et sphériques

Coordonnées cylindriques

Voir chap 2 pour la transformation de la div(T)

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \rho B_r = \rho a_r$$

$$\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r}}{r} + \rho B_\theta = \rho a_\theta$$

$$\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{zr}}{r} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho B_z = \rho a_z$$

Si (T) est sym. $T_{r\theta} - T_{\theta r} = 0.$

(3.29)

Coordonnées sphériques

Si (T) est sym. $T_{r\theta} - T_{\theta r} = 0 ;$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} + \rho B_r = \rho a_r$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\phi\phi} \cot \theta}{r} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r}}{r} + \rho B_\theta = \rho a_\theta$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\phi\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta\phi} \cot \theta}{r} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r}}{r} + \rho B_\phi = \rho a_\phi$$

$T_{r\phi} - T_{\phi r} = 0.$

(3.30)

9. Conditions aux limites d'un tenseur de contraintes

Pour un point appartenant à la surface du milieu, le tenseur des contraintes doit équilibrer les forces de surface. Ce sont **les conditions aux limites**.

Considérons un petit tétraèdre coupé de la frontière où sa face inclinée coïncide avec la frontière.

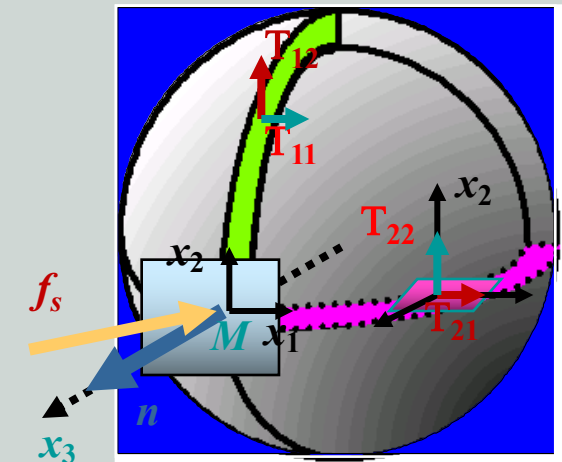
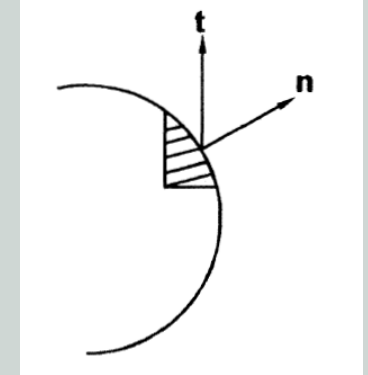
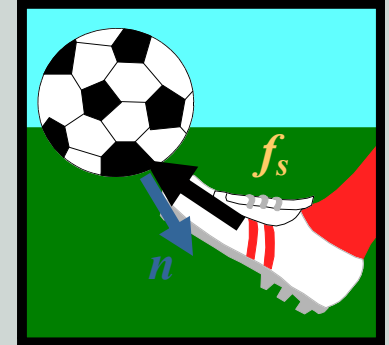
Si (T) est le tenseur des contraintes, « t » est la force de surface et « n » la normale à la face, alors on a:

$$t = Tn$$

Par notation $t=f_s$, alors

$$T_{ij}n_j = f_{s_i} \quad (3.31)$$

(3.31) appelées équations de **conditions aux limites** valables pour n'importe quel point de la surface du milieu.



10. Tenseurs sphérique et Déviatorique

Chaque tenseur peut être décomposé en partie sphérique et déviatorique

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_s] + [\mathbf{T}_D] \quad (3.32)$$

Tenseur sphérique

$$[\mathbf{T}_s] = \begin{pmatrix} T_m & 0 & 0 \\ 0 & T_m & 0 \\ 0 & 0 & T_m \end{pmatrix}$$

Où T_m est la contrainte normale moyenne:

$$T_m = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (3.33)$$

Tenseur Déviatorique

$$[\mathbf{T}_D] = \begin{pmatrix} T_{11} - T_m & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - T_m & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - T_m \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Rem:

La trace du déviatorique est nulle.

$[\mathbf{T}]$ et $[\mathbf{T}_D]$ ont les mêmes directions principales

Les valeurs propres de $[\mathbf{T}_D]$ sont définies par $T_{Di} = T_i - T_m$

11. Représentation des contraintes

11.1 Contrainte de cisaillement maximale.

Soient \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 les directions principales et T_1 , T_2 et T_3 les contraintes principales. Si $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ est la normale au plan, les composantes du vecteur contrainte sur le plan seront:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 T_1 \\ n_2 T_2 \\ n_3 T_3 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{t} = n_1 T_1 \mathbf{e}_1 + n_2 T_2 \mathbf{e}_2 + n_3 T_3 \mathbf{e}_3$$

La contrainte normale sera:

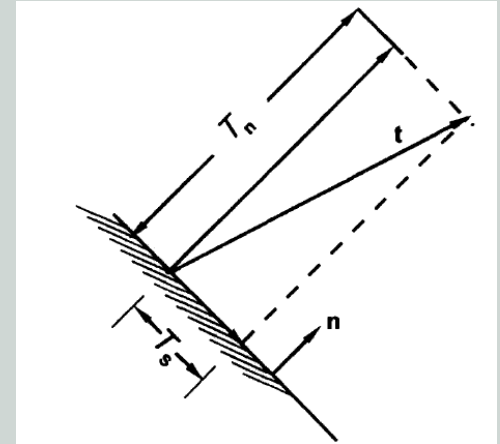
$$T_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = n_1^2 T_1 + n_2^2 T_2 + n_3^2 T_3 \quad (3.36)$$

Représentation des contraintes (Suite) **Contrainte de cisaillement maximale.**

T est la résultante de T_n et T_s (T_s : la contrainte de cisaillement totale sur le plan), on aura

$$|t|^2 = T_n^2 + T_s^2 \quad \text{d'où} \quad T_s^2 = |t|^2 - T_n^2 \quad (3.37)$$

$$T_s^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 - (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)^2 \quad (3.38)$$



Pour des valeurs connues de T_1 , T_2 et T_3 , on remarque que $T_s(n_1, n_2, n_3)$

$$T_s^2 = f(n_1, n_2, n_3) \quad (3.39)$$

On peut donc déterminer les valeurs maximales de « f » tout en sachant que:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Il faut dériver.

Représentation des contraintes (Suite) **Contrainte de cisaillement maximale.**

La dérivée totale de la fonction sera:

$$d(T_s^2) = \frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} dn_3 = 0 \quad (3.40)$$

Soit

$$\frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} = 0$$

En remplaçant l'expression de « T_s », on aura:

$$\begin{aligned} 2n_1 [T_1^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_1] &= 0 \\ 2n_2 [T_2^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_2] &= 0 \\ 2n_3 [T_3^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_3] &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sachant que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ on aura **06 solutions:**

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Représentation des contraintes (Suite) **Contrainte de cisaillement maximale.**

Les 03 premières solutions donnent « $T_s=0$ » valeur minimale. Ce sont les plans principaux.

Les 03 dernières valeurs donnent dans valeurs maximales de « T_s ».

$$\begin{aligned} \text{Pour } \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2, & T_s^2 &= \frac{(T_1 - T_2)^2}{4} \\ \text{Pour } \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3, & T_s^2 &= \frac{(T_1 - T_3)^2}{4} \\ \text{Et pour } \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3, & T_s^2 &= \frac{(T_2 - T_3)^2}{4} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ainsi la contrainte tangentielle maximale est donnée par le max des 03 contraintes T_s obtenues.

$$T_{s_{\max}} = \max \left(\frac{|T_1 - T_2|}{2}, \frac{|T_1 - T_3|}{2}, \frac{|T_2 - T_3|}{2} \right) \quad (3.43)$$

$$\text{Ou bien } (T_s)_{\max} = \frac{(T_n)_{\max} - (T_n)_{\min}}{2} \quad (3.44)$$

$T_{n_{\max}}$, $T_{n_{\min}}$: **Contrainte normale max et Min**

Représentation des contraintes (Suite)

11.2 Contraintes octaédriques.

Considérons un plan dont la normal fait des angles égaux avec les directions principales.

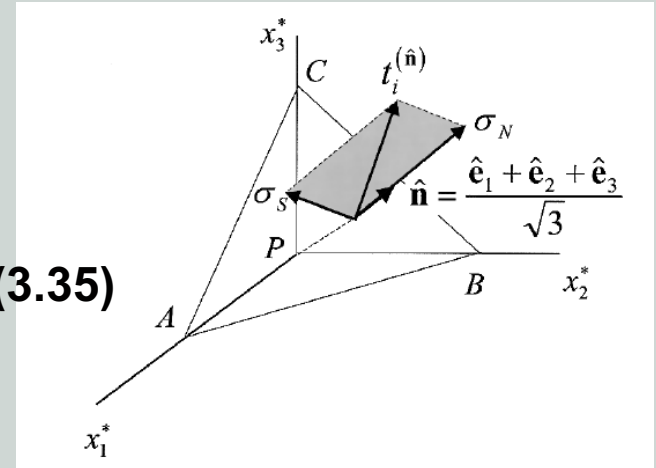
Le plan ABC est un plan **octaédrique** où $PA=PB=PC$.

Dans ce cas, on:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3.35)



Le vecteur contrainte « \mathbf{t}_n » dans le repère local de la face sera:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{T}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{T}_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}}$$

(3.45)

Dont la composante suivant la normale sera:

$$t_N = \sigma_N = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3} [\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3] = \frac{1}{3} \mathbf{T}_{ii}$$

(3.46)

Représentation des contraintes (Suite) Contraintes octaédriques

Or de la géométrie, on a:

$$t^2 = t_N^2 + t_t^2 \quad (t_t = \sigma_s) \quad \text{D'où} \quad t_t^2 = t^2 - t_N^2 \quad (3.47)$$

or $t_{e1} = T_1 n_1$; $t_{e2} = T_2 n_2$; $t_{e3} = T_3 n_3$;

$$\text{D'où} \quad t^2 = \frac{1}{3} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) \quad (3.48)$$

Ainsi, la contrainte tangentielle dans le plan principal sera:

$$t_t^2 = t_{\text{oct}}^2 = \frac{1}{3} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) - \frac{1}{9} (T_1 + T_2 + T_3)^2 \quad (3.49)$$

Cette contrainte est appelée contrainte octaédrique, qui peut s'écrire:

$$t_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{[T_1 - T_2]^2 + [T_2 - T_3]^2 + [T_3 - T_1]^2} \quad (3.50)$$

Représentation des contraintes (Suite)

11.3 Cercles de Mohr (Tricercle).

Considérons un point « P » du plan principal, ces contraintes principales seront T_1 , T_2 et T_3 rangées selon $T_1 > T_2 > T_3$.

Alors on au:

$$|t|^2 = T_n^2 + T_s^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 \quad (3.51)$$

Avec:

$$T_n = T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2 \quad (3.52)$$

De plus,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

03 équations à 03 inconnues, nous donnent:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(T_n - T_2)(T_n - T_3) + T_s^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \\ n_2^2 &= \frac{(T_n - T_3)(T_n - T_1) + T_s^2}{(T_2 - T_3)(T_2 - T_1)} \\ n_3^2 &= \frac{(T_n - T_1)(T_n - T_2) + T_s^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Représentation des contraintes (Suite) Cercles de Mohr (Tricercle).

On peut réécrire le numérateur sous une autre forme. Soit:

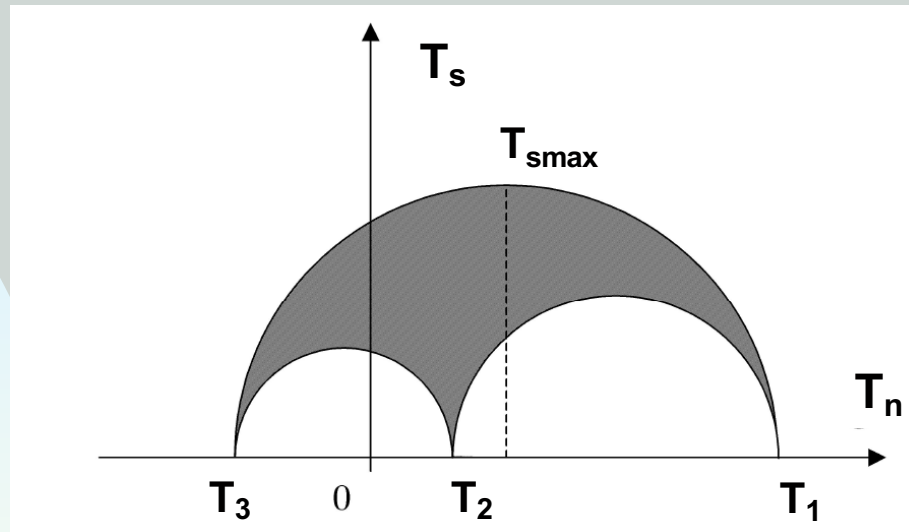
$$\begin{aligned}
 n_1^2 &= \frac{\left[T_n - \frac{1}{2}(T_2 + T_3) \right]^2 + T_s^2 - \left[\frac{1}{2}(T_2 - T_3) \right]^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} && \geq \\
 n_2^2 &= \frac{\left[T_n - \frac{1}{2}(T_1 + T_3) \right]^2 + T_s^2 - \left[\frac{1}{2}(T_1 - T_3) \right]^2}{(T_2 - T_3)(T_2 - T_1)} && \leq \\
 n_3^2 &= \frac{\left[T_n - \frac{1}{2}(T_2 + T_2) \right]^2 + T_s^2 - \left[\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \right]^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} && \geq
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

On remarque que les numérateurs représentent les équations de cercles dans le plan (T_n, T_s) . Puisque $T_1 > T_2 > T_3$, on aura

$$\begin{aligned}
 \left[T_n - \frac{1}{2}(T_2 + T_3) \right]^2 + T_s^2 &\geq \left[\frac{1}{2}(T_2 - T_3) \right]^2 \\
 \left[T_n - \frac{1}{2}(T_1 + T_3) \right]^2 + T_s^2 &\leq \left[\frac{1}{2}(T_1 - T_3) \right]^2 \\
 \left[T_n - \frac{1}{2}(T_2 + T_2) \right]^2 + T_s^2 &\geq \left[\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \right]^2
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Représentation des contraintes (Suite) Cercles de Mohr (Tricercle).

Représentation:



Les cercles ont pour centres et rayons respectivement:

$$\left[\frac{1}{2}(T_2 + T_3) \right] \quad ; \quad \left[\frac{1}{2}(T_2 - T_3) \right]$$

$$\left[\frac{1}{2}(T_1 + T_3) \right] \quad ; \quad \left[\frac{1}{2}(T_1 - T_3) \right]$$

$$\left[\frac{1}{2}(T_2 + T_2) \right] \quad ; \quad \left[\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \right]$$

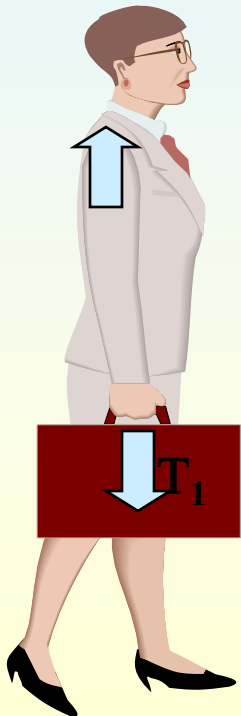
(3.56)

Représentation des contraintes (Suite) Cercles de Mohr (Tricercle).

Exemples

Uniaxiale

$$\begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Biaxiale

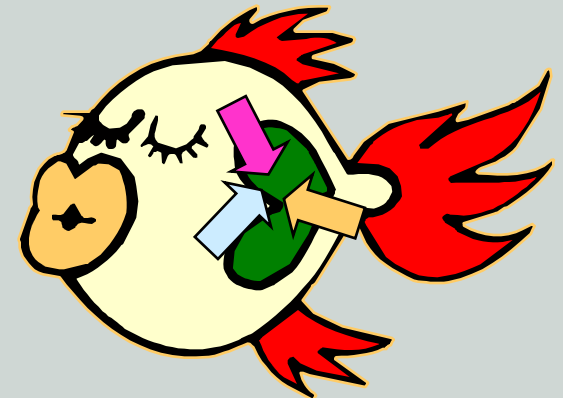
$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$T_1 = T_2 = T$$

Triaxiale

$$\begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{vmatrix}$$



$$T_1 = T_2 = T_3 = -p$$

Hydrostatique

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{\delta}}$$

Représentation des contraintes (Suite)

11.4 Ellipsoïde des contraintes

Considérons un point « P » du plan principal, ces contraintes principales seront T_1 , T_2 et T_3 Alors on a:

$$t_1 = T_1 n_1 \quad ; \quad t_2 = T_2 n_2 \quad ; \quad t_3 = T_3 n_3 \quad (3.57)$$

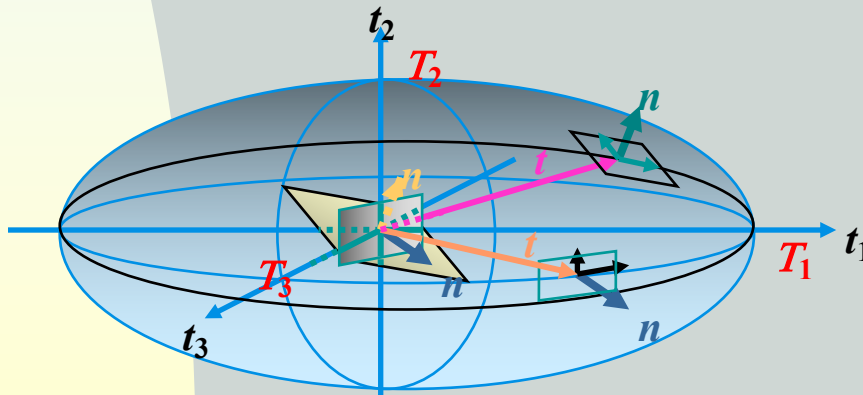
Or

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

D'où

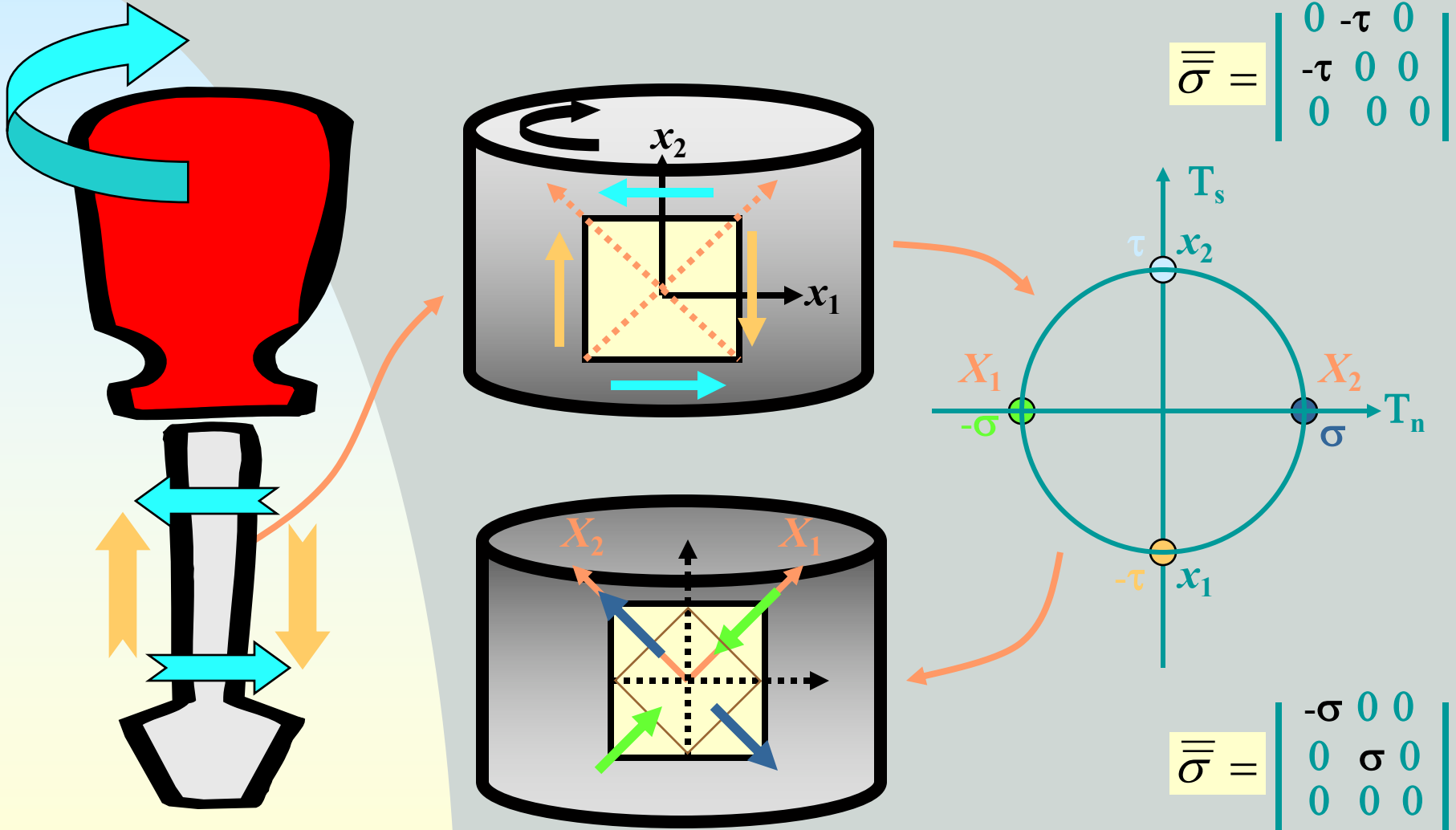
$$\left(\frac{t_1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{T_2}\right)^2 + \left(\frac{t_3}{T_3}\right)^2 = 1 \quad (3.58)$$

C'est l'équation d'une ellipsoïde de demi axes les contraintes principales



Représentation des contraintes (Suite)

11.5 Cisaillement simple



Le cisaillement est maximal sur les facettes orientées à 45° des facettes principales



12. Tenseur de contraintes de Piolla Kirchhoff

Au temps « t_0 », on a: dA_0 surface différentielle du point avec « n_0 » normale.

Au temps « t » on a: dA surface différentielle du point avec « n » normale.

dA_0 : surface non déformée.

dA : surface déformée.

Par définition, on a:

$$\mathbf{df} = \mathbf{t}dA \quad (3.59)$$

et

$$\mathbf{t} = \mathbf{Tn} \quad (3.60)$$

\mathbf{df} : force agissante sur la surface déformée.

\mathbf{t} : vecteur tenseur de Cauchy.

\mathbf{T} : tenseur de contrainte de Cauchy.

On va définir 02 types de vecteurs de (pseudo) contraintes basés sur la surface non déformée.

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

12.1 1^{er} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff.

(Tenseur de contrainte de Lagrange).

Soit

$$df \equiv \mathbf{t}_0 dA_0 \quad (3.61)$$

\mathbf{t}_0 : vecteur de pseudo-contrainte basée sur la surface non déformée et ne décrit pas l'intensité actuelle de la force.

Ce vecteur a la même direction que le vecteur « \mathbf{t} » de contrainte de Cauchy..

On définit alors:

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0 \quad (3.62)$$

Où « \mathbf{T}_0 » est une transformation linéaire appelée **1^{er} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff** ou bien tenseur de **contrainte de Lagrange**.

Tenseur de contraintes de Piolla Kirchhoff (Suite) 1^{er} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff

Relation entre Tenseur de Lagrange et tenseur de Cauchy.

Soit

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} dA = \mathbf{t}_o dA_o \quad (3.63)$$

D'où

$$\mathbf{t}_o = \frac{dA}{dA_o} \mathbf{t} \quad (3.64)$$

(3.60) et (3.62) dans (3.64) donnent:

$$\mathbf{T}_o \mathbf{n}_o = \left(\frac{dA}{dA_o} \right) \mathbf{T} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T} dA \mathbf{n}}{dA_o} \quad (3.65)$$

Or due à la déformation, il ya changement de surface défini par (admettre à démontrer après)

$$dA \mathbf{n} = dA_o (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_o \quad (3.66)$$

Où « \mathbf{F} » est le gradient de déformation défini par:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Tenseur de contraintes de Piolla Kirchhoff (Suite) 1^{er} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff

Relation entre Tenseur de Lagrange et tenseur de Cauchy.

Ainsi

$$\mathbf{T}_o \mathbf{n}_o = \mathbf{T}(\det \mathbf{F})(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_o$$

En simplifiant:

$$\mathbf{T}_o = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.67)$$

En coordonnées cartésiennes

$$(T_o)_{ij} = (\det \mathbf{F}) T_{im} F^{-1}{}_{jm} \quad (3.68)$$

En inversant on peut obtenir:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{T}_o \mathbf{F}^T \quad \text{et} \quad T_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} (T_o)_{im} F_{jm} \quad (3.69)$$

Si les coordonnées cartésiennes sont utilisées pour les 02 configurations de référence et courante, on aura

$$F_{im} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \quad \text{et} \quad F_{im}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_m}$$

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

12.2 2^{ème} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff.

Soit

$$\tilde{d}\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{t}}dA_o \quad (3.70)$$

Où

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}d\tilde{\mathbf{f}} \quad (3.71)$$

$\tilde{d}\mathbf{f}$: (pseudo) force différentielle qui transforme, sous le gradient de déformation « \mathbf{F} » en (actuelle) force différentielle « $d\mathbf{f}$ » à la position déformée.

Le pseudo-vecteur « $\tilde{\mathbf{t}}$ » est dans une **direction différente** que le vecteur de contrainte de Cauchy « \mathbf{t} ».

On définit alors:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n}_o \quad (3.72)$$

Où « $\tilde{\mathbf{T}}$ » est une transformation linéaire appelée **2^{ème} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff**.

\mathbf{n}_o étant la normale à la surface non déformée.

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite) 2^{ème} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff

(3.70) et (3.72) dans (3.71) donnent:

$$df = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{n}_o dA_o \quad (3.73)$$

Or (3.61) et (3.62)

$$df = \mathbf{t}_o dA_o = \mathbf{T}_o \mathbf{n}_o dA_o$$

En comparant les 02, on a:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_o \quad (3.74)$$

Relation entre le 1^{er} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff « \mathbf{T}_o » et le 2^{ème} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff « $\tilde{\mathbf{T}}$ ».

On peut exprimer la relation entre le 2^{ème} tenseur de contrainte de piola-Kirchhoff et le tenseur de contrainte de Cauchy, en utilisant la relation (3.67), on a:

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.75)$$

Le 2^{ème} tenseur de contrainte de piola-Kirchhoff est toujours symétrique si le tenseur de contrainte de Cauchy est symétrique.

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

Exemple

La configuration d'équilibre d'un corps est décrite par:

$$x_1 = \frac{1}{2}X_1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}X_3, \quad x_3 = 4X_2$$

Si le tenseur de contrainte de Cauchy de ce corps est défini par:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- a) Déterminer le 1^{er} tenseur de piola-Kirchhoff correspondant.
- b) Déterminer le 2^{ème} tenseur de piola-Kirchhoff correspondant.
- c) Calculer le vecteur pseudo-contrainte associé avec le 1^{er} tenseur de piola-Kirchhoff sur le plan e_3 de l'état déformé.
- d) Calculer le vecteur pseudo-contrainte associé avec le 2^{ème} tenseur de piola-Kirchhoff sur le plan e_3 de l'état déformé.

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

Solution

a) 1^{er} tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{T}_o = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T$$

Or:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

D'où

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$[\mathbf{F}^{-1}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{F} = 1$$

En remplaçant, on aura:

$$[\mathbf{T}_o] = (1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

Solution

b) 2^{ème} tenseur de Piola-Kirchhoff

$$[\tilde{\mathbf{T}}] = [\mathbf{F}]^{-1}[\mathbf{T}_o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

c) Pseudo vecteur avec 1^{er} tenseur de Piola-Kirchhoff sur le plan e_3 .

$$dA_o \mathbf{n}_o = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \mathbf{n}$$

En remplaçant « $\det \mathbf{F}$ » et « \mathbf{F} », on aura:

$$dA_o \mathbf{n}_o = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4\mathbf{e}_2$$

Par identification:

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_2$$

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

Solution

et

$$\mathbf{t}_o = \mathbf{T}_o \mathbf{n}_o$$
$$[\mathbf{t}_o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

i.e. $\mathbf{t}_o = 25\mathbf{e}_3$ Mpa.

Ce vecteur a la même direction que le vecteur de contrainte de Cauchy et son intensité est le $\frac{1}{4}$ de celle de Cauchy parce que la surface non déformée est 4 fois la surface déformée.

d) Pseudo vecteur avec 2^{ème} tenseur de Piola-Kirchhoff sur le plan \mathbf{e}_3 .

On a

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{n}_o$$

En remplaçant, on aura:

Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff (Suite)

Solution

$$[\tilde{\mathbf{t}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{25}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

i.e. $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{25}{4} \mathbf{e}_2$ MPa.

Ce vecteur n'a pas la même direction que le vecteur de contrainte de Cauchy.

Le tenseur « F » transforme la direction \mathbf{e}_2 en direction \mathbf{e}_3 .

13. Equation du mouvement exprimée dans la configuration de référence

On veut réécrire l'équation du mvt dans le repère de référence (en utilisant le 1^{er} tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff) et montrer qu'elle est:

$$\frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial X_m} + \rho_o B_i = \rho_o a_i \quad (3.76)$$

T_{0ij} : Composantes cartésiennes du 1^{er} tenseur de Piola-Kirchhoff.

ρ_0 : densité dans la configuration de référence.

X_i : Coordonnées du point matériel.

B_i : composante de force de volume par unité de masse.

a_i : composante d'accélération.

Equation du mouvement exprimée dans la configuration de référence (Suite)

Démonstration (facultative):

L'équation de mvt de Cauchy (équ. d'équilibre) s'écrit (3.25) :

$$\frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} + \rho B_i = \rho a_i$$

Or:

$$T_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} (T_o)_{im} F_{jm} \quad (3.77)$$

D'où

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial x_j} \frac{F_{jm}}{\det \mathbf{F}} + (T_o)_{im} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{F_{jm}}{\det \mathbf{F}} \right) = \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial x_j} \frac{1}{\det \mathbf{F}} \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_m} \right) + (T_o)_{im} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{F_{jm}}{\det \mathbf{F}} \right) \quad (3.78)$$

Avec:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial x_j} \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} &= \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial X_n} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} = \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial X_n} \frac{\partial X_n}{\partial X_m} \frac{1}{\det \mathbf{F}} \\ &= \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial X_n} \delta_{nm} \frac{1}{\det \mathbf{F}} = \frac{\partial (T_o)_{im}}{\partial X_m} \frac{1}{\det \mathbf{F}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Equation du mouvement exprimée dans la configuration de référence (Suite)

Démonstration:

Et on peut montrer que le 2^{ème} terme de l'équ. (3.78) est nul comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{F_{jm}}{\det \mathbf{F}} \right) &= \frac{1}{(\det \mathbf{F})} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial X_m} - F_{jm} \frac{1}{(\det \mathbf{F})^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \det \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{(\det \mathbf{F})} \frac{\partial^2 \hat{x}_j}{\partial X_n \partial X_m} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} - \frac{\partial x_j}{\partial X_m} \frac{1}{(\det \mathbf{F})^2} \left(\frac{\partial}{\partial X_n} \det \mathbf{F} \right) \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\det \mathbf{F})} \frac{\partial^2 \hat{x}_j}{\partial X_n \partial X_m} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} - \frac{1}{(\det \mathbf{F})^2} \left(\frac{\partial}{\partial X_n} \det \mathbf{F} \right) \delta_{mn} = \frac{1}{(\det \mathbf{F})} \frac{\partial^2 \hat{x}_j}{\partial X_n \partial X_m} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} - \frac{1}{(\det \mathbf{F})^2} \left(\frac{\partial}{\partial X_m} \det \mathbf{F} \right) \quad (3.80)$$

Sachant que pour n'importe quel tenseur $\mathbf{A}(X_1, X_2, X_3)$ on a:

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} (\mathbf{A}^{-1})_{nj} \frac{\partial A_{jn}}{\partial X_m} \quad (3.81)$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \frac{\partial F_{jn}}{\partial X_m} = \det \mathbf{F} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \hat{x}_j}{\partial X_n \partial X_m} \quad (3.82)$$

Equation du mouvement exprimée dans la configuration de référence (Suite)

Démonstration:

Alors
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{F_{jm}}{\det\mathbf{F}}\right) = 0 \quad \text{D'où} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(T_o)_{im}}{\partial X_m} \frac{1}{\det\mathbf{F}}$$

Ainsi en remplaçant dans l'équation de Cauchy, on obtient:

$$\frac{\partial(T_o)_{im}}{\partial X_m} + \rho(\det\mathbf{F})B_i = \rho(\det\mathbf{F})a_i$$

Or le volume est transformé de la façon:

$$dV = (\det\mathbf{F})dV_o$$

On aura:

$$\rho \det\mathbf{F} = \rho_o$$

Enfin, on a:

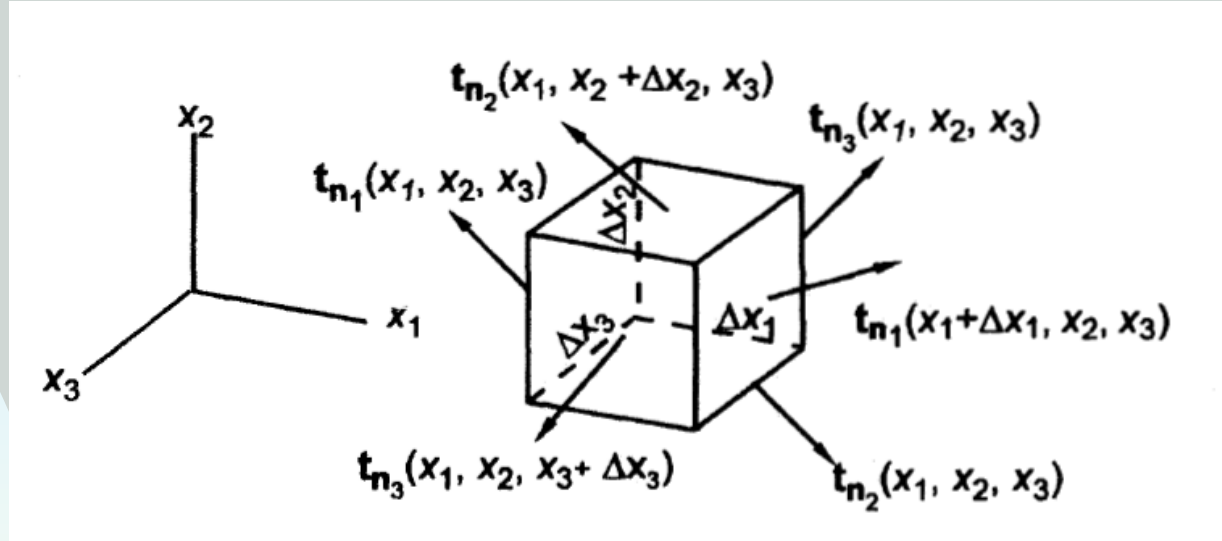
$$\frac{\partial(T_o)_{im}}{\partial X_m} + \rho_o B_i = \rho_o a_i \quad (\text{c.q.f.d})$$

Ou bien

$$\text{Div}\mathbf{T}_o + \rho_o \mathbf{B} = \rho_o \mathbf{a} \quad (3.83)$$

14. Puissance de contrainte

Soit l'élément.



On veut calculer le taux de travail du tenseur des contraintes et de la force de volume sur la particule lorsqu'elle est en mouvement et qu'elle se déforme.

Si on prend les vecteurs $\mathbf{t}_{\cdot e_1}$ et \mathbf{t}_{e_1} , leur taux de travail sur la paire de faces ayant les normales « $-\mathbf{e}_1$ » et « \mathbf{e}_1 » est:

$$[(\mathbf{t}_{e_1} \cdot \mathbf{v})_{x_1+dx_1, x_2, x_3} - (\mathbf{t}_{\cdot e_1} \cdot \mathbf{v})_{x_1, x_2, x_3}] dx_2 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{t}_{e_1} \cdot \mathbf{v}) dx_1 dx_2 dx_3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (v_i T_{i1}) \right] dV \quad (3.84)$$

Sachant que: $\mathbf{t}_{e_1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{e}_1 \cdot v_i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1 = v_i T_{i1}$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

Puissance de contrainte (Suite)

De façon similaire pour les autres faces, on aura:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2} (v_i T_{i2}) \right] dV \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (v_i T_{i3}) \right] dV.$$

Pour la force de volume, le taux de travail sera:

$$\rho \mathbf{B} dV \cdot \mathbf{v} = \rho B_i v_i dV \quad (3.85)$$

Le taux total de travail sur la particule sera:

$$P = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i T_{ij}) dV + \rho B_i v_i dV \quad (3.86)$$

Or puisque

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i T_{ij}) = v_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

On aura:

$$P = v_i \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i \right] dV + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (3.87)$$

Puissance de contrainte (Suite)

Or de l'équation du mvt

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (3.88)$$

On aura:

$$P = v_i \frac{Dv_i}{Dt} \rho dV + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (3.89)$$

Le 1^{er} terme (à droite) représente le taux de changement de l'énergie cinétique de la particule comme suit:

$$\frac{D}{Dt}(KE) = \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\rho dV) v_i v_i \right] = (\rho dV) v_i \frac{Dv_i}{Dt} + \frac{1}{2} v_i v_i \frac{D}{Dt} [(\rho dV)] = (\rho dV) v_i \frac{Dv_i}{Dt} \quad (3.90)$$

Du au principe de la conservation de la masse: $\frac{D}{Dt}(\rho dV) = 0$

On aura:

$$P = \frac{D}{Dt}(KE) + P_s dV \quad (3.91)$$

Avec:

$$P_s = T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \text{tr}(\mathbf{T}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \quad (3.92)$$

P_s : appelé puissance de contrainte et représente le taux de travail pour changer le volume et la forme d'une particule de volume unitaire.

Puissance de contrainte (Suite)

Pour un tenseur symétrique

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{et} \quad T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = T_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

D'où

$$P_s = \frac{1}{2} T_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = T_{ij} D_{ij} = T_{ji} D_{ij} \quad (3.93)$$

D_{ij} : appelée composantes du taux de déformations (chap 4)

En fonction du 1^{er} tenseur de Piola-Kirchhoff:

$$P_s = \frac{\rho}{\rho_o} \text{tr}(\mathbf{T}_o^T \frac{D\mathbf{F}}{Dt}) = \frac{\rho}{\rho_o} \left[(T_o)_{ij} \frac{DF_{ij}}{Dt} \right] \quad (3.94)$$

En fonction du 2^{ème} tenseur de Piola-Kirchhoff:

$$P_s = \frac{\rho}{\rho_o} \text{tr}(\tilde{\mathbf{T}} \frac{DE^*}{Dt}) = \frac{\rho}{\rho_o} \tilde{T}_{ij} \frac{DE_{ij}^*}{Dt} \quad (3.95)$$

E^*_{ij} : Tenseur de déformation de Lagrange (chap 4)

Merci. Fin du chapitre 3

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 4

Déformations et taux de déformations