Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 5

Notions fondamentales de la MMC

COURS 5 Mercredi 09.04.2008

1. Introduction - Rappels

1.1 Théorème de Green.

Soient P(x,y), $\delta P/\delta x$ et $\delta P/\delta y$ sont des fonctions continues en x et y dans une région fermée R limitée par une frontière fermée C .

Soit $n = n_x e_1 + n_y e_2$ la normale (vers l'extérieur) unitaire à C.

Le théorème de Green:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \int_C P\, dy = \int_C P\, n_x ds \qquad (5.1)$$

et

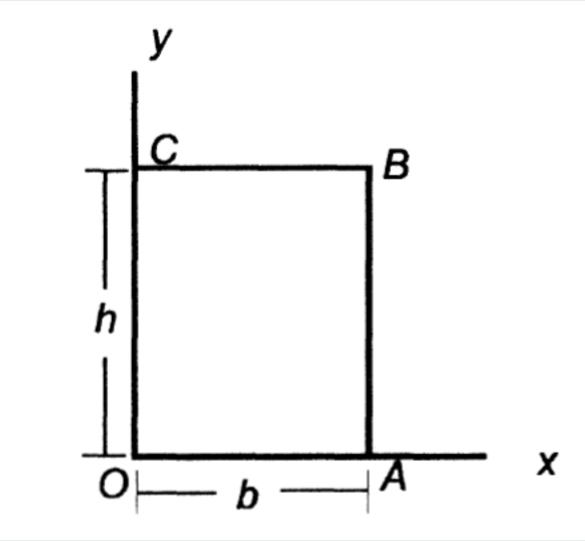
$$\int_R \frac{\partial P}{\partial y} dA = -\int_C P\, dx = \int_C P n_y ds \qquad (5.2)$$

Introduction – Rappels (suite)

Exemple

Pour la fonction $P(x,y) = x\,y^2$, évaluer $\int_C P(x,y)\,n_x\,ds$ le long du chemin fermé OABC de la figure.

Evaluer aussi $\int_R (\partial P/dx)\,dA$. comparer les résultats.



Solution

On a

$$\int_C P(x,y)\,n_x\,ds = \int_{OA} x(0)^2(0)\,ds + \int_{AB} by^2(1)\,dy + \int_{BC} xh^2(0)\,ds$$

$$+ \int_{CO} (0)y^2(-1)\,ds = \int_0^h by^2\,dy = \frac{bh^3}{3}$$

Aussi

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x}\,dA = \int_R y^2\,dA = \int_0^h y^2 b\,dy = \frac{bh^3}{3}$$

Alors

$$\int_C P n_x\,ds = \int_R \frac{\partial P}{\partial x}\,dA$$

1.2 Théorème de la divergence.

Soit un champ de vecteur $v=v_1(x,y)e_1 + v_2(x,y)e_2$. En appliquant le théorème de Green à v1 et v2 et en faisant la somme , on aura:

$$\int_C (v_1 n_1 + v_2 n_2) ds = \int_R \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dA \qquad (5.3)$$

En notation indicielle

$$\int_C v_i n_i ds = \int_R \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dA \qquad (5.4)$$

En notation invariante

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_R \operatorname{div} \mathbf{v} \, dA \qquad (5.5)$$

Introduction – Rappels (suite) Théorème de la divergence

On peut généraliser le théorème de la divergence.

Transformer une intégrale de surface en une intégrale de volume

$$\int_S v_i n_i dS = \int_R \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV \qquad (5.6)$$

En notation invariante

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_R \mathrm{div}\mathbf{v} dV \qquad (5.7)$$

Théorème de divergence ou bien théorème de Gauss

Plus spécifiquement pour un tenseur « T » de composantes « T_{ij} », on a:

$$\int_S T_{ij} n_j dS = \int_R \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \quad \text{Ou bien} \quad \int_S \mathbf{T}\mathbf{n} dS = \int_R \mathrm{div}\mathbf{T} dV \qquad (5.8)$$

1.3 Intégrales sur le volume de control et Intégrales sur le volume de matériel.

Considérons les pbs à 1-D: le mvt est défini par:

$$x = \hat{x}(X,t), \; y = Y, \; z = Z \qquad (5.9)$$

Et le champ de densité par:

$$\rho = \rho(x,t) \qquad (5.10)$$

L'intégrale:

$$m(t, x^{(1)}, x^{(2)}) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \rho(x,t) A\, dx \qquad (5.11)$$

Avec des valeurs fixes de $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ est appelée intégrale sur le volume de contrôle fixe.

Donne la masse totale au temps « t » du volume cylindrique fixe dans l'espace de section « A » constante et limitée par les faces $x=x^{(1)}$ et $x=x^{(2)}$.

Introduction – Rappels (suite) Intégrales

En passant par les coordonnées matérielles (Lagrange) $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ avec (au temps t) $x^{(1)} = \hat{x}(X^{(1)}, t)$ $x^{(2)} = \hat{x}(X^{(2)}, t)$

L'intégrale devient:

$$M(t, X^{(1)}, X^{(2)}) = \int_{\hat{x}(X^{(1)}, t)}^{\hat{x}(X^{(2)}, t)} \rho(x,t) A \, dx \qquad (5.12)$$

Où les limites de l'intégrale sont fonctions du temps.

C'est une intégrale sur le volume de matériel.

Donne la masse totale au temps « t » d'une partie du matériel qui coïncide à un instant « t » avec celui contenu dans la surface de frontière fixe décrite dans l'espace de section « A » constante et limitée par les faces $x=x^{(1)}$ et $x=x^{(2)}$.

Introduction – Rappels (suite) Intégrales

Au temps « t » les 02 intégrales sont les mêmes.

Par contre au temps « t+dt », elles ont des valeurs différentes. En fait:

$$\frac{\partial m}{\partial t} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \rho A dx\right]_{x^{(1)},x^{(2)}-\text{fixed}} \qquad (5.13)$$

Différente de:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{\hat{x}(X^{(1)},t)}^{\hat{x}(X^{(2)},t)} \rho(x,t) A dx\right]_{X^{(1)},X^{(2)}-\text{fixed}} \equiv \frac{D}{Dt}\int_{\hat{x}(X^{(1)},t)}^{\hat{x}(X^{(2)},t)} \rho(x,t) A dx \qquad (5.14)$$

1.4 Dérivée Particulaire (Théorème de transport de Reynolds)

Soit T(x,t) une fonction scalaire ou tenseur fonction de (x_1,x_2,x_3) et du temps (t). (ex: masse volumique ρ(x,t)…)

Et considérons une intégrale de « T » sur le volume matériel $V_m(t)$

$$\int_{V_m(t)} \mathbf{T}(\mathbf{x},t)\,dV$$

La dérivée particulaire de « T » (théorème de transport de Reynolds):

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_{m(t)}} \mathbf{T}(\mathbf{x},t)\,dV = \int_{V_c} \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,dV + \int_{S_c} \mathbf{T}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \qquad \textbf{(5.15)}$$

Ou bien

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_{m(t)}} \mathbf{T}(\mathbf{x},t)\,dV = \int_{V_c} \left(\frac{D\mathbf{T}}{Dt} + \mathbf{T}\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right) dV \qquad \textbf{(5.16)}$$

2. Cinématique des MC

2.1 Trajectoire.

Une trajectoire est le lieu d'un point matériel que l'on suit dans son mouvement. Les diverses trajectoires sont les courbes intégrales du système différentiel:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} = dt \qquad (5.17)$$

Sachant que les vitesses:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}; \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

Ces 03 équations donnent les « x_i » en fonction du temps et de 03 constantes « c_i » qui caractérisent la particule qui passe de X à x à l'instant « t ».

2.2 Lignes de courant.

Elles représentent à un « t » fixé les courbes enveloppes des vitesses (tangentes aux trajectoires). Elles sont obtenues en intégrant le système différentiel:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} \quad \text{pour } t = \text{cte} \qquad (5.18)$$

On en déduit par exemple

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_3, c_1', c_2', t) \\ x_2 &= f_2(x_3, c_1', c_2', t) \end{aligned} \qquad (5.19)$$

A un instant « t », en un point quelconque, il ne passe qu'une seule ligne de courant.

Cinématique des MC (Suite)

Exemple

Soit le mouvement plan d'un MC défini par le champ des vitesses

$V_1=\omega.x_2$ $V_2= - \omega.x_1 +a.\ \omega^2.t$ a, ω: Cte

1) Déterminer les lignes de courant et les trajectoires.

2) Calculer les composantes de l'accélération d'une particule quelconque en $f(x_1,x_2)$.

1) Lignes de courant

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)}=\frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)}=\frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} \quad \text{pour } t=cte$$

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2} \qquad \frac{dx_1}{\omega.x_2}=\frac{dx_2}{-\omega.x_1+a.\omega^2 t} \qquad dx_1\left(-\omega.x_1+a.\omega^2 t\right)=\omega.x_2 dx_2$$

Par intégration $\int \omega\left(x_1 dx_1+x_2 dx_2\right)=\int a.\omega^2 t.dx_1$ $\quad \frac{1}{2}\omega.\int d\left(x_1^2+x_2^2\right)=\int a.\omega^2 t.dx_1$

$$\omega.\left(x_1^2+x_2^2\right)=2a.\omega^2 t.x_1+Cte \qquad x_1^2+x_2^2-2a.\omega^2 t.x_1=Cte$$

Soit $\left(x_1-a.\omega.t\right)^2+x_2^2=Cte$ **Cercles concentriques**

Cinématique des MC (Suite)

Exemple

Trajectoires

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} = dt$$

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = dt \qquad \frac{dx_1}{\omega.x_2} = dt \quad \text{d'où} \quad \frac{dx_1}{dt} = \omega.x_2$$

et

$$\frac{dx_2}{v_2} = dt \quad \text{d'où} \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega.x_1 + a.\omega^2 t \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega.\frac{dx_1}{dt} + a.\omega^2$$

D'où

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2.x_2 + a.\omega^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2.x_2 = a.\omega^2$$

Éq. Diff. du 2nd ordre dont la solution sera:

$$x_2(t) = x_{2p}(t) + x_{2c}(t) = a + R\cos(\omega.t - \phi)$$

et

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega.x_2 = \omega.a + \omega.R\cos(\omega t - \phi) \qquad x_1(t) = a.t + R.\sin(\omega t - \phi) + cte$$

Cinématique des MC (Suite)

Exemple

2) Composantes d'accélération

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 + \omega.x_2.0 + \left(-\omega.x_1 + a.\omega^2 t\right).\omega$$

et

$$\gamma_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = a.\omega^2 + \left(\omega.x_2.(-\omega)\right) + \left(-\omega.x_1 + a.\omega^2 t\right).0$$

Ainsi:

$$\gamma_1 = -\omega^2.x_1 + a.\omega^3 t$$

$$\gamma_2 = a.\omega^2 - \omega^2.x_2$$

2.3 Mouvements stationnaires ou permanents.

Un champ de vitesse est stationnaire ou permanent si la vitesse en un point est indépendante du temps « t ».

i.e.

$$v_i(x_1, x_2, x_3)$$

Si le champ de vitesse est stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont confondues.

2.4 Lignes de rotation.

Si les composantes de la vitesse sont v_1, v_2 et v_3, on peut définir les composantes de la vitesse angulaire comme suit:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\ ;\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\ ;\ \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \qquad \textbf{(5.20)}$$

On peut aussi définir le vecteur Rotation ou bien tourbillon par:

$$\begin{aligned} 2.\omega &= 2.\omega_1.\overrightarrow{x_1} + 2.\omega_2.\overrightarrow{x_2} + 2.\omega_3.\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}(v) \\ 2.\omega &= \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \overrightarrow{x_i} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.21)}$$

On appelle ligne de rotation, toute ligne qui en chacun de ses points est tangente au vecteur « ω ».

Ces lignes se déterminent à partir du système différentiel:

$$\frac{dx_1}{\omega_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{\omega_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{\omega_3(x_1, x_2, x_3, t)} \qquad \textbf{(5.22)}$$

Cinématique des MC (Suite) Lignes de rotation.

Un mouvement est rotationnel lorsque les particules du milieu font une rotation d'un axe passant par un pôle choisi.

Si le mouvement est non rotationnel (irrotationnel), on aura:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right);\ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \qquad \textbf{(5.23)}$$

3. Cinétique des MC

La cinétique des MC est définie par l'équation de continuité ou bien équation de conservation de la masse.

3.1 Equation de continuité.

« Cette équation exprime que quelque soit la partie (D) d'un fluide que l'on suit dans son mouvement, sa masse reste constante lorsque le temps varie ».

Si on suit donc, un volume infinitésimal de matériau à travers son mouvement, son volume « dV » et sa densité « ρ » peuvent changer, mais sa masse totale «ρ.dV » restera constante.

Cette équation s'exprime par:

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho.\vec{V}\right) = 0 \qquad (5.24)$$

Ou bien:

$$\frac{D\rho(M,t)}{Dt} + \rho.\mathrm{div}\left(\vec{V}\right) = 0 \qquad (5.25)$$

Démonstration ?

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Démonstration 1.

La masse reste constante à tout temps, i.e.

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \rho(x,t)\,dV = 0 \qquad \textbf{(5.26)}$$

En utilisant le théorème de transport de Reynolds, on aura:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_{m(t)}} \mathbf{T}(\mathbf{x},t)\,dV = \int_{V_c} \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,dV + \int_{S_c} \mathbf{T}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS$$

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)\,dV = -\int_{S_c} \rho(v.n)\,dS$$

Ou bien:

$$\int_{V_c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\mathrm{div}(\rho.v)\right)dV = 0$$

Valable, quelque soit V_c, d'où:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\mathrm{div}(\rho.v)=0} \qquad \textbf{(5.27)}$$

Démonstration 1.

Equation qui peut aussi être écrite sous la forme:

$$\frac{D}{Dt}\rho(x,t)+\rho.\mathrm{div}(v)=0 \tag{5.28}$$

Sachant que:

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x_3}.\frac{\partial x_3}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_1.\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+v_2.\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+v_3.\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v.\mathrm{div}(\rho)$$

En coordonnées cylindriques, on aura:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=0 \tag{5.29}$$

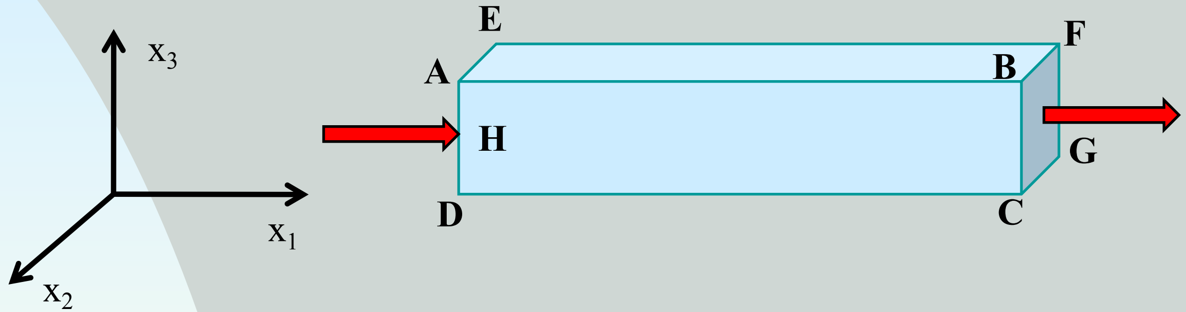
Et en coordonnées sphériques, on aura:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}=0 \tag{5.30}$$

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Démonstration 2.

En passant par un petit élément fluide dx_1, dx_2 et dx_3.



Le vecteur vitesse de ce petit élément sera: $v(v_1, v_2, v_3)$

Au bout d'un certain temps « dt » le volume du fluide qui rentre par la face ADEH sera:

$$v_1 dx_2 dx_3 dt$$

Sachant que

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}$$

La masse qui entre par ADEH, sera alors:

$$m_{ent} = \rho(x,t).v_1 dx_2 dx_3 dt$$

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Démonstration 2.

Et la masse qui sort par la face BCFG sera (en parcourant une distance dx_1):

$$m_{sort} = \left(\rho(x,t).v_1 + \frac{\partial(\rho(x,t).v_1)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dt$$

La différence des 02 masses, nous donne:

$$(m_{sort} - m_{ent})_{suivant\,dx_1} = \frac{\partial(\rho(x,t).v_1)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

De façon similaire, suivant dx_2 et dx_3, on aura:

$$(m_{sort} - m_{ent})_{suivant\,dx_2} = \frac{\partial(\rho(x,t).v_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

$$(m_{sort} - m_{ent})_{suivant\,dx_3} = \frac{\partial(\rho(x,t).v_3)}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

En faisant la somme, on aura:

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Démonstration 2.

En faisant la somme, on aura:

$$\left(m_{sort}-m_{ent}\right)=\left(\frac{\partial\left(\rho(x,t).v_1\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(\rho(x,t).v_2\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial\left(\rho(x,t).v_3\right)}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3dt \qquad \textbf{(5.31)}$$

Or, si la masse du volume de fluide considéré est égale à un instant « t »

$$m=\rho\, dx_1dx_2dx_3$$

Alors, du à l'accroissement de la fonction « ρ(x,t) » dans le temps, on a la diminution de la masse:

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}dx_1dx_2dx_3dt \qquad \textbf{(5.32)}$$

En égalisant (5.31) et (5.32), on aura:

$$\left(\frac{\partial\left(\rho(x,t).v_1\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(\rho(x,t).v_2\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial\left(\rho(x,t).v_3\right)}{\partial x_3}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Ou bien, finalement:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho(x,t).\vec{v}\right)=0 \qquad \textbf{(c.q.f.d)}$$

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Définition

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho(x,t).\vec{v}\right) = 0$$

La variation de masse contenue dans le domaine géométrique fixe est égale au flux de matière rentrant dans le domaine. Si la masse contenue dans ce domaine augmente (diminue) le flux sortant est négatif (positif): il ne se crée pas de matière; il n'en disparait pas non plus.

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Exemple 1.

Soit le mouvement défini par

$$x_1 = (1+t).X_1 \;;\; x_2 = X_2 \;;\; x_3 = X_3$$

Et le champ de densité par:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+t} \quad (\rho_0 : Cte)$$

i) Calculer le champ de vitesse

ii) Vérifier que l'équation de continuité est satisfaite.

iii) Calculer la masse totale et le taux de croissance de la masse à l'intérieur d'un volume de contrôle cylindrique dont la section transversale « A » et ayant aux ses extrémités les faces x_1=1 et x_1=3.

iv) Calculer le taux net de flux entrant de masse à l'intérieur du volume de (iii).

v) Trouver la masse totale au temps « t » de matériel qui au temps (t=0) était dans le volume de (iii)

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Exemple 1.

Soit le mouvement défini par

$$x_1 = (1+t).X_1 \ ; \ x_2 = X_2 \ ; \ x_3 = X_3$$

i) Champ de vitesse

$$v_1 = \frac{Dx_1}{Dt} = \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial X_3}{\partial t} =$$

$$= X_1 + 0 + 0 + 0 = X_1 = \frac{x_1}{1+t}$$

$$v_2 = 0 \quad \text{et} \quad v_3 = 0$$

ii) Equation de continuité

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \rho \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\rho_o}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)}(0) + \frac{\rho_o}{(1+t)^2} = 0$$

Equation vérifiée

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Exemple 1.

iii) La masse totale à l'intérieur du volume de contrôle au temps « t » est:

$$m(t) = \int_{V_c} \rho(x,t)dV = \int_{x_1=1}^{x_1=3} \rho(x,t)dV = \int_{x_1=1}^{x_1=3} \frac{\rho_o}{1+t} A dx_1 = \frac{2A\rho_o}{1+t}$$

Et le taux avec lequel la masse augmente à l'intérieur du volume à « t »:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{2A\rho_o}{(1+t)^2}$$

(i.e. la masse décroit)

iv) Puisque $v_2=v_3=0$, il n'ya pas de flux entrant ou sortant à travers la surface latérale du volume. Suivant la face $x_1=1$, le taux du flux entrant sera:

$$(\rho A v)_{x_1=1} = \frac{\rho_o A}{(1+t)^2}$$

Et le flux sortant sur la face $x_1=3$ sera:

$$(\rho A v)_{x_1=3} = \frac{3\rho_o A}{(1+t)^2}.$$

La différence nous donne le flux net de la masse:

$$-\frac{2\rho_o A}{(1+t)^2}$$

(idem que l'éq. Préc)

Cinétique des MC (Suite) Equation de continuité.

Exemple 1.

v) La particule au temps t=0, est en $x_1=1$ et $x_1=3$, aura les coordonnées matérielles à $X_1=1$ et $X_1=3$. D'où la masse totale au temps « t » sera:

$$M = \int_{x_1=(1+t)}^{x_1=3(1+t)} \frac{\rho_o}{1+t} A dx_1 = \frac{\rho_o A}{1+t}[3(1+t)-(1+t)] = 2\rho_o A$$

La masse totale est constante (ne dépend pas du temps) puisque les champs de vitesse et de densité choisis vérifient l'équation de continuité.

3.2 Milieux incompressibles.

Un milieu est incompressible si la masse volumique d'un point matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante.

Alors, sa dérivée par rapport au temps et par rapport aux coordonnées s'annule, et l'équation de continuité devient:

$$\mathrm{div}\left(\vec{v}\right) = 0 \tag{5.33}$$

Ou, en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

En coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Et en coordonnées sphériques:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r} = 0.$$

Cinétique des MC (Suite) Milieux incompressibles.

Exemple.

Soit le champ de vitesse défini par:

$$v_i = \frac{x_i}{(1+t)} \qquad i=1,\,2,\,3$$

Trouver la densité de la particule matérielle en fonction du temps.

L'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\operatorname{div}(\rho.v)=0$$

Ou bien

$$\frac{D}{Dt}\rho(x,t)+\rho.\operatorname{div}(v)=0$$

Soit:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\rho\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}\right] = -\frac{3\rho}{1+t}$$

D'où:

$$\int_{\rho_o}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -\int_o^t \frac{3dt}{1+t}$$

Ou bien

$$\rho = \frac{\rho_o}{(1+t)^3}$$

3.3 Equation de continuité en mouvements permanents (stationnaires).

Un mouvement est permanent (stationnaire) si toutes les grandeurs (cinématiques, cinétiques et dynamiques) caractérisant l'état du milieu exprimées à l'ordre des variables d'Euler (x_1, x_2, x_3 et t) sont indépendantes du temps.

D'où les dérivées par rapport au temps sont nulles.

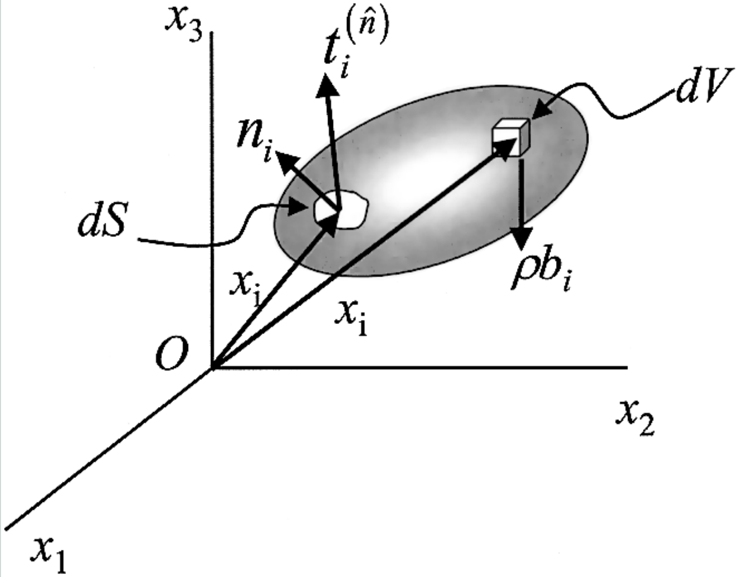
L'équation de continuité devient alors:

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\rho.\vec{v}\right) = 0} \qquad \textbf{(5.34)}$$

4. Dynamique des MC

La dynamique des MC fait intervenir la notion de forces.

4.1 Loi fondamentale de la dynamique.



Soit un milieu continu défini par son volume (D) et sa surface du contour (S) fermée.

Et soit:

$\gamma(M)$ **: l'accélération d'un point M de (D).**

f(M) : densité de forces extérieures s'exerçant sur (D).

La loi fondamentale de la dynamique se traduit

Par les 02 égalités suivantes:

∑Forces

$$\int_D \gamma.dm = \iiint_D f(M).dV + \iint_S t(M,\vec{n}).dS \qquad \textbf{(5.35)}$$

∑Moments

$$\int_D (OM \wedge \gamma).dm = \iiint_D (OM \wedge f(M)).dV + \iint_S \left(OM \wedge t(M,\vec{n})\right).dS$$

dm: masse élémentaire (dm=ρ.dV)

dV: volume élémentaire et (dS) surface élémentaire

Dynamique des MC (Suite) Loi fondamentale de la dynamique

t(M,n) est égale à la force de surface, qui par les équations de conditions aux limites est égale à

$$T_{ij} n_j = t_i$$

En transformant les intégrales en intégration par rapport au volume, on aura:

$$\int_D \gamma.dm = \iiint_D f(M).dV + \iint_S T.\vec{n}.dS$$

Or d'après le théorème de la divergence, on aura:

$$\iint_S T.\vec{n}.dS = \iint_S T_{ij}.n_j.dS = \iiint_D \left(T_{ij}\right)_{,j} dV$$

D'où

$$\int_D \gamma.dm = \iiint_D \rho.\gamma.dV = \iiint_D f(M).dV + \iiint_D \left(T_{ij,j}\right) dV \qquad \textbf{(5.36)}$$

Equation valable quelque soit le volume (dV), d'où:

$$\rho.\gamma_i = f_i + T_{ij,j} \qquad \textbf{(5.37)}$$

Dynamique des MC (Suite) Loi fondamentale de la dynamique

Or, l'accélération est exprimée par:

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}$$

Et l'équation (5.37) devient:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}\right) = f_i + T_{ij,j} \qquad \textbf{(5.38)}$$

C'est l'équation fondamentale de la dynamique

4.2 Théorème de la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement est la quantité égale en général à la masse d'un système matériel multipliée par la vitesse de son mouvement.

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i dV \qquad (5.39)$$

La loi fondamentale de la dynamique peut être exprimée par le théorème de la quantité de mouvement.

« La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement est égale à la somme des forces extérieures. »

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_c} \mathbf{t}\, dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{B} dV \qquad (5.40)$$

En utilisant le théorème de Reynolds (5.15) et (5.16) (dérivée particulaire), on aura:

$$\int_{S_c} \mathbf{t} dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{B} dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) dS \qquad (5.41)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on aura:

$$\iint_S \rho.v.(v.n)\, dS = \iiint_V \left(\rho.v_i v_j\right)_{,j} dV$$

Enfin, sachant que « ρ.B=f(M) » et que t=T.n, on aura:

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho.v).dV + \iint_S (\rho.v).v.n.dS = \iiint_D f(M).dV + \iiint_D \left(T_{ij,j}\right).dV$$

En coordonnées cartésiennes, on aura:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho.v_i) + \left(\rho.v_i v_j\right)_{,j} = f_i + T_{ij,j} \qquad \textbf{(5.42)}$$

C'est l'équation fondamentale de la conservation de la quantité de mouvement.

5. Lois de comportement ou lois contraintes-déformations des MC

Le comportement des matériaux diffère d’un matériau à un autre. Le métal est différent du bois, l’eau est différent de l’huile…

Les équations disponibles ne sont pas suffisantes pour résoudre complètement un problème donné. Il faut d’autres équations, données généralement par la loi de comportement du matériau.

D’où le champ de contraintes au temps « t » dépend de toute l’histoire de la déformation et symétriquement.

Ces équations appelées lois de comportement ou bien lois contraintes-déformations sont des lois mathématiques schématisant le comportement mécanique du matériau.

On distingue, alors les fluides des solides.

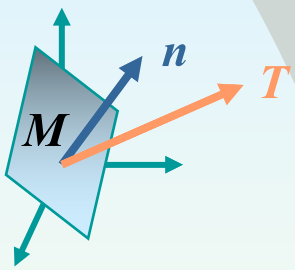
Contraintes et Déformations

Description de l'État Mécanique Local

Contraintes | Déformations

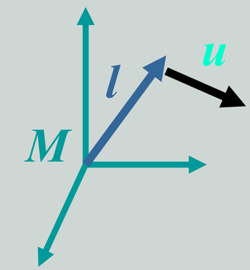
Définition

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M)\,\vec{n} \qquad\qquad \vec{u}(M,\vec{l}) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M)\,\vec{l}$$



Symétrie

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad\qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$



Loi Fondamentale de la Dynamique

$$\mathrm{Div_D}\,\overline{\overline{\sigma}} + \rho\vec{X} = \rho\vec{\gamma}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_j = \rho\gamma_i$$

Conditions aux limites

$$\overline{\overline{\sigma}}(M)\,\vec{n} = \vec{f}(M)$$

$$2\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\vec{u} + {}^{t}\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\vec{u}$$

$$\frac{dV}{V} = \mathrm{Tr}(\varepsilon) = \mathrm{Div}\,\vec{u}$$

Conservation de la Masse : Continuité

$$\mathrm{Inc}\,(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \mathrm{Rot_D}(\mathrm{Rot_G}\,\overline{\overline{\varepsilon}}) = \overline{\overline{0}}$$

$$[\mathrm{Inc}\,(\overline{\overline{\varepsilon}})]_{rl} = \delta_{rmi}\delta_{lkj}\,\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_m\,\partial x_k}$$

Description Indépendante du Comportement du Matériau

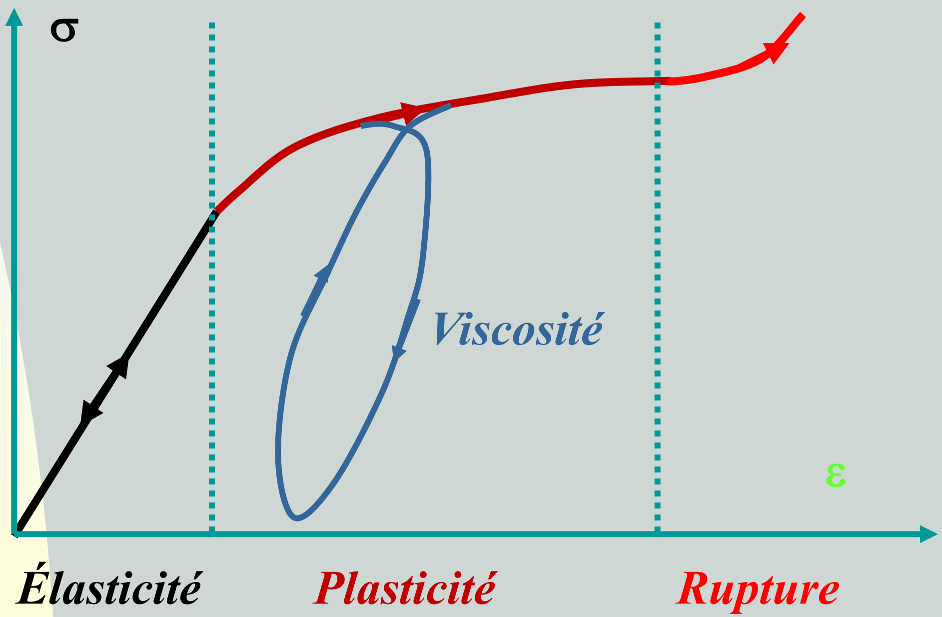
Lois de Comportement

Équation d’État du Matériau

Déformations $\qquad \mathcal{F}\left\{\bar{\varepsilon}, \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}, \bar{\sigma}, \frac{d\bar{\sigma}}{dt}\right\} = 0 \qquad$ Contraintes

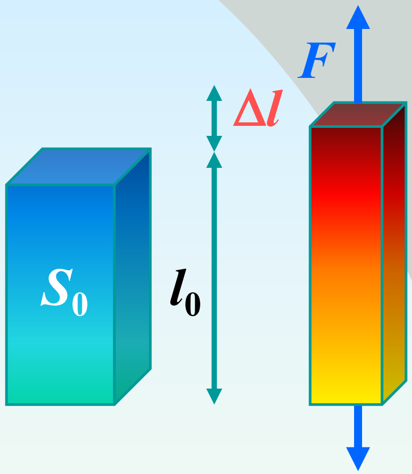
$\Downarrow$

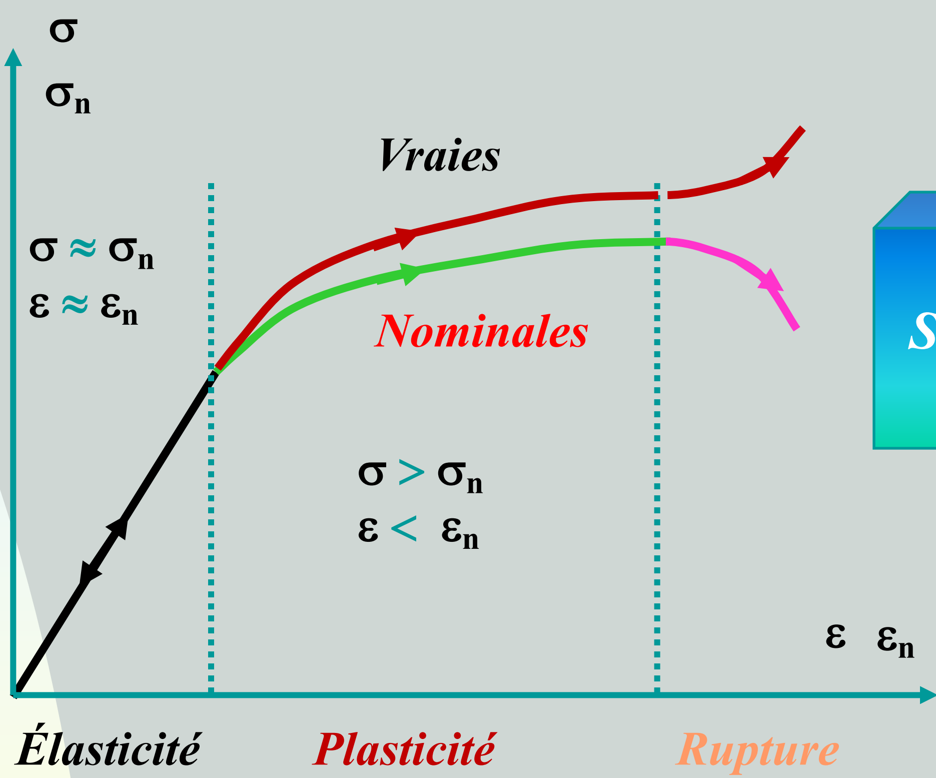
Solution du Problème

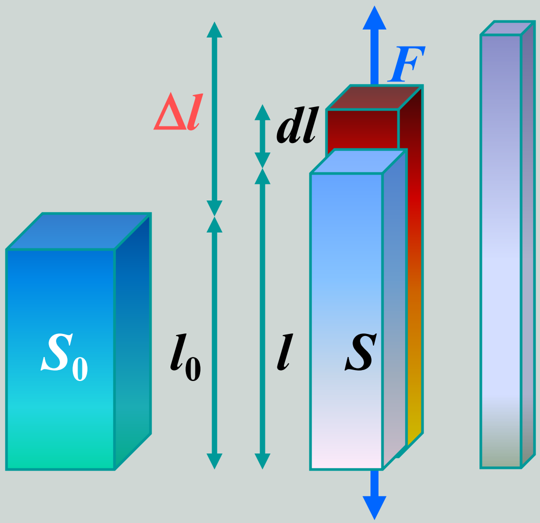


Description du Comportement du Matériau

σ et ε Nominales et Naturelles







Nominales

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Naturelles ou Vraies

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_0+\Delta l} \frac{dl}{l} = \mathrm{Ln}\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right) = \mathrm{Ln}(1+\varepsilon_n)$$

La Loi de Comportement du Matériau relie ε et σ Vraies

Lois de comportement (suite)

5.1 Fluides.

Un fluide se distingue du solide par le fait:

- ✓**Le solide a une forme propre, le fluide n'en a pas.**
- ✓**Le solide résiste à un cisaillement, le fluide n'y résiste pas, i.e. s'écoule sous l'effet d'un cisaillement.**
- ✓**Le tenseur des contraintes est sphérique dans un fluide au repos, il peut être qlq pour le solide.**

Dans les fluides, il ya les liquides et les gaz.

Les liquides sont faiblement compressibles et ne remplissent pas tout l'espace offert; alors que les gaz sont compressibles et emplissent tout l'espace offert.

Pour les fluides, l'état de déformation est caractérisée par le tenseur des taux (vitesses) de déformation.

La loi de comportement des fluides traduit une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation.

Lois de comportement (suite) Fluides.

Les 02 aspects principaux du comportement d'un fluide sont la compressibilité et la viscosité.

i) Compressibilité: il s'agit de mesurer la variation « ΔV » du volume « V » occupé par une certaine quantité de fluide lorsque la pression varie de «ΔP ».

Le coefficient de compressibilité à température constante est :

$$\chi = -\frac{1}{V}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta P}$$

ii) Viscosité: Elle ne concerne qu'un fluide en mouvement. Les contraintes de viscosité s'opposent aux glissements relatifs des particules fluides et sont nulles au repos.

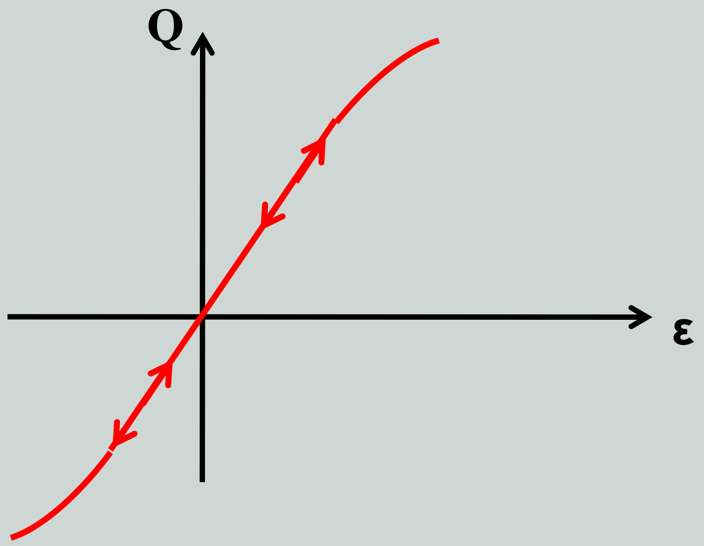
Dans certains cas, on peut négliger les effets de la viscosité, on dit que le fluide est parfait.

Lois de comportement (suite)

5.2 Milieux élastiques.

Un comportement est élastique lorsque la courbe effort-déformation est la même en chargement et en déchargement.

L'histoire du chargement n'intervient pas.

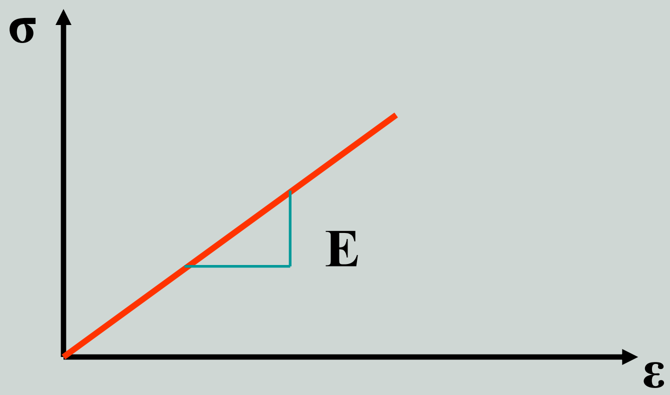


Mathématiquement, dans un tel état, à un état de contrainte correspond une déformation et une seule, autrement dit la relation Q=f(ε) est bijective.

Elasticité linéaire: C'est le modèle le plus utilisé en raison de sa simplicité et des approximations satisfaisantes auxquelles il conduit surtout pour des contraintes pas trop élevées.

Dans ce cas les contraintes sont linéairement reliées aux déformations.

Ce comportement a été découvert par Hooke en 1660.



Elasticité classique: Si, en plus de l'élasticité, on suppose que le milieu est aussi homogène et isotrope, on dit qu'il s'agit de l'élasticité classique.

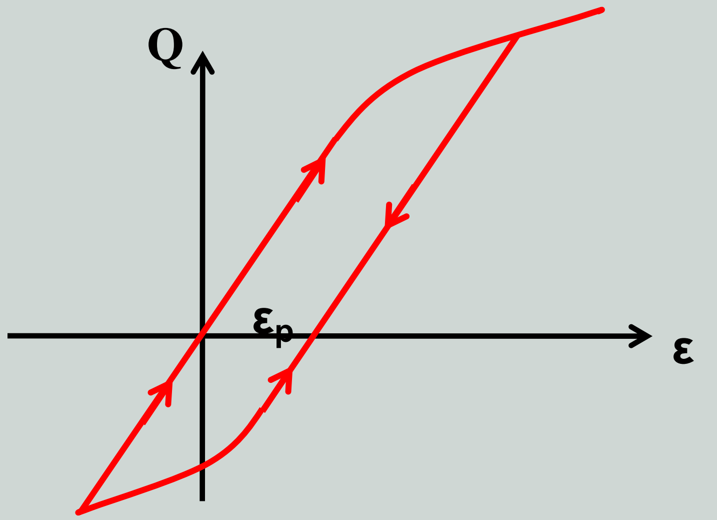
L'homogénéité implique que les lois contraintes-déformations sont les mêmes en tout point du milieu, et l'isotropie implique qu'il n'ya pas de direction privilégiée du point de vue mécanique.

Lois de comportement (suite)

5.3 Milieux plastiques.

Dans l'étude de certains milieux (surtout solides) on observe que la courbe de déchargement est différente de celle du chargement. La transformation n'est pas réversible; le comportement est inélastique.

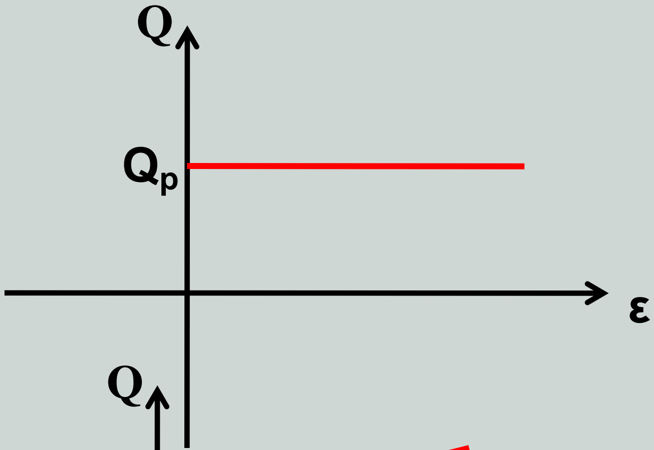
Après déchargement, on a une déformation «ε_p » dite permanente ou bien plastique.



Dans ces milieux, on distingue:

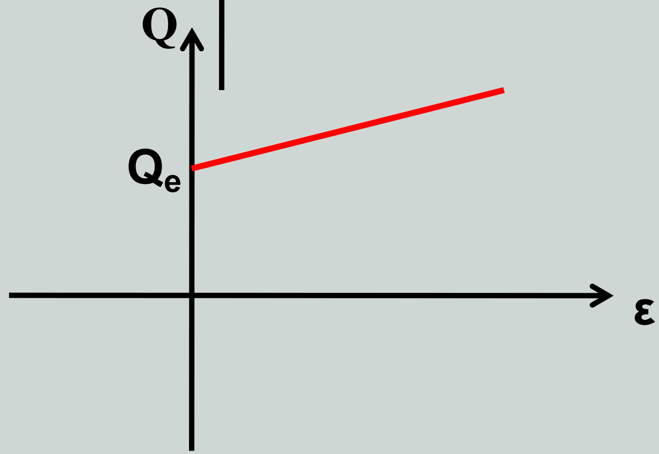
Lois de comportement (suite) Milieux plastiques

i) Milieux plastiques parfaits: (ou rigides plastiques parfaits) dans lesquels les déformations élastiques sont négligées devant les déformations plastiques et que la contrainte est constante quand la déformation augmente (i.e. l'écrouissage est nul).

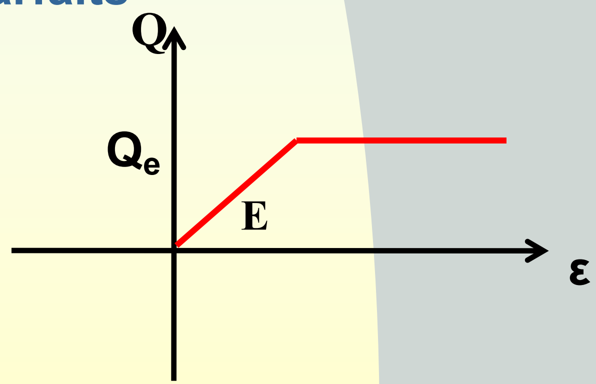


ii) Milieux rigides plastiques écrouis: dans lesquels la contrainte augmente linéairement avec la déformation.

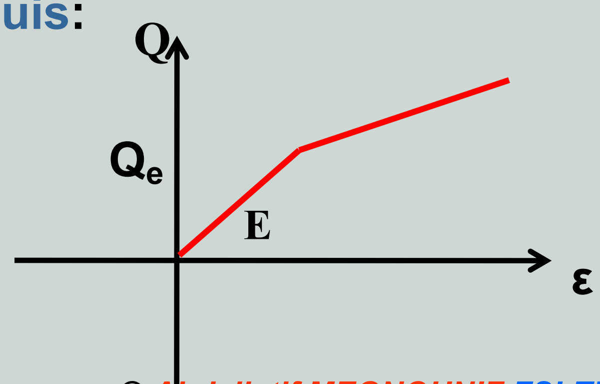
Q_e: limite d'élasticité



iii) Milieux élasto-plastiques parfaits



iv) Milieux élasto-plastiques écrouis:



Lois de comportement (suite)

5.4 Milieux visqueux.

La vitesse de déformation intervient souvent dans les fluides, mais aussi dans certains solides à très haute température ou à long terme.

Un comportement est dit purement visqueux s'il existe une relation bijective entre le taux (la vitesse) de déformation et la contrainte associé.

La viscosité est dite linéaire ou Newtonienne lorsque la relation est linéaire.

$$\sigma = \eta . \dot{\varepsilon}$$

Le comportement est inélastique.

La viscosité pure ne se rencontre que dans les fluides.

Dans les solides, la viscosité est combinée avec l'élasticité et/ou la plasticité.

Merci. Fin du chapitre 5

Mécanique des Milieux Continus

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 6

Equations générales de l'élasticité classique

COURS 6 **Mercredi 11.04.2007**