Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 4

Déformations et Taux de déformations

COURS 4 **Mercredi 09.04.2008**

1. Description des mouvements d'un M.C

La cinématique des particules permet de définir le chemin d'une particule par un vecteur en fonction du temps:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ **Ou bien** $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3$ **(4.1)**

S'il ya « N » particules, chaque particule aura son chemin, et on a:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t), \quad n = 1,2\ldots N$$

Pour un milieu continu, c'est un peu difficile (infinité de particules).

Alors au lieu de les identifier par un nombre on les identifie par leur position qu'elles occupent au temps de référence « t_0 ».

Ex: si une particule d'un milieu continu était à la position (X_1,X_2,X_3) au temps de référence « t_0 » alors on utilise les coordonnées (X_1,X_2,X_3) pour identifier cette particule.

Description des mouvements d'un M.C (Suite)

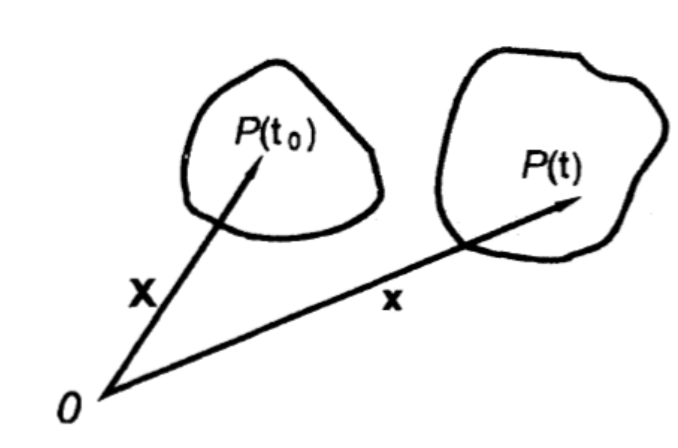
En général, les chemins de chaque particule dans un milieu continu peuvent être décrites par l'équation du vecteur:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \qquad \textbf{Avec:} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_o) = \mathbf{X} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Où:

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ **Position de « P » à « t »**

et $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$



En composantes:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Ou bien:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \qquad \textbf{Avec:} \quad x_i(X_1, X_2, X_3, t_o) = X_i \qquad \textbf{(4.4)}$$

X_1,X_2 et X_3 sont les coordonnées matériels.

(4.2), (4.3) et (4.4) équations cinématiques du mvt.

Description des mouvements d'un M.C (Suite)

Exemple

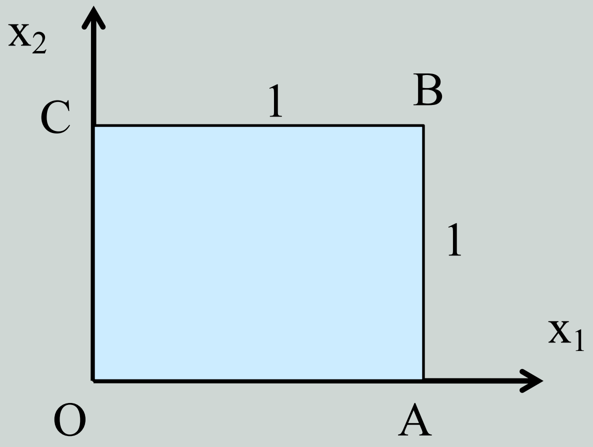
Considérons le mouvement:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + ktX_2\,\mathbf{e}_1$$

$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$; vecteur position au temps « t »

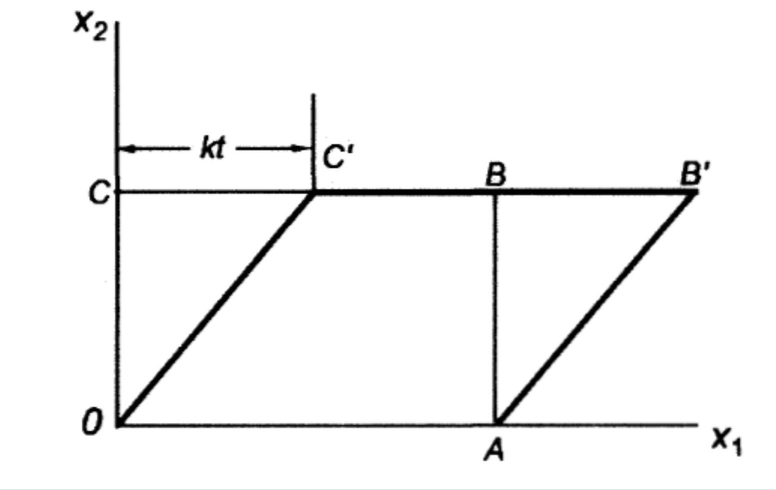
$X = X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$; Vecteur position au temps t=0.

Définir la configuration au temps « t » d'un corps qui au temps t=0 a une forme cubique de cotés unités.



Description des mouvements d'un M.C (Suite)

Exemple



Après déformation.

Les composantes du vecteur « x » sont

$$x_1 = X_1 + ktX_2$$
$$x_2 = X_2$$
$$x_3 = X_3$$

À «t=0 », la particule est en « O » (0,0,0).

D'où: $X_1=0$, $X_2=0$ et $X_3=0$

En remplaçant, on aura au temps « t » $x_1=0$, $x_2=0$ et $x_3=0$.

Pour le point « A »: $(X_1,X_2,X_3)=(1,0,0)$ d'où $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,0)$.

Le ligne OA ne bouge pas.

Un point sur la ligne CB a pour coordonnées $(X_1,X_2,X_3)=(X_1,1,0)$ à t=0 et à « t » , il aura $(x_1,x_2,x_3) = (X_1+kt,1,0)$.

Donc la ligne a bougé d'une distance de « kt » suivant x_1.

De même OC: $(X_1,X_2,X_3)=(0,X_2,0)$ et $(x_1,x_2,x_3) = (ktX_2,X_2,0)$

D'où la figure obtenu. Glissement simple.

2. Descriptions matérielle et spatiale du mouvement

Un MC en mouvement, sa température Θ, sa vitesse v, son tenseur T peuvent changer dans le temps. Ces changements sont décrits de 02 manières:

1. Description Lagrangienne. **(ou matérielle)**

En suivant la particule. Dans ce cas les variables sont fonctions des coordonnées matérielles (X_1,X_2,X_3) et du temps « t ».

$$\Theta = \hat{\Theta}(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(X_1, X_2, X_3, t) \qquad (4.5)$$

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(X_1, X_2, X_3, t)$$

2. Description Eulerienne. **(ou spatiale)**

En restant dans une position fixe et on observe. D'où

$$\Theta = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (4.6)$$

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}(x_1, x_2, x_3, t)$$

Descriptions matérielle et spatiale du mouvement (Suite)

Exemple.

Soit le mouvement d'un MC:

$$x_1 = X_1 + kt\,X_2, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3$$

Et soit le champ de température dans la description spatiale donné par:

$$\Theta = x_1 + x_2$$

a) Calculer la température dans la description matérielle.

b) Déterminer la vitesse dans les 02 descriptions.

c) Déterminer le taux de température dans les 02 descriptions.

Descriptions matérielle et spatiale du mouvement (Suite)

Solution

a) Température en Lagrangienne.

$$x_1 = X_1 + kt\,X_2, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3$$

Et $\Theta = x_1 + x_2$ **D'où** $\Theta = X_1 + (kt+1)X_2.$

b) Vitesse:

en Lagrangienne: $v_i = \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{X_i - \text{fixe}}$ **D'où** $v_1 = kX_2,\ v_2 = v_3 = 0$

en Eulerienne: $v_1 = kx_2,\ v_2 = v_3 = 0$

c) Taux de température

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)_{X_i - \text{fixe}} = k\,X_2 = k\,x_2$$

Bien que le champ de température ne dépend du temps mais chaque particule subira un changement puisque ça suit la position spatiale.

3. Notions de dérivées du point matériel

La dérivée par rapport au temps peut être exprimée dans les 02 descriptions:

a) En Lagrangienne.

On a $\Theta = \hat{\Theta}(X_1, X_2, X_3, t)$ **D'où** $\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t}\right)_{X_i - \text{fixe}}$ **(4.7)**

b) En Eulerienne.

On a $\Theta = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, x_3, t)$ **Or** $x_i = \hat{x_i}(X_1, X_2, X_3, t)$.

D'où

$$\left(\frac{D\Theta}{Dt}\right) = \left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t}\right)_{X_i - \text{fixe}} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t}\right)_{x_i - \text{fixe}} \quad (4.8)$$

En coordonnées cartésiennes $\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t}$ **Représentent les composantes de vitesses v_i de la particule X_i.**

D'où $\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + v_1\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial \Theta}{\partial x_3}$ $\quad \frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\Theta$ **(4.9)**

Notions de dérivées du point matériel (Suite)

L'équation
$$\frac{D\Theta}{Dt}=\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\Theta$$

est valable pour tous les systèmes de coordonnées, il suffit juste d'exprimer le gradient dans le système approprié.

a) En coordonnées cylindriques.

$$\mathbf{v}=v_r\mathbf{e_r}+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_z\mathbf{e_z}$$ D'où $$\nabla\Theta=\frac{\partial\Theta}{\partial r}\mathbf{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial\Theta}{\partial z}\mathbf{e_z}$$

alors

$$\frac{D\Theta}{Dt}=\frac{\partial\Theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial\Theta}{\partial z}\qquad(4.10)$$

b) En coordonnées sphériques.

$$\mathbf{v}=v_r\,\mathbf{e}_r+v_\theta\,\mathbf{e}_\theta+v_\phi\,\mathbf{e}_\phi$$ D'où $$(\nabla\Theta)_r=\frac{\partial\Theta}{\partial r}\qquad(\nabla\Theta)_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\qquad(\nabla\Theta)_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}$$

alors

$$\frac{D\Theta}{Dt}=\frac{\partial\Theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\qquad(4.11)$$

4. Accélération d'une particule d'un MC

C'est le taux de changement de la vitesse d'une particule.

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{X_i-\text{fixe}} \equiv \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \qquad (4.12)$$

a) En Lagrangienne.

Si la vitesse est connue en Lagrangienne, il suffit de la dériver par rapport au temps.

b) En Eulerienne.

En coordonnées cartésiennes.

$$\mathbf{v}=v_1(x_1,x_2,x_3,t)\mathbf{e}_1+v_2(x_1,x_2,x_3,t)\mathbf{e}_2+v_3(x_1,x_2,x_3,t)\mathbf{e}_3 \qquad (4.13)$$

D'où

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\frac{Dv_1}{Dt}\mathbf{e}_1+\frac{Dv_2}{Dt}\mathbf{e}_2+\frac{Dv_3}{Dt}\mathbf{e}_3 \qquad (4.14)$$

avec

$$\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_i}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_i}{\partial x_3}$$

i.e.

$$a_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (4.15)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\nabla \mathbf{v})\,\mathbf{v} \qquad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\tilde{\nabla}\,\mathbf{v} \qquad (4.16)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} = \mathbf{e}_m\frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Accélération d'une particule d'un MC (Suite)

b) En Eulerienne.

En coordonnées Cylindriques.

$$\mathbf{v} = v_r(r,\theta,z)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\theta,z)\mathbf{e}_\theta + v_z(r,\theta,z)\mathbf{e}_z$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \qquad (4.17)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

En coordonnées Sphériques.

$$\mathbf{v} = v_r(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_\theta + v_\phi(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_\phi$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi\sin\theta\right)$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi\cos\theta\right) \qquad (4.18)$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta\right)$$

5. Champ de déplacement

Le déplacement d'une particule d'une position P à une position Q est le vecteur PQ.

D'où le vecteur déplacement de la position de référence à la position au temps « t » est donné par:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \qquad (4.19)$$

exemple

La configuration déformée d'un MC est donnée par

$$x_1 = \frac{1}{2}X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

Quel est le vecteur déplacement?

On a $\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$

D'où

$$u_1 = \frac{1}{2}X_1 - X_1 = -\frac{1}{2}X_1, \quad u_2 = X_2 - X_2 = 0, \quad u_3 = X_3 - X_3 = 0$$

État uni axial de contraction

6. Cinématique de mvt de corps rigide

a) Translation de corps rigide.

L'équation cinématique est définie par:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{c}\,(t) \qquad (4.20)$$

Où c(0) = 0

Le déplacement sera

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{c}(t)$$ **Indépendant de X.**

i.e. Chaque point matériel se déplace de la même manière avec la même magnitude et la même direction au temps « t ».

b) Rotation de corps rigide autour d'un point fixe.

L'équation cinématique est définie par:

$$\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{R}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{b}) \qquad (4.21)$$

Où R(t) est un tenseur orthogonal propre (tenseur de rotation) (chap 2).

Avec R(0) = I.

b: est un vecteur constant

La rotation se fait autour du point fixe x=b.

Cinématique de mvt de corps rigide (suite)

c) Mvt général de corps rigide.

L'équation cinématique est définie par:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(t)(\mathbf{X}-\mathbf{b})+\mathbf{c}(t) \qquad (4.22)$$

Où R(t) est un tenseur de rotation avec R(0) = I et c(t) est un vecteur avec c(0)=b.

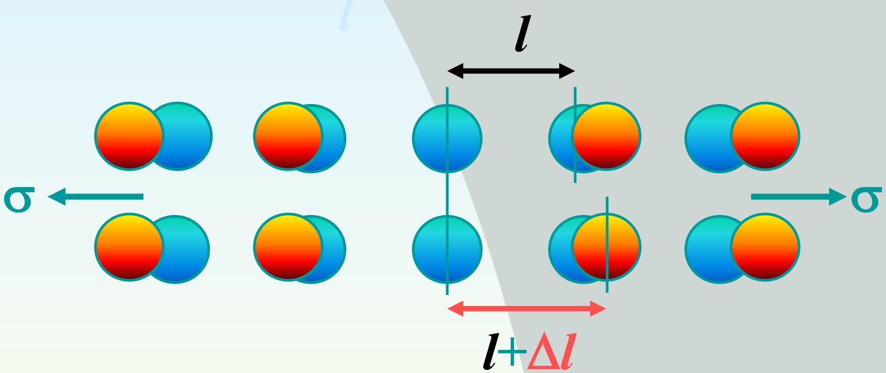
7. Définition de la déformation

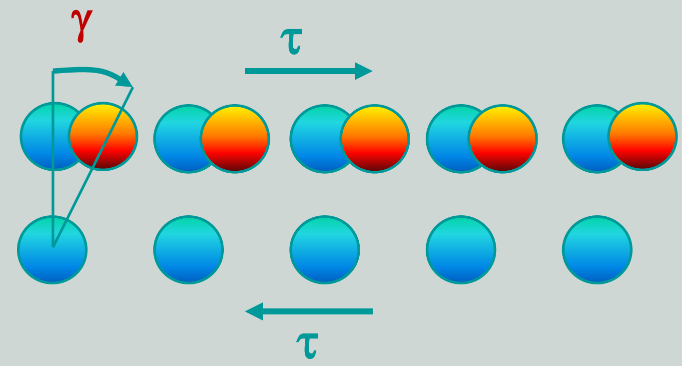
Robert Hooke

Pour supporter un chargement un milieu matériel doit se déformer

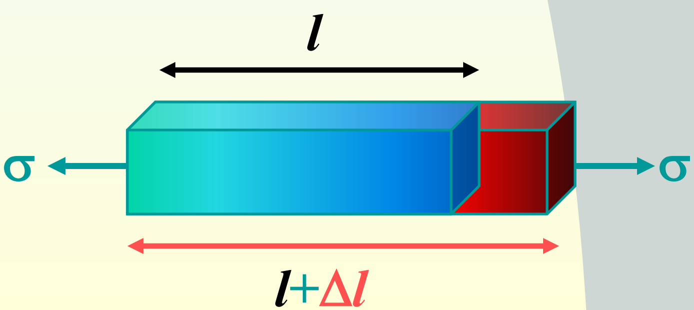
Extension $\frac{\Delta l}{l}$

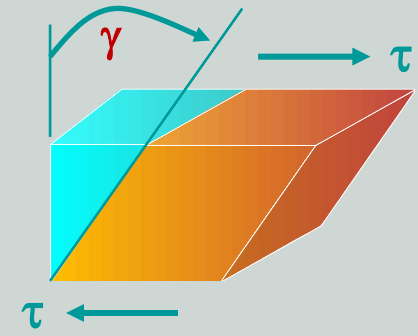
Glissement γ



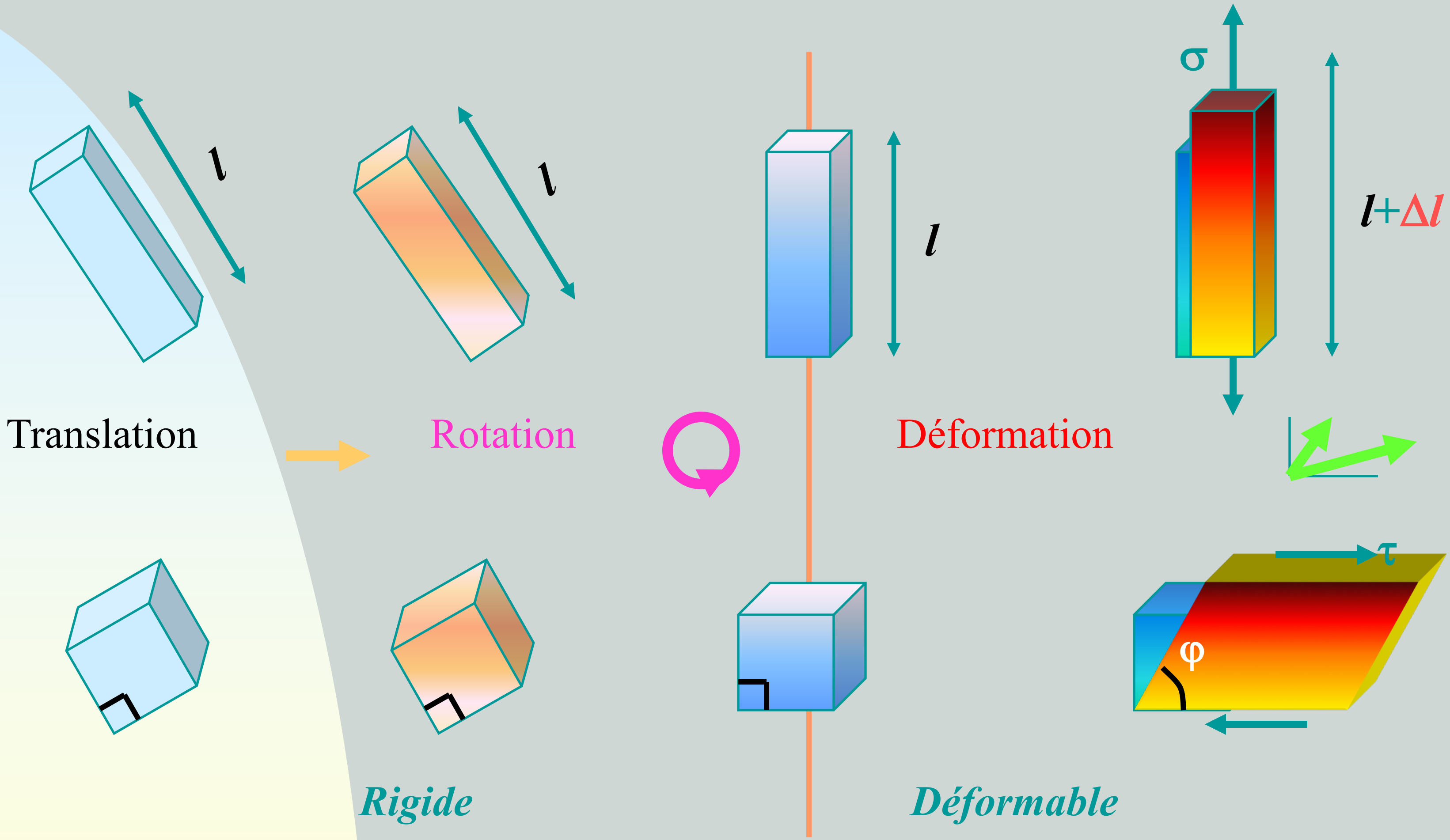


A l'échelle microscopique





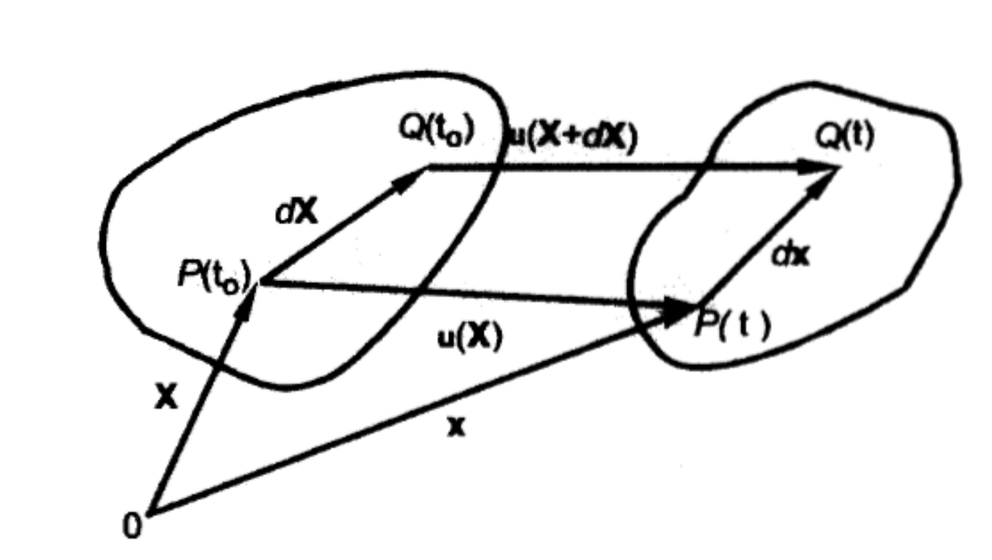
A l'échelle macroscopique



Seule la Déformation modifie les Longueurs et les Angles

8. Déformations infinitésimales

Soit le corps qui passe d'une configuration de référence « t0 » à une autre configuration « t ».



Un point matériel « P » se déplace de « u », d'où

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

Un point matériel « Q » à X+dX arrive à x+dx, soit

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$$

Par différence

Déformations infinitésimales (suite)

Par différence

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) - \mathbf{u}(\mathbf{X},t)$$

Or on sait que (chap 2, (2.58)

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}$$

D'où

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X} \qquad (4.23)$$

Où $\nabla\mathbf{u}$ est le gradient de déplacement (tenseur de 2ème ordre). En coordonnées cartésiennes avec $X=X_i e_i$ et $u=u_i e_i$, on aura:

$$[\nabla\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \qquad (4.24)$$

Déformations infinitésimales (suite)

(4.23) peut s'écrire

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \qquad (4.25)$$

En posant:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \qquad (4.26)$$

On peut définir la relation entre la longueur (ds) de dx et (dS) de dX. On a:

$$d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}d\mathbf{X}$$

i.e.

$$(ds)^2 = d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}d\mathbf{X} \qquad (4.27)$$

Rem: Si F est un tenseur orthogonal ($F^T F = I$) alors $(ds)^2 = (dS)^2$,
F correspond au mvt de corps rigide.

F: quelconque. D'où

$$\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} = (\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u})^T(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T+(\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u} \qquad (4.28)$$

Déformations infinitésimales (suite)

Si on suppose que les composantes de déplacement et ses dérivées sont petites, alors **(4.25)**

$(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}$ **Est négligée**

Alors:

$$\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \equiv \mathbf{I} + 2\mathbf{E} \qquad (4.29)$$

Avec:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}\ ] \qquad (4.30)$$

Part Symétrique de $\nabla \mathbf{u}$

De l'équation (4.27), on remarque que « E » caractérise un changement de longueur du MC qui subit une déformation petite.

« E » est appelé tenseur de déformation infinitésimale

Le tenseur est symétrique

Déformations infinitésimales (suite)

Si on suppose 02 points matériels $dX^{(1)}$ et $dX^{(2)}$ qui deviennent après mouvement $dx^{(1)}$ et $dx^{(2)}$ au temps « t » avec

$dx^{(1)} = F\, dX^{(1)}$ et $dx^{(2)} = F\, dX^{(2)}$, on aura:

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(2)} \qquad (4.31)$$

En remplaçant (4.29) on obtient

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} + 2 d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X}^{(2)} \qquad (4.32)$$

Cette équation sera utilisée pour définir toutes les composantes de déformations

Déformations infinitésimales (suite)

8.1 Coordonnées rectangulaires.

On a:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \qquad \textbf{(4.33)}$$

Ou bien

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.34)}$$

Déformations infinitésimales (suite)

8.2 Coordonnées cylindriques.

On a:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}\right] & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_r\right) & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial u_\theta}\right] & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (4.35)$$

8.3 Coordonnées sphériques.

(4.36)

On a:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi}+\dfrac{\partial u_\phi}{\partial r}-\dfrac{u_\phi}{r}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}\right] & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_r\right) & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi}-\dfrac{u_\phi\cot\theta}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi}+\dfrac{\partial u_\phi}{\partial r}-\dfrac{u_\phi}{r}\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi}-\dfrac{u_\phi\cot\theta}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right] & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{u_\theta\cot\theta}{r} \end{bmatrix}$$

9. Signification des composantes du tenseur

9.1 Eléments de la diagonale de « E ».

Considérons un élément matériel $dX^{(1)}=dX^{(2)}=dX=(dS)n$
Où « n » est un vecteur unitaire et dS est la longueur de « dX ».
Soit « ds » la longueur déformée de « $dx^{(1)}$ » (i.e. $ds=|dx^{(1)}|$.
Alors (4.32), donne

$$(ds)^2-(dS)^2 = 2(dS)^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{En}$$

Or pour de petite déformation

$$(ds)^2-(dS)^2 = (ds+dS)(ds-dS) \approx 2dS(ds-dS).$$

alors

$$\frac{ds-dS}{dS} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{En} = E_{nn} \quad \text{(Pas de sommation)} \qquad (4.37)$$

(4.37):Une élongation unitaire (augmentation de la longueur par longueur initiale unitaire) pour un élément dans une direction « n » est donnée par « n.En »

Signification des composantes du tenseur (suite) Eléments de la diagonale

En particulier

E_{11} est l'élongation unitaire pour un élément originalement suivant x_1.
E_{22} est l'élongation unitaire pour un élément originalement suivant x_2.
E_{33} est l'élongation unitaire pour un élément originalement suivant x_3.

Ces composantes sont appelées déformations normales

9.2 Eléments hors diagonale de « E ».

Soit:

$$dX^{(1)}=dS_1 m \quad \text{et} \quad dX^{(2)}=dS_2 n$$

où « m » et « n » sont 02 vecteurs unitaires perpendiculaires.

Alors

$$(ds_1)(ds_2)\cos\theta = 2(dS_1)(dS_2)\mathbf{m}\cdot\mathbf{E}\mathbf{n} \tag{4.38}$$

« θ » est l'angle entre $dx^{(1)}$ et $dx^{(2)}$.
Si « $\theta = \pi/2 - \gamma$ » alors « γ » peut représenter une petite diminution de l'angle entre $dX^{(1)}$ et $dX^{(2)}$, connue sous le nom de déformation angulaire ou bien distorsion.

Signification des composantes du tenseur (suite) Eléments hors diagonale

Or:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \sin\gamma$$

Et pour de petite déformation:

$$\sin\gamma \approx \gamma,\ \frac{ds_1}{dS_1}\approx 1,\ \frac{ds_2}{dS_2}\approx\ 1$$

alors

$$\gamma = 2\mathbf{m}\cdot\mathbf{En} \qquad (4.39)$$

Si les éléments sont dans les directions e_1 et e_2, alors $\mathbf{m}.\mathbf{En}=E_{12}$.

D'où:

$2E_{12}$ est la diminution de l'angle entre 02 éléments initialement dans les directions x_1 et x_2.

$2E_{13}$ est la diminution de l'angle entre 02 éléments initialement dans les directions x_1 et x_3.

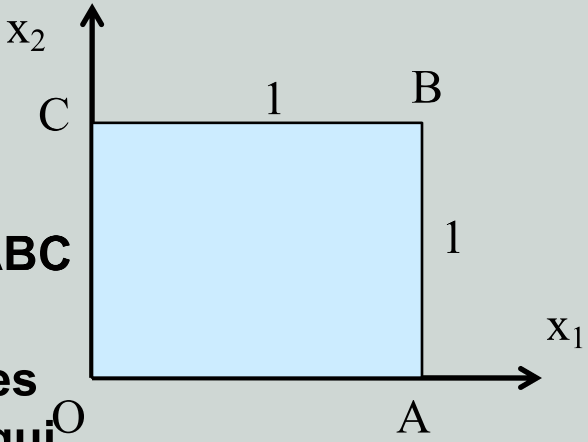
$2E_{23}$ est la diminution de l'angle entre 02 éléments initialement dans les directions x_2 et x_3.

Signification des composantes du tenseur (suite)

Exemple 1

Soient les composantes de déplacements suivantes:

$$u_1 = kX_2^2, \quad u_2 = u_3 = 0.$$



a) **Tracer la forme déformée du carré unitaire OABC de la figure.**

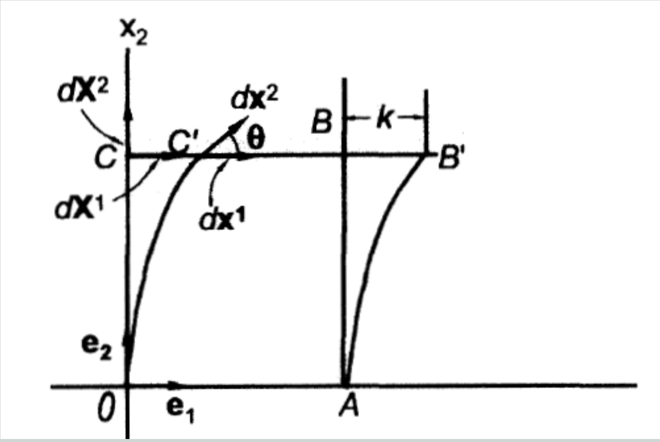
b) **Trouver le vecteur déformé (i.e. $dx^{(1)}$ et $dx^{(2)}$ des éléments matériels $dX^{(1)}=dX_1e_1$ et $dX^{(2)}=dX_2e_2$ qui étaient au point « C ».**

c) **Déterminer le rapport des longueurs déformées et non déformées des éléments de b) et le changement d'angle entre ces éléments.**

Signification des composantes du tenseur (suite)

Solution

a) Pour OA, $X_2=0$, d'où $u_1=u_2=u_3=0$. (OA ne se déplace pas).
Pour CB, X2=1, u1=k, u2=u3=0. CB se déplace de « k » suivant x1.
Pour OC et AB, $u1=kX^2_2$, la ligne est parabolique.
On obtient alors la déformée de la figure.



b) Au point « C », la matrice du gradient de déplacement est:

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{X_2=1} = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Or (4.23) $$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}$$

D'où:

$$d\mathbf{x}^{(1)} = d\mathbf{X}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}^{(1)} = dX_1\mathbf{e}_1 + 0 = dX_1\mathbf{e}_1$$

$$d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}^{(2)} = dX_2\mathbf{e}_2 + 2kdX_2\mathbf{e}_1 = dX_2(\mathbf{e}_2 + 2k\mathbf{e}_1)$$ (i)

Signification des composantes du tenseur (suite)

Solution

c) Des équations « i », on a:

$$|d\mathbf{x}^{(1)}| = dX_1\,,\ |d\mathbf{x}^{(2)}| = dX_2(1+4k^2)^{1/2}$$

D'où:

$$\frac{|d\mathbf{x}^{(1)}|}{|d\mathbf{X}^{(1)}|}=1 \qquad \textbf{et} \qquad \frac{|d\mathbf{x}^{(2)}|}{|d\mathbf{X}^{(2)}|}=(1+4k^2)^{(1/2)}$$

et

$$\cos\theta=\frac{d\mathbf{x}^{(1)}\cdot d\mathbf{x}^{(2)}}{|d\mathbf{x}^{(1)}|\,|d\mathbf{x}^{(2)}|}=\frac{2k}{(1+4k^2)^{1/2}}$$

Si « k » est très petite:

$$\frac{|d\mathbf{x}^{(1)}|}{|d\mathbf{X}^{(1)}|}=1 \qquad \frac{|d\mathbf{x}^{(2)}|}{|d\mathbf{X}^{(2)}|}=(1+2k^2)\approx 1 \qquad \cos\theta=2k$$

En utilisant «γ »

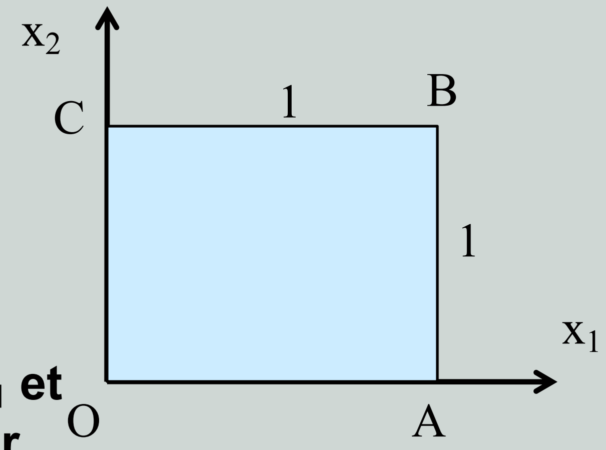
$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin\gamma=2k \qquad \gamma=2k$$

Signification des composantes du tenseur (suite)

Exemple 2

Reprendre le même exemple en passant par le tenseur des déformations

$$u_1 = kX_2^2, \quad u_2 = u_3 = 0.$$



a) Définir le tenseur E

b) En utilisant le tenseur E, trouver l'élongation unitaire pour les éléments matériels $dX^{(1)}=dX_1e_1$ et $dX^{(2)}=dX_2e_2$ qui étaient au point C(0,1,0). Trouver la diminution de l'angle entre ces 02 éléments.

c) Comparer les résultats avec ceux de l'exemple 1.

Signification des composantes du tenseur (suite)

Solution

a) Tenseur E.

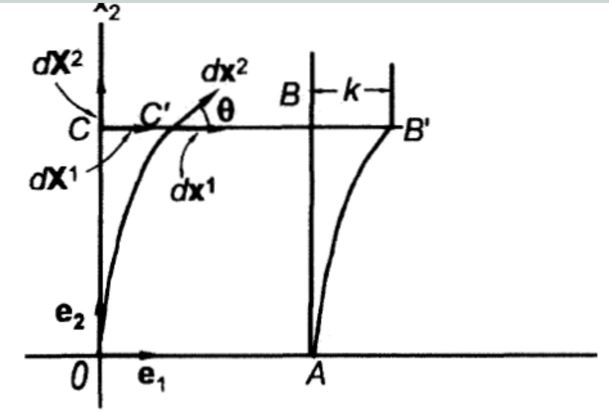
$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où

$$[\mathbf{E}] = [\nabla u]^s = \begin{bmatrix} 0 & kX_2 & 0 \\ kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) En « C », $X_2=1$, d'où

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$E_{11}=E_{22}=0$, $2E_{12}=k$ (ex 1)

c)

$$\frac{|d\mathbf{x}^{(1)}| - |d\mathbf{X}^{(1)}|}{|d\mathbf{X}^{(1)}|} = 0, \quad \frac{|d\mathbf{x}^{(2)}| - |d\mathbf{X}^{(2)}|}{|d\mathbf{X}^{(2)}|} = (1+4k^2)^{1/2} - 1 = 1 + 2k^2 - 1 = 2k^2 (\approx 0)$$

$$\sin\gamma = 2k$$

10. Etude du tenseur de déformation

10.1 Déformations principales

Puisque E est symétrique, il existe au moins 03 directions mutuellement perpendiculaires n1, n2 et n3 où la matrice de E est diagonale:

$$[\mathbf{E}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \qquad (4.40)$$

i.e. des éléments lignes infinitésimaux dans les directions n1, n2 et n3 restent perpendiculaires après déformation.

Ces directions sont appelées directions principales de déformation.

E_1, E_2 et E_3 : déformations principales.

E_1, E_2 et E_3 seront déterminées à partir de l'équation caractéristique:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad (4.41)$$

Avec:

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \qquad (4.42)$$

$$I_3 = |E_{ij}|$$

invariants

Etude du tenseur de déformation (suite)

10.2 Sphérique et Déviateur

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} - E_m & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} - E_m & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} - E_m \end{vmatrix}$$

$$E_m = \frac{1}{3} Tr(\overline{\overline{\varepsilon}})$$

$$E_d^2 = \frac{1}{3} Tr(\overline{\overline{D}}^2)$$

Sphérique ***S*** Tr(***S***)= Tr(ε)   Déviateur ***D*** Tr(***D***)= 0

E_m Déformation Normale Moyenne (Extension ou Contraction)

E_d Déformation Déviatorique Moyenne (Distorsion)

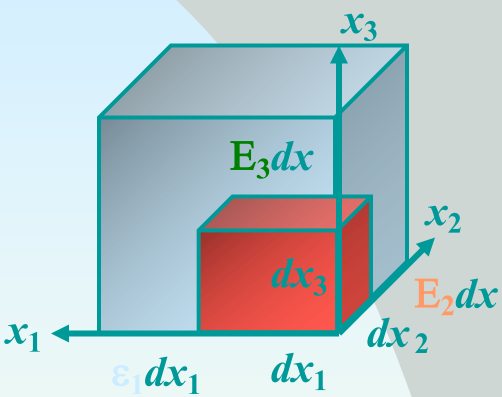
π Tenseur des Directions Tr(π)=0 et Tr(π²)=3

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = E_m \overline{\overline{\delta}} + E_d \overline{\overline{\pi}} = E_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + E_d \begin{vmatrix} \pi_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3(\mu) \end{vmatrix}$$

6 Composantes = $E_m + E_d + \mu$ +**3** Angles d'Euler

Etude du tenseur de déformation (suite)

10.3 Changement de volume et de forme



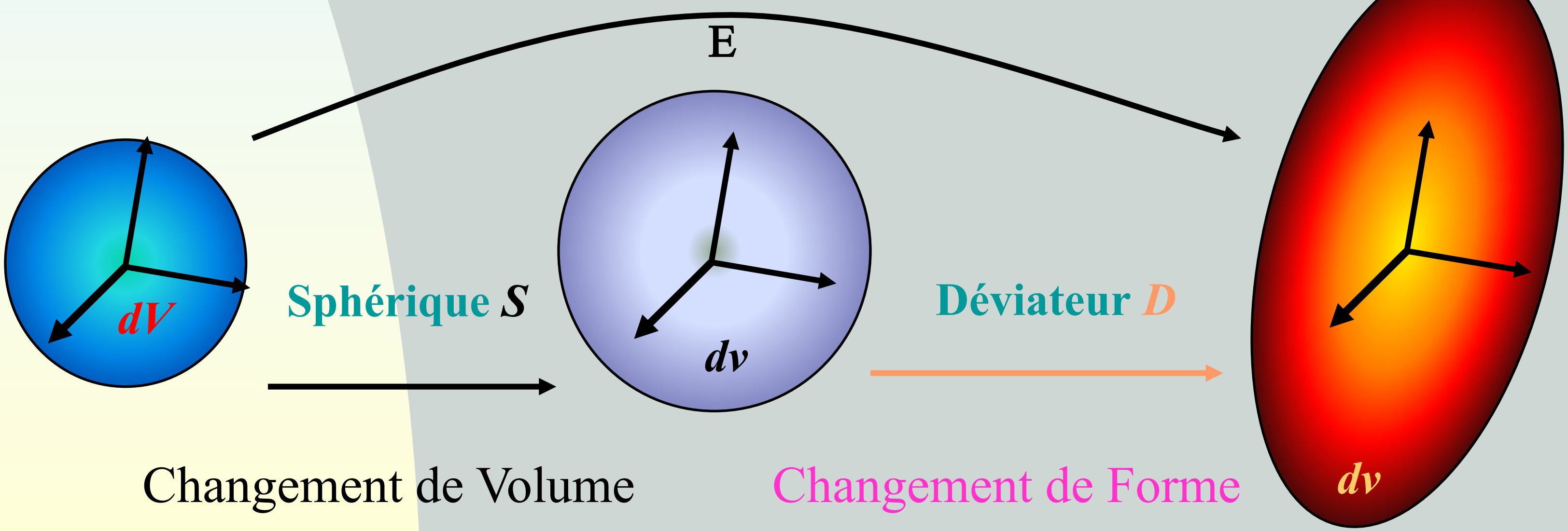
$$E = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{vmatrix}$$

$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$dv = (1+E_1)\, dx_1\, (1+E_2)\, dx_2\, (1+E_3)\, dx_3$$

Variation Relative de Volume $\dfrac{dv - dV}{dV} = E_1 + E_2 + E_3 = \mathrm{Tr}(E) = \mathrm{Div}\,\vec{u}$

Dilatation



Changement de Volume

à Forme Constante

Changement de Forme

à Volume Constant

Etude du tenseur de déformation (suite) Dilatation

La dilatation volumique est:

i) En coordonnées cartésiennes

$$e = E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \mathrm{div}\mathbf{u} = E_{11} + E_{22} + E_{33} \qquad (4.43)$$

ii) En coordonnées cylindriques

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (4.44)$$

iii) En coordonnées sphériques

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \qquad (4.45)$$

11. Tenseur de rotation

Mathématiquement, le gradient d'un champ de vecteur peut être décomposé en partie symétrique et partie antisymétrique. Soit

$$\mathrm{grad}U = U_{i,j} = U_{i,j} + \tfrac{1}{2}\,(U_{j,i} - U_{j,i})$$

$$U_{i,j} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\,(U_{i,j}+U_{j,i})}_{\text{Tenseur de déformation}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\,(U_{i,j} - U_{j,i})}_{\text{Tenseur de rotation}} \qquad (4.46)$$

Soit: $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{E}+\Omega$

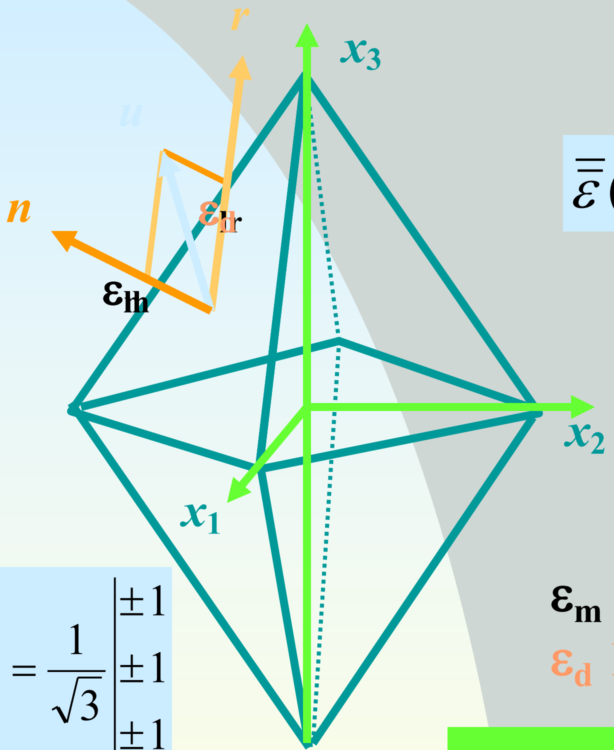
Ainsi: $d\mathbf{x} = d\mathbf{X}+(\mathbf{E}+\Omega)d\mathbf{X}$

Le changement de direction de dX est du au tenseur de déformation « E » et au tenseur de rotation « Ω ».

La rotation est décrite par: $\mathbf{t}^A \times \mathbf{dX} = \mathbf{\Omega}\, d\, \mathbf{X}$ **avec** $\mathbf{t}^A = \Omega_{32}\mathbf{e}_1+\Omega_{13}\mathbf{e}_2+\Omega_{21}\mathbf{e}_3$ **(4.47)**

12. Représentation des déformations

12.1 Déformations octaédriques



$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \varepsilon_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{vmatrix}$$

Sphérique S Tr(S)= Tr(ε) **Déviateur D Tr(D)= 0**

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}})$$

$$\varepsilon_d^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}^2)$$

ε_m Déformation Normale Moyenne (Extension - Contraction)

ε_d Déformation Déviatorique Moyenne (Distorsion)

$$\varepsilon_{nn} = \vec{n} \bullet \vec{u} = \vec{n}\overline{\overline{S}}\,\vec{l} + \vec{n}\overline{\overline{D}}\,\vec{l} = \frac{1}{3}\boldsymbol{Tr}(\overline{\overline{S}}) + \cancel{\frac{1}{3}\boldsymbol{Tr}(\overline{\overline{D}})} = \varepsilon_m$$

$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_m$

$$\varepsilon_{nr}^2 = \vec{T} \bullet \vec{T} - \varepsilon_{nn}^2 = \vec{n}(\overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}})^2\vec{n} = \vec{n}(\overline{\overline{S}}^2)\vec{n} + 2\vec{n}(\overline{\overline{S}}\,\overline{\overline{D}})\vec{n} + \vec{n}(\overline{\overline{D}}^2)\vec{n} - \varepsilon_m^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}^2)} + \cancel{2\sigma_m \mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}})} + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}^2) - \cancel{\varepsilon_m^2} = \varepsilon_d^2$$

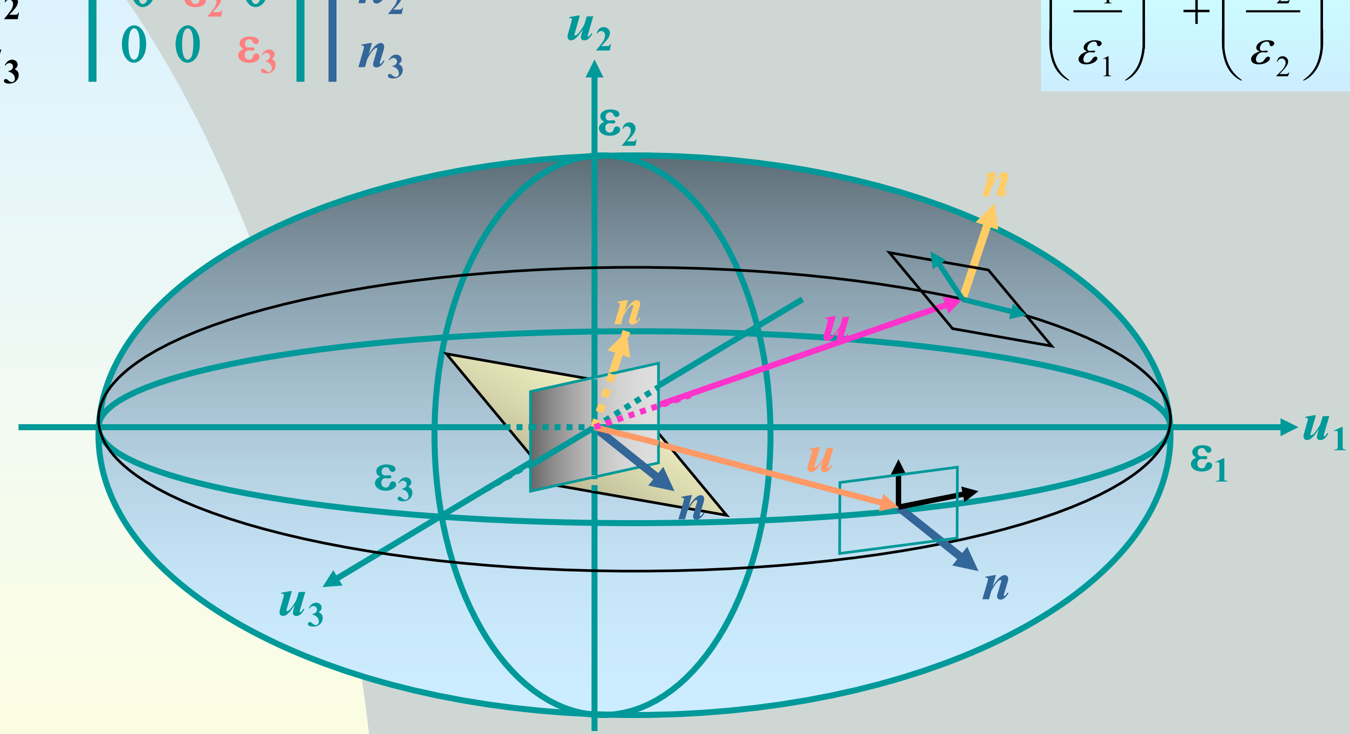
$\varepsilon_{nr} = \varepsilon_d$

Représentation des déformations (Suite)

12.2 Ellipsoide des déformations

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{u_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{\varepsilon_2}\right)^2 + \left(\frac{u_3}{\varepsilon_3}\right)^2 = 1$$

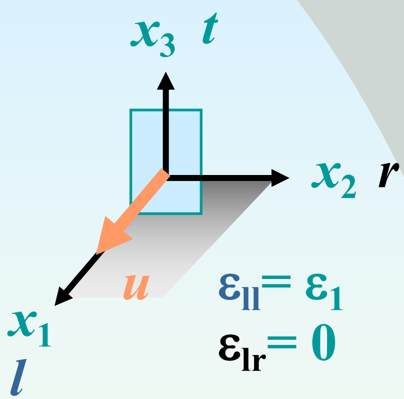


Lorsque ***n*** appartient à un plan principal, ***u*** appartient au même plan

Représentation des déformations (Suite)

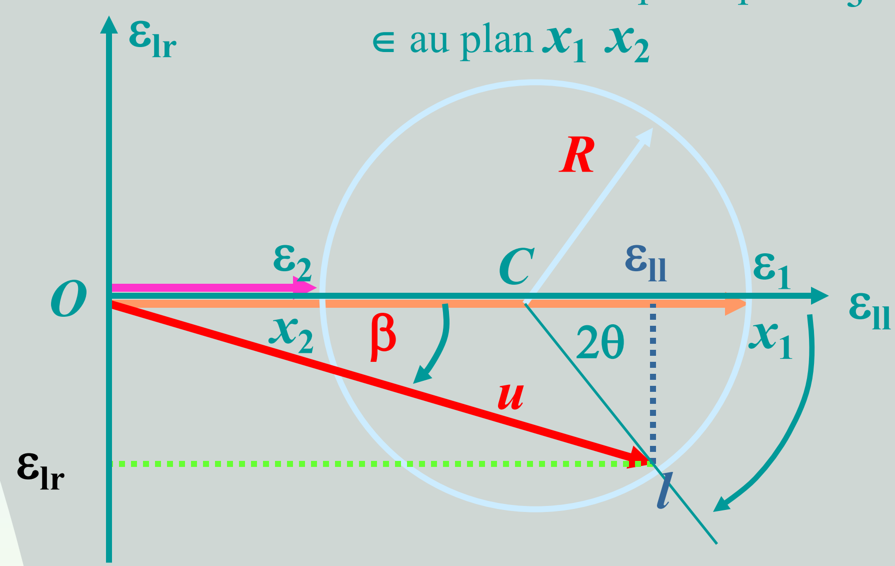
12.3 Cercle de Mohr Principal

Direction x_1



$\varepsilon_{ll} = \varepsilon_1$
$\varepsilon_{lr} = 0$

Directions ⊥ à la direction principale x_3
∈ au plan $x_1\ x_2$

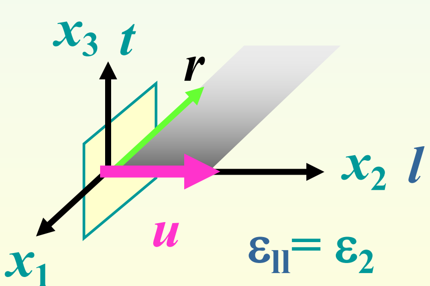


$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

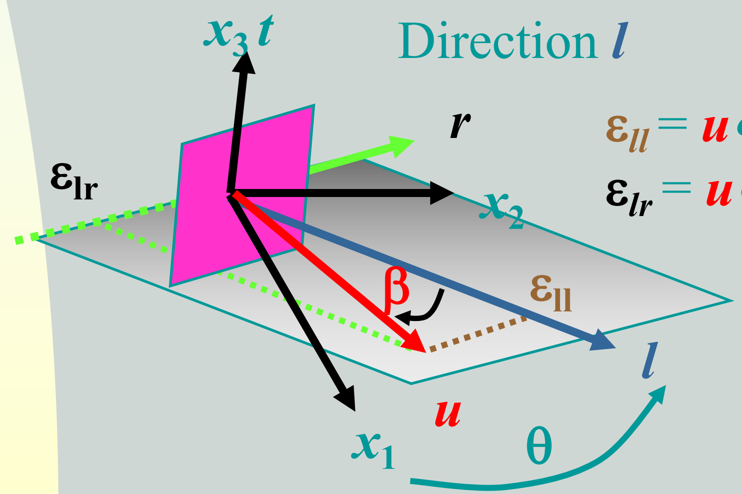
$$OC = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

Direction x_2



$\varepsilon_{ll} = \varepsilon_2$
$\varepsilon_{lr} = 0$

Direction l



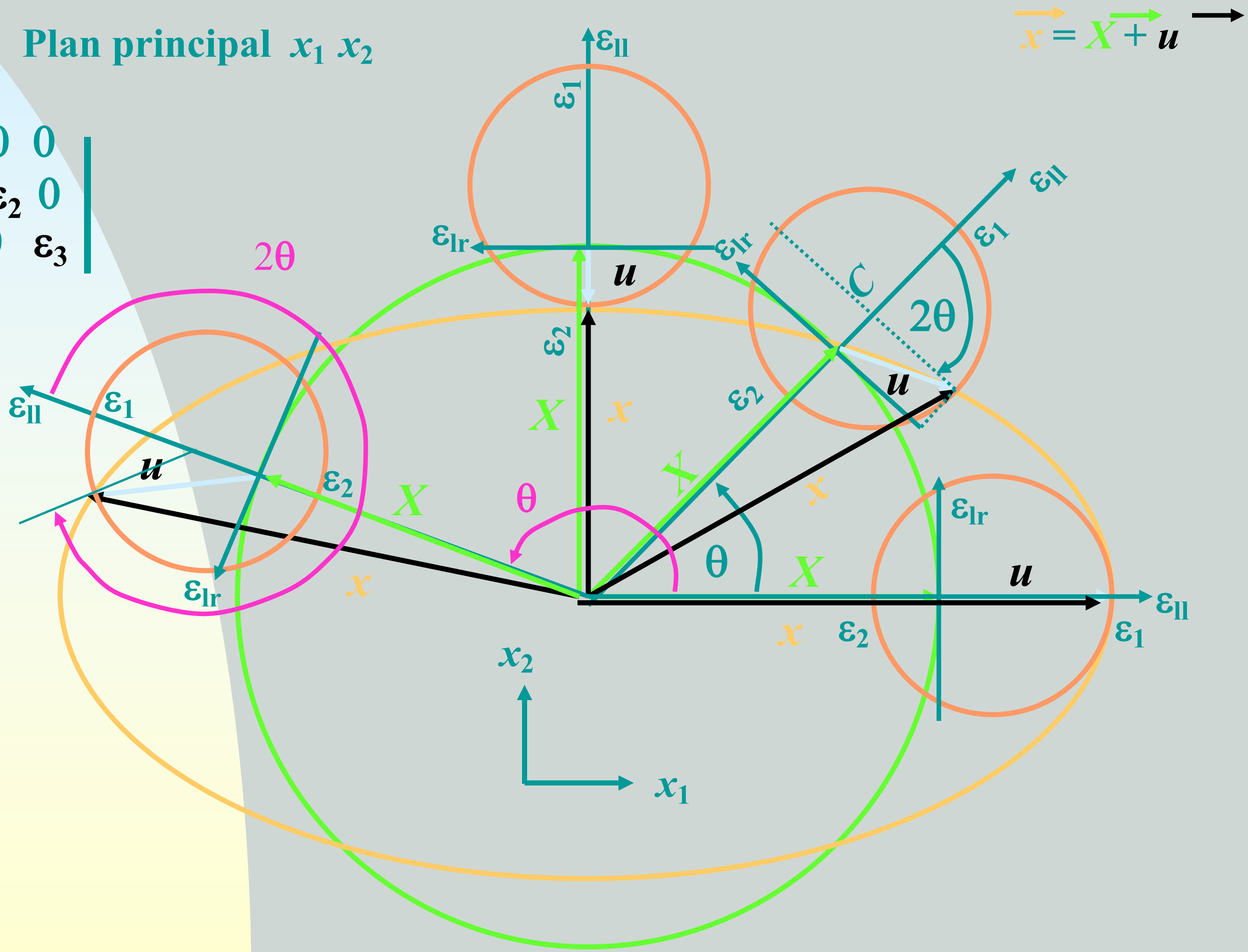
$\varepsilon_{ll} = u \bullet l = l\ \varepsilon\ l = OC + R\cos 2\theta$

$\varepsilon_{lr} = u \bullet r = l\ \varepsilon\ r = -R\sin 2\theta$

Représentation des déformations (Suite)

12.4 Cercle de Mohr et Déformation

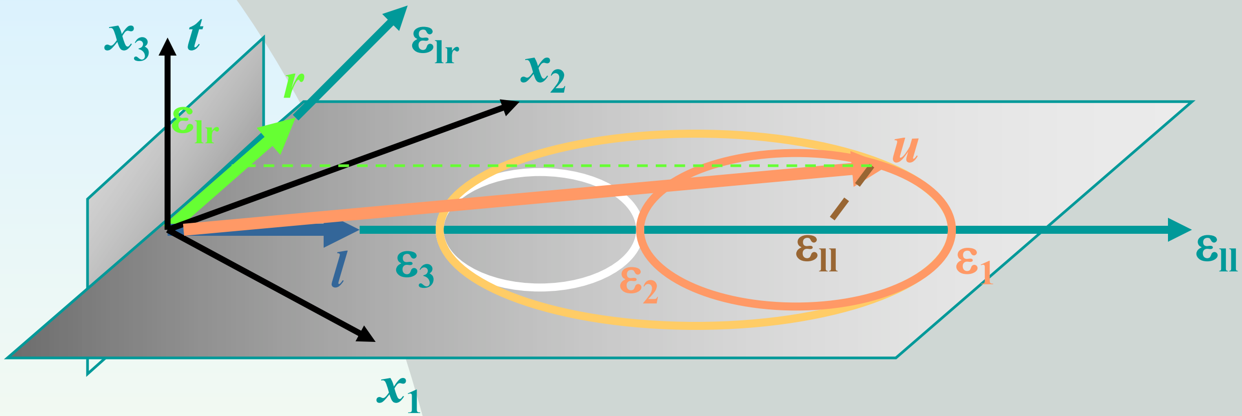
$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$



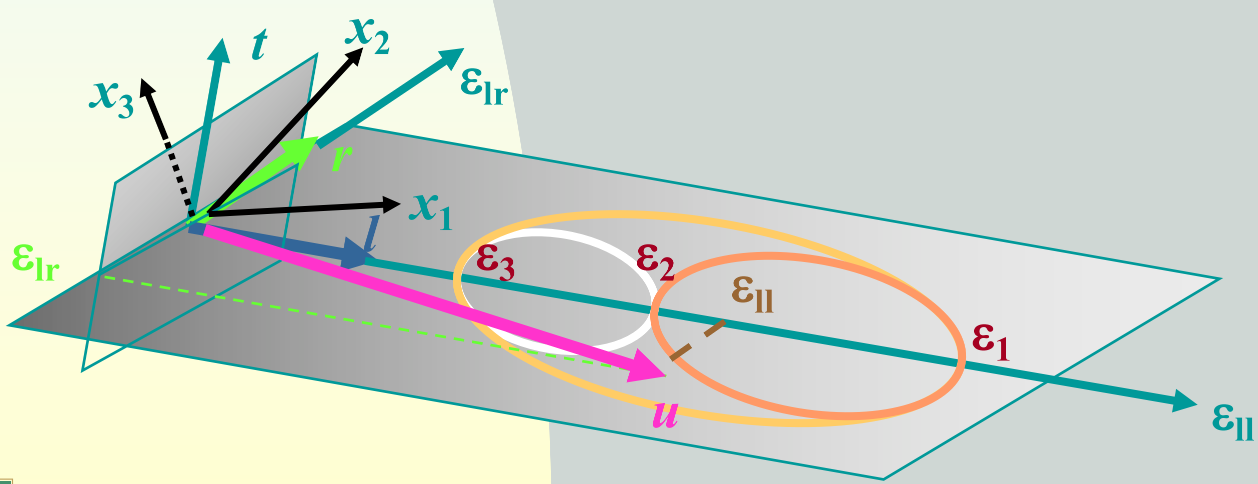
Représentation des déformations (Suite)

12.5 Cercles de Mohr

Direction $\boldsymbol{l}$ appartenant à un plan principal ($x_1\ x_2$)



Direction $\boldsymbol{l}$ n'appartenant pas à un plan principal

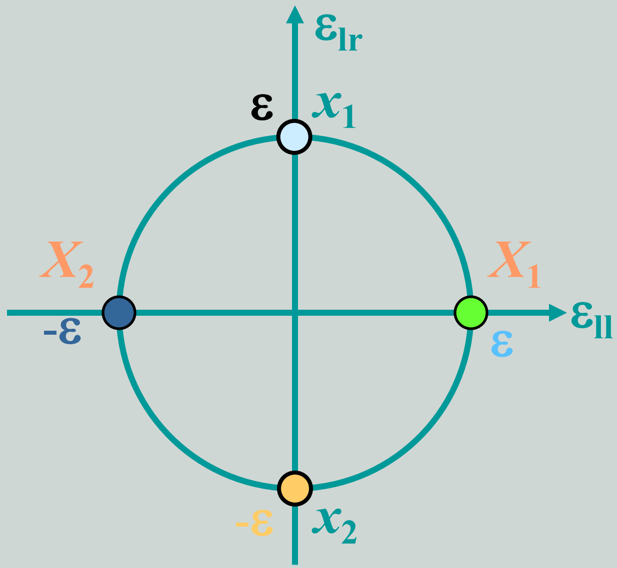


$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

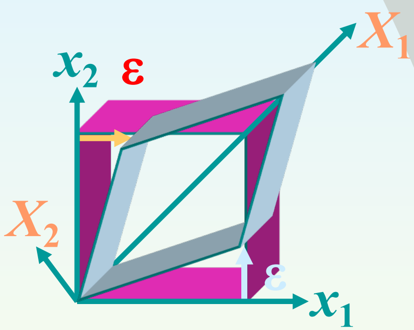
Représentation des déformations (Suite)

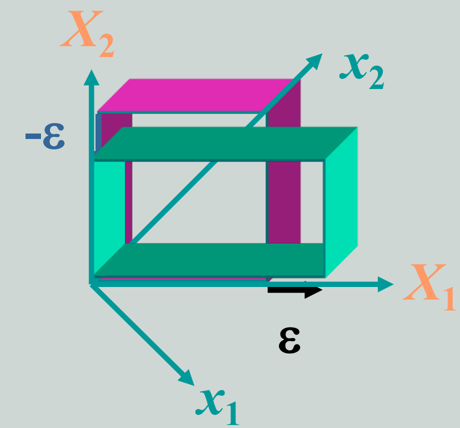
12.6 Glissement pur et glissement simple

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

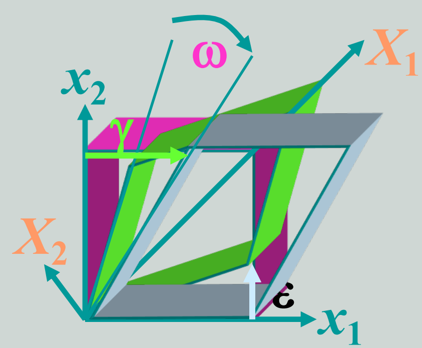


$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$





$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\overline{\overline{G}} = \begin{vmatrix} 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La distorsion est maximale sur les directions orientées à 45° des directions principales

La rotation $\omega = -\varepsilon$ Le glissement est le double de la distorsion $\gamma = 2\varepsilon$

13. Taux de changement de l'élément matériel

Soit un élément matériel « dx » du au point matériel « X » situé à la position « x » au temps « t ».

Le taux de changement de la longueur et direction de l'élément matériel « dx » est (sachant que x=x(X,t)):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) - \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{4.48}$$

En dérivant, on aura:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right) d\mathbf{x} = \left(\frac{D}{Dt}\right) \mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) - \left(\frac{D}{Dt}\right) \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{4.49}$$

Posons

$$(D/Dt)\mathbf{x}(\mathbf{X},t) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) \tag{4.50}$$

Où $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t)$ et $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ sont les description matériel et spatial (lagrange et Euler) de la vitesse de la particule « X ».

En remplaçant:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right) d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) - \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t) - \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) \tag{4.51}$$

Taux de changement de l'élément matériel (Suite)

Or on sait que (2.58) (qlq soit v):

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}$$

D'où

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)d\mathbf{x} = (\nabla_{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{X} = (\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{v}})d\mathbf{x} \qquad \textbf{(4.52)}$$

On s'intéresse plus à la description spatiale (Euler) de la vitesse. D'où en coordonnées cartésiennes, on a:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)d\mathbf{x} = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{x}$$

avec

$$[\nabla\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.53)}$$

14. Taux du tenseur de déformation

Le gradient de vitesse est la somme d'une partie symétrique et partie antisymétrique.

$$(\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \qquad (4.54)$$

Où

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad \text{(sym)} \qquad (4.55)$$

et

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T] \quad \text{(Antisym)} \qquad (4.56)$$

« D »: taux du tenseur de déformation ou tenseur de la vitesse de déformation.

« W »: Tenseur de rotation de la vitesse de déformation (Spin tensor)

avec

Taux du tenseur de déformation (suite)

D'où.

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Or: $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} = \dot{\varepsilon}_{11} = D_{11}$ **Appelée vitesse de déformation. …**

Taux du tenseur de déformation (suite)

Exemple

Soit le champ de vitesse suivant:

$$v_1 = kx_2 \qquad v_2 = v_3 = 0$$

a) Trouver les tenseurs « D » et « W ».

b) Déterminer le taux d'extension des éléments matériels:

$$d\mathbf{x}^{(1)} = (ds_1)\mathbf{e}_1,\ d\mathbf{x}^{(2)} = (ds_2)\mathbf{e}_2, \quad \text{et} \quad d\mathbf{x} = \frac{ds}{\sqrt{5}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$$

c) Trouver la max et le min des taux d'extension.

Taux du tenseur de déformation (suite)

Solution

$$v_1 = kx_2 \qquad v_2 = v_3 = 0$$

a) La matrice du gradient de vitesse est:

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où: partie symétrique et partie antisymétrique:

$$[\mathbf{D}] = [\nabla \mathbf{v}]^S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$[\mathbf{W}] = [\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Taux du tenseur de déformation (suite)

Solution

b) On sait que, si : dx=ds n (n: vecteur unitaire) et (dx.dx = (ds)^2)
alors:

$$\frac{1}{ds}\frac{D(ds)}{Dt} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{Dn}$$

D'où: pour

Élément « dx$^{(1)}$ », il est dans la direction e_1. D'où $D_{11} = 0$

Élément « dx$^{(2)}$ » est dans la direction e_2. d'où $D_{22}=0$

Élément « dx= (ds) n », on a: $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)$

D'où

$$\frac{1}{ds}\frac{D}{Dt}(ds) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{Dn} = \frac{1}{5}[1, 2, 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}k$$

Taux du tenseur de déformation (suite)

Solution

c) De l'équation caractéristique

$$|\mathbf{D}-\lambda\mathbf{I}| = -\lambda(\lambda^2-k^2/4) = 0$$

Les valeurs principales sont:

$$\lambda = 0, \ \pm k/2,$$

D'où

D_{max}= k/2 et D_{min}= -k/2

Les vecteurs principaux correspondants sont:

$$\mathbf{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$$

15. Equations de Compatibilité

Connaissant le vecteur de déplacement (u1, u2, u3) on peut définir le vecteur déformation (6 composantes) en n'importe quelle région où les dérivées partielles existent.

Réciproquement, si on connait les déformations, peut-on calculer les déplacements. Généralement non.

Le problème donc est de déterminer les déplacements à partir des déformations.

Dans ce cas pour assurer cette résolution, i.e. pour assurer la continuité du milieu, les composantes de déformations doivent satisfaire des conditions dites conditions de compatibilité.

Théorème:

Si $E_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ sont des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans une région, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions fonctions continues uniques de u1, u2 et u3 (06 équations de déformations) sont les équations de compatibilité suivantes:

Equations de Compatibilité (suite)

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2}=2\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3^2}+\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_2^2}=2\frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_2 \partial X_3}$$

$$\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_1^2}+\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_3^2}=2\frac{\partial^2 E_{31}}{\partial X_3 \partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2 \partial X_3}=\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{-\partial E_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial E_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial E_{12}}{\partial X_3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3 \partial X_1}=\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{-\partial E_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial E_{12}}{\partial X_3}+\frac{\partial E_{23}}{\partial X_1}\right) \qquad (4.58)$$

$$\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_1 \partial X_2}=\frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{-\partial E_{12}}{\partial X_3}+\frac{\partial E_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial E_{31}}{\partial X_2}\right)$$

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}=\varepsilon_{ik,jl}+\varepsilon_{jl,ik} \qquad (4.59)$$

15. Equations de Compatibilité pour les taux de déformation

On peut exprimer les équations de continuité en fonction des vitesses au lieu des déplacements.

Sachant que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = D_{ij} \qquad \textbf{(4.60)}$$

Les équations de compatibilité seront alors:

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 D_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad \textbf{(4.61)}$$

$$\frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_3^3} = 2\frac{\partial^2 D_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

Etc…

16. Gradient de déformation

Un mvt général d'un MC est décrit par:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \qquad (4.62)$$

« x » : position spatiale (euler) au temps « t » de la particule matériel avec « X » coordonnée (lagrange) matérielle.

Un élément matériel « dX » est transformé en « dx » à « t » par:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}+\mathbf{dX}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = (\nabla\, \mathbf{x})d\mathbf{X}$$ **Ou bien** $$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \qquad (4.63)$$

Avec « F » tenseur défini par:

$$\mathbf{F} = \nabla\mathbf{x} \qquad (4.64)$$

Appelé gradient de déformation à X

Si « u » représente un déplacement (i.e. x=X + u) , on a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \qquad (4.65)$$

17. Décomposition polaire

N'importe quel tenseur réel « F » ayant un déterminant différent de zéro (F^{-1} existe), peut être décomposé en produit d'un tenseur orthogonal propre « R » et d'un tenseur symétrique « U ».

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} \quad \text{Ou bien} \quad \mathbf{F} = \mathbf{VR} \qquad (4.66)$$

avec $$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} \qquad (4.67)$$

« R » décrit généralement les déplacements de corps rigide

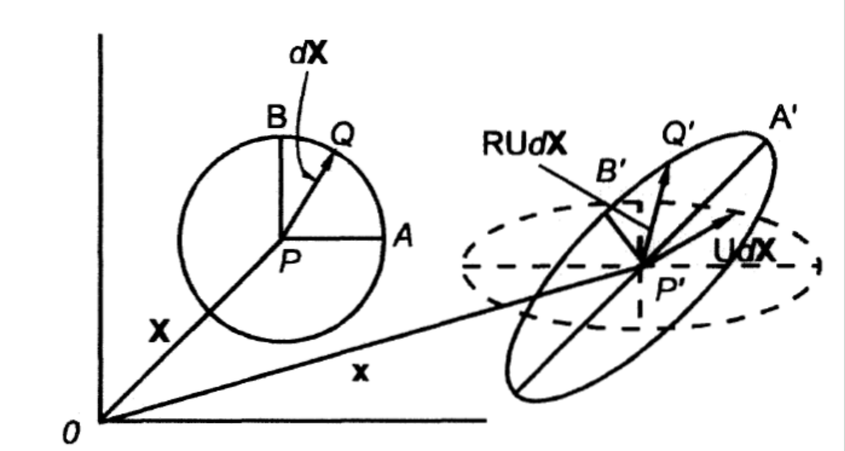
« U » décrit le tenseur des déformations de type extensions pures (principales).

Où »U » et « V » sont 02 tenseurs symétriques positifs définis .

(4.66) théorème de la décomposition polaire qui est unique (un seul R, U et V).

Un élément matériel « dX » à « X » est transformé en « dx » par: dx=FdX=RUdX.

Volume initial sphère (dX) à « X » devient ellipsoïde à « x » par effet de « U » puis il subit une rotation simple par effet de « R ».



Décomposition polaire (Suite)

On a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

D'où:

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T(\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} \tag{4.68}$$

Alors:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{4.69}$$

« U »: tenseur symétrique défini positif, alors

$$\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{1/2} \tag{4.70}$$

Et pour « R »:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \tag{4.71}$$

On peut facilement montrer que ($R^TR=I$) (i.e. que « R » est un tenseur orthogonal).

18. Tenseur de déformation de Cauchy-Green (droit)

Posons:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \qquad (4.72)$$

« C » est appelé tenseur de déformation de Cauchy-Green droit ou bien tenseur de déformation de Green.

Exemple:

Soit:

$$x_1 = X_1 + 2X_2\,, \;\; x_2 = X_2\,, \;\; x_3 = X_3$$

a) Déterminer « C »

b) Calculer les valeurs principales de « C » et les directions principales correspondantes.

c) Déterminer les matrices de « U » et « U^{-1} » dans le repère principal.

d) Déterminer les matrices de « U » et « U^{-1} » dans la base « e_i ».

e) Déterminer la matrice « R » dans la base « e_i ».

Tenseur de déformation de Cauchy-Green (droit) (Suite)

Solution:

$$x_1 = X_1 + 2X_2\,,\quad x_2 = X_2\,,\quad x_3 = X_3$$

a) On a:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs et vecteurs propres de « C » sont (après calculs)

$$C_1 = 5.828,\quad \mathbf{n}_1 = \left(\frac{1}{2.613}\right)[\mathbf{e}_1 + 2.414\mathbf{e}_2] = [0.3827\mathbf{e}_1 + 0.9238\mathbf{e}_2]$$

$$C_2 = 0.1716,\quad \mathbf{n}_2 = \left(\frac{1}{1.0824}\right)[\mathbf{e}_1 - 0.4142\mathbf{e}_2] = [0.9238\mathbf{e}_1 - 0.3827\mathbf{e}_2]$$

$$C_3 = 1\,,\quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$$

Tenseur de déformation de Cauchy-Green (droit) (Suite)

Solution:

b) Matrice de « C » dans le repère principal:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 5.828 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1716 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Matrices de « U » et « U^{-1} » dans le repère principal:

$$[\mathbf{U}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} \sqrt{5.828} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0.1716} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}^{-1}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 0.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4143 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Matrices de « U » et « U^{-1} » dans la base « e_i »:

$$[\mathbf{U}]_{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.7070 & 0.7070 & 0 \\ 0.7070 & 2.121 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur de déformation de Cauchy-Green (droit) (Suite)

Solution:

d) Matrices de « U » et « U^{-1} » dans la base « e_i »:

$$[U^{-1}]_{e_i} = \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 2.414 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2.121 & -0.7070 & 0 \\ -0.7070 & 0.7070 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Matrice de « R » dans la base « e_i »:

$$[R]_{e_i} = [F][U]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.121 & -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. Tenseur de déformation Lagrangien

Posons:

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}) \qquad (4.73)$$

« E* » est appelé tenseur de déformation finie de Lagrange.

Ou bien en fonction des composantes de déplacements

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]+\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u}) \qquad (4.74)$$

Soit:

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \qquad (4.75)$$

D'où

$$E*_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right]$$

$$E*_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\right]$$

Etc…

20. Tenseur de déformation de Cauchy-Green (gauche)

Posons:

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \qquad (4.76)$$

« C » est appelé tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche ou bien tenseur de déformation de Finger.

Avec comme relation entre « B » et « C », comme suit:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \mathbf{R}^T\mathbf{B}\mathbf{R} \qquad (4.77)$$

En composante de déplacements:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = (\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u})(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u})^T = \mathbf{I}+[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]+(\nabla\mathbf{u})(\nabla\mathbf{u})^T$$

$$B_{ij} = \delta ij + \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_j}{\partial X_m}$$

21. Tenseur de déformation Eulerien

En description Eulerienne:

$$\mathbf{e}^* \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{-1}) \qquad \textbf{(4.78)}$$

« e* » est appelé tenseur de déformation finie d'Euler.

Avec B=F F^T, B^{-1} est exprimée en fonction de F^{-1}, avec:

$$[\mathbf{F}^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.79)}$$

Tenseur de déformation Eulerien (suite)

En composantes de déplacements (sachant que u = x – X):

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{I}-\nabla_x\mathbf{u})^T(\mathbf{I}-\nabla_x\mathbf{u}) = \mathbf{I}-[\nabla_x\mathbf{u}+(\nabla_x\mathbf{u})^T]+(\nabla_x\mathbf{u})^T(\nabla_x\mathbf{u}) \quad (4.80)$$

$$\mathbf{e}^* = \frac{[\nabla_x\mathbf{u}+(\nabla_x\mathbf{u})^T]}{2}-\frac{(\nabla_x\mathbf{u})^T(\nabla_x\mathbf{u})}{2} \quad (4.81)$$

$$e^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \quad (4.82)$$

Soit:

$$e^*_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

$$e^*_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right]$$

Etc…

22. Changements de surface et de volume dus aux déformations

22.1 Surface

Soient 02 éléments matériels $dX^{(1)}=dS_1e_1$ et $dX^{(2)}=dS_2e_2$ de « X ».

La surface rectangulaire formée par $dX^{(1)}$ et $dX^{(2)}$ au temps de référence « t_0 » est:

$$d\mathbf{A}_o = d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1\, dS_2\, \mathbf{e}_3 = dA_o \mathbf{e}_3 \qquad (4.83)$$

Avec dA_0: magnitude de la surface non déformée.

e3: vecteur normal à la surface.

Au temps « t », $dX^{(1)}$ devient $dx^{(1)}=FdX^{(1)}$ et $dX^{(2)}$ devient $dx^{(2)}=FdX^{(2)}$.

La surface au temps « t » sera:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1\, dS_2\, \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2 = dA_o\, \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \qquad (4.84)$$

L'orientation de la surface déformée est normale à Fe_1 et Fe_2. Si cette direction est notée par le vecteur unitaire « n », alors:

$$d\mathbf{A} = dA\mathbf{n} \qquad (4.75)$$

Changements de surface et de volume dus aux déformations (suite) Surface

alors

$$dA\,\mathbf{n} = dA_o\,(\mathbf{Fe}_1 \times \mathbf{Fe}_2) \qquad (4.85)$$

Il est claire que

$$\mathbf{Fe}_1 \cdot dA\mathbf{n} = \mathbf{Fe}_2 \cdot dA\mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Fe}_3 \cdot \mathbf{dA} = dA_o\,(\mathbf{Fe}_3 \cdot \mathbf{Fe}_1 \times \mathbf{Fe}_2) \qquad (4.86)$$

Or, pour n'importe quels vecteurs, a, b et c, on a: a.bxc = det dont les lignes sont les composantes de a, b et c. d'où

$$\mathbf{Fe}_3 \cdot \mathbf{Fe}_1 \times \mathbf{Fe}_2 = \det \mathbf{F}$$

En remplaçant, on a:

$$\mathbf{Fe}_3 \cdot dA\mathbf{n} = dA_o \det \mathbf{F} \qquad (4.87)$$

En passant par la transposée, les équations (4.86) deviennent:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{n} = \left(\frac{dA_o}{dA}\right) \det \mathbf{F} \qquad (4.88)$$

D'où $F^T n$ est dans la direction « e_3 »

$$\mathbf{F}^T\mathbf{n} = \frac{dA_o}{dA}(\det \mathbf{F})\,\mathbf{e}_3 \qquad (4.89)$$

Finalement:

Changements de surface et de volume dus aux déformations (suite) Surface

finalement

$$dA\,\mathbf{n} = dA_o\,(\det \mathbf{F})\,(\mathbf{F}^{-1})^T\,\mathbf{e}_3 \qquad (4.90)$$

Montre que la surface déformée est normale à la direction de $(F^{-1})^T e_3$ et de magnitude:

$$dA = dA_o\,(\det \mathbf{F})\,|(\mathbf{F}^{-1})^T\,\mathbf{e}_3| \qquad (4.91)$$

Si on avait choisi une autre base cartésiennes de vecteurs autre que e_1, e_2 et e_3, la formule reste la même sauf qu'il faut remplacer le vecteur normal à la surface non déformée « e_3 » par « n_0 ». Soit en général:

$$dA\,\mathbf{n} = dA_o\,(\det \mathbf{F})\,(\mathbf{F}^{-1})^T\,\mathbf{n}_o \qquad (4.92)$$

Changements de surface et de volume dus aux déformations (suite)

22.2 Volume

Soient 03 éléments matériels $dX^{(1)}=dS_1e_1$, $dX^{(2)}=dS_2e_2$ et $dX^{(3)}=dS_3e_3$ de « X »
Le volume rectangulaire formé par $dX^{(1)}$, $dX^{(2)}$ et $dX^{(3)}$ au temps de référence « t_0 » est:

$$dV_o = dS_1\, dS_2\, dS_3 \qquad (4.93)$$

Dues aux déformations, ce volume sera transformé au temps « t » à:

$$\begin{aligned} dV &= \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)} \times \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(3)} = dS_1\, dS_2\, dS_3\, (\mathbf{Fe}_1 \cdot \mathbf{Fe}_2 \times \mathbf{Fe}_3) \\ &= dV_o\, (\mathbf{Fe}_1 \cdot \mathbf{Fe}_2 \times \mathbf{Fe}_3) \end{aligned} \qquad (4.94)$$

Ou bien

$$dV = (\det \mathbf{F})dV_o \qquad (4.95)$$

Ou bien

$$dV = \sqrt{\det\mathbf{C}}\, dV_o = \sqrt{\det\mathbf{B}}\, dV_o \qquad (4.96)$$

puisque $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ $\quad$ $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$

$$\det\mathbf{C} = \det\mathbf{B} = (\det\mathbf{F})^2$$

Merci. **Fin du chapitre 4**

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 5

Notions fondamentales de la MMC