

# *Mécanique des Milieux Continus*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Chap. 6**

## **Equations générales de l'élasticité**

**COURS 6 Jeudi 29.04.2010**

© **Abdellatif MEGNOUNIF** FSI-Tlemcen

# 1. Introduction

**La cinématique des MC nous a donné les déformations et la description de l'état de contraintes nous adonné les contraintes.**

**Le principe de conservation de la masse, de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement sont valides pour tous les milieux continus.**

**Aucune mention n'est faite à la nature du matériau avant.**

**Ces équations sont insuffisantes pour décrire complètement la réponse d'un matériau spécifique due à un certain chargement.**

**Par expérience, sous les mêmes conditions de chargement, l'acier ne se déforme pas comme le béton, l'eau ne s'écoule pas comme l'huile...**

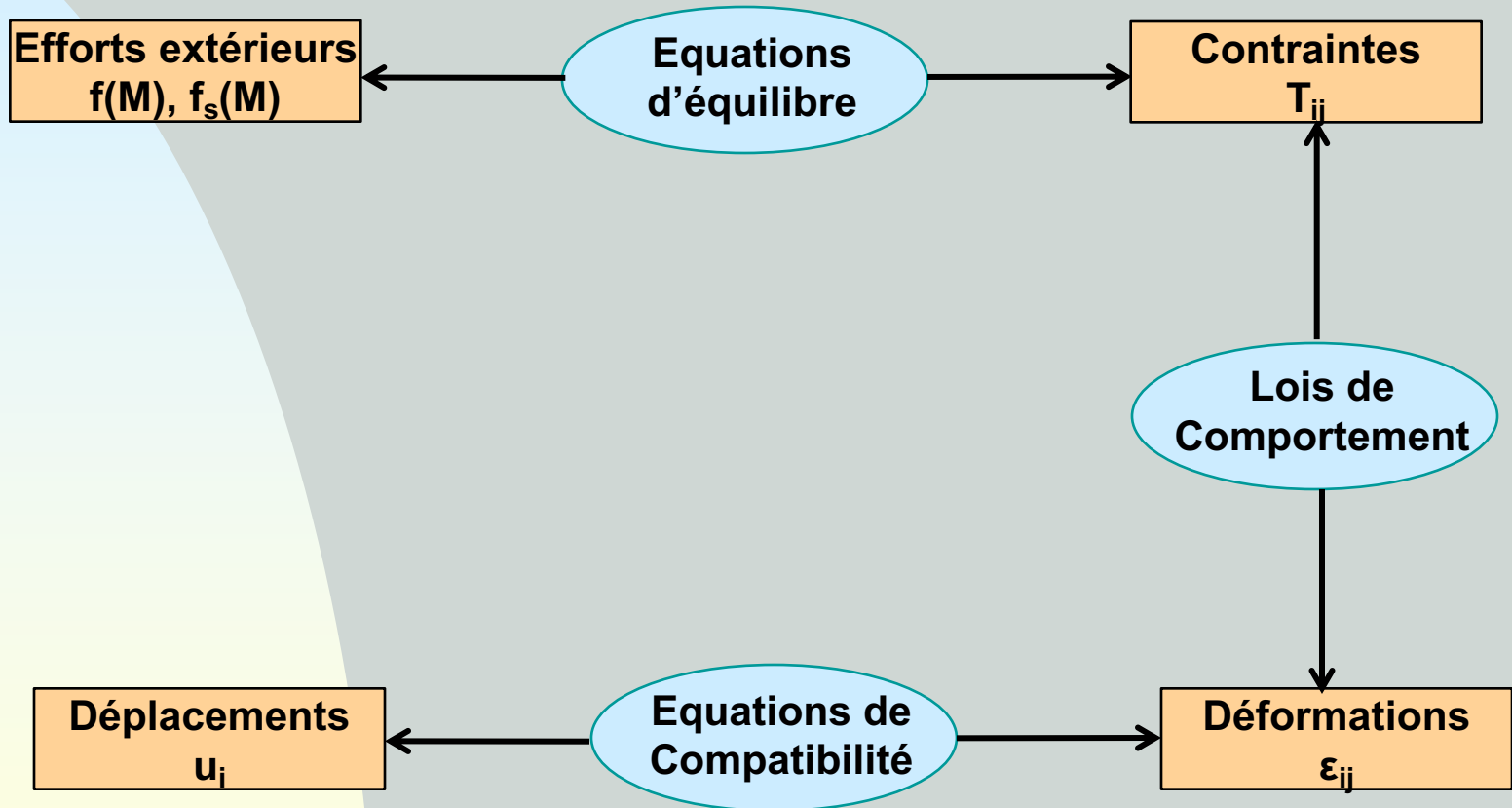
**Aussi, en fonction des conditions de chargement, le matériau peut se déformer différemment.**

**En nombres d'équations, il ya manque pour pouvoir résoudre un problème de MMC.**

**Les équations manquantes doivent être fournies par les lois de comportement ou la relation contraintes-déformations.**

# Introduction (suite)

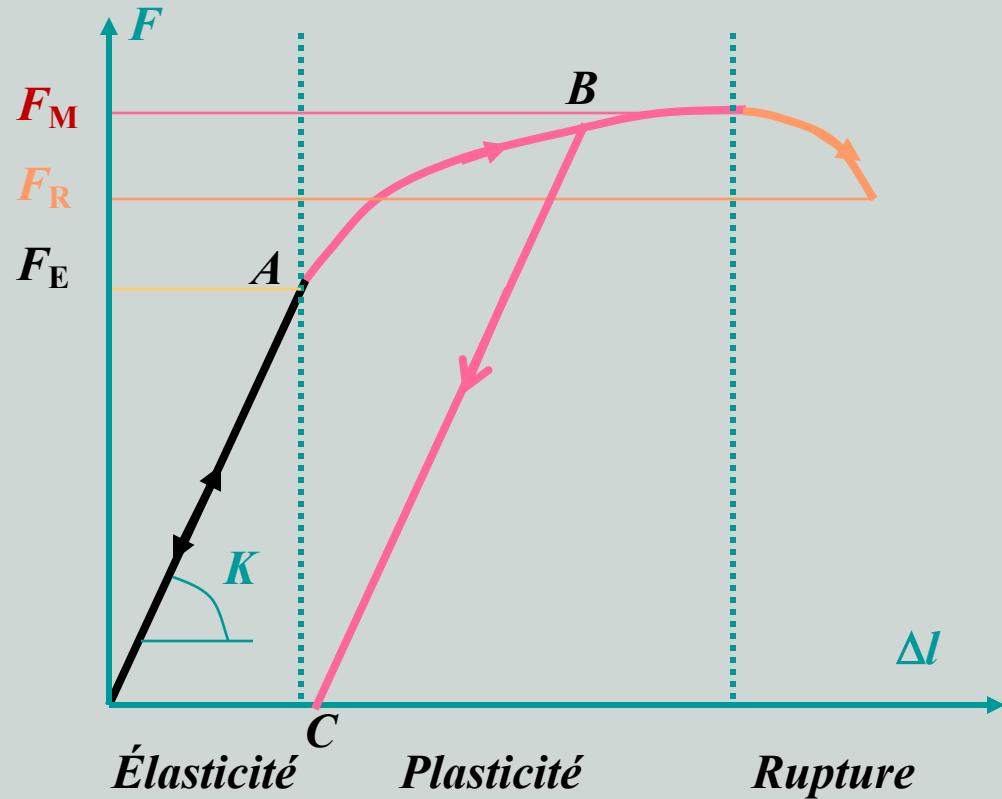
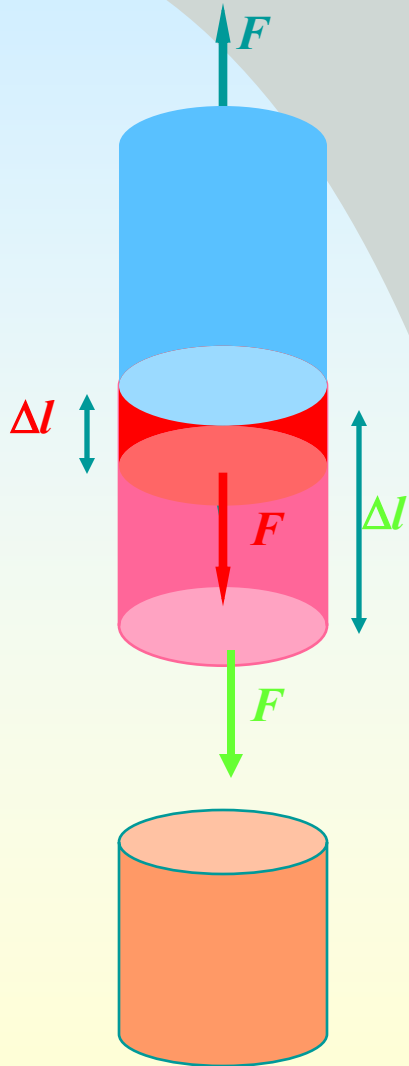
## Schématiquement



# 2. Comportement d'une Structure

Propriétés mécaniques

Essai de traction



Rigidité de la Structure  $F=K\Delta l$

## Comportement d'une structure (suite)

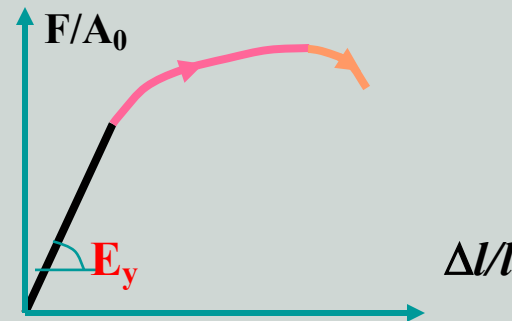
La ligne OA, région de proportionnalité. Si on enlève le chargement, la déformation revient sur son chemin initial. C'est la phase élastique.

Si on charge au-delà de A, la déformation prend un chemin différent que celui du chargement. Il ya une élongation permanente OC.

En appliquant encore un chargement du point C, le comportement est élastique de même pente OA, mais avec une augmentation de la limite de proportionnalité. On dit que le matériau a un travail d'écrouissage.

La figure représentée dépend de la section transversale et de la longueur du spécimen. Pour avoir un diagramme indépendant des variables, on trace la variation de la contrainte «  $\sigma = F/A_0$  » en fonction de la déformation «  $\epsilon = \Delta l/l$  ».

$E_y$ : module d'élasticité =  $\sigma/\epsilon$



## 2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Pour ce type de matériau, on a:

- ✓ La relation entre la charge appliquée et la quantité mesurant la déformation est linéaire.
- ✓ Le taux de l'application de la charge n'a pas d'effet.
- ✓ Si la charge est retirée complètement, la déformation s'annule.
- ✓ Les déformations ont très petites.

Dans ce cas, les composantes «  $T_{ij}$  » du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires et homogènes des composantes de déformation «  $\epsilon_{ij}$  ».

$$T_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (6.1)$$

$C_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre « 4 », appelée **tenseur d'élasticité**.

Pour un corps homogène,  $C_{ijkl}$  sont constants.

On peut montrer que pour un matériau élastique, isotrope le tenseur  $C_{ijkl}$  est symétrique.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (6.2)$$

## Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Soient les tenseurs d'ordre « 4 » suivants:

$$\begin{aligned}A_{ijkl} &\equiv \delta_{ij} \delta_{kl} \\B_{ijkl} &\equiv \delta_{ik} \delta_{jl} \\H_{ijkl} &\equiv \delta_{il} \delta_{jk}\end{aligned}\tag{6.3}$$

N'importe quel tenseur isotropique d'ordre « 4 » peut être exprimé par la combinaison des 03 tenseurs. Soit

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}\tag{6.4}$$

$\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

Avec ceci, on aura (éq. 6.1):

$$T_{ij} = (\lambda.A_{ijkl} + \alpha.B_{ijkl} + \beta.H_{ijkl}).\varepsilon_{kl}$$

## Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Or:

$$\begin{aligned}A_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} \cdot \varepsilon_{kl} = \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} = \delta_{ij} \cdot e \\B_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} &= \delta_{ik} \delta_{jl} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij} \\H_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} &= \delta_{il} \delta_{jk} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}\end{aligned} \tag{6.5}$$

Alors:

$$T_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} = \lambda \cdot e \cdot \delta_{ij} + (\alpha + \beta) \cdot \varepsilon_{ij} \tag{6.6}$$

Ou bien

$$T_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} = \lambda \cdot e \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} \tag{6.7}$$

$$T = \lambda \cdot e \cdot I + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \tag{6.8}$$

**e**: est la dilatation volumique  $= \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

**λ** et **μ** sont appelées les constantes de Lamé.



## Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Sous la forme matricielle, on aura:

Alors:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

En inversant l'équation (6.7), on aura:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} T_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \delta_{ij} T_{kk} \quad (6.10)$$

Avec  $T_{kk} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ .

## Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Equation qui peut s'écrire encore sous la forme:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} T_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} T_{kk} \quad (6.11)$$

# 3. Interprétation des Coefficients d'élasticité

## 3.1 Tenseur des contraintes purement normales.

Un tenseur est sphérique si les  $T_{ij}=0$  sauf pour  $i=j$ .

Or pour  $i \neq j$ ,  $T_{ij}=2.\mu.\varepsilon_{ij}$  avec  $T_{ij}=0$  on aura  $\varepsilon_{ij} = 0$ .

Ainsi si le tenseur des contraintes est sphérique, le tenseur des déformations est aussi sphérique.

$$T_{ii} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{ii}$$

D'où:

$$T_{11} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{11}$$

$$T_{22} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{22}$$

$$T_{33} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{33}$$

## Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

En faisant la somme, on aura:

$$T_{kk} = (3.\lambda + 2.\mu).\varepsilon_{kk} \quad (6.12)$$

Le coefficient de compression  $k = \frac{(3.\lambda + 2.\mu)}{3}$  est appelé module de rigidité à la (Bulk modulus)

### 3.2 Tenseur de cisaillement simple.

Un tenseur de cisaillement simple est un tenseur qui a toutes les composantes  $T_{ij}=0$  sauf lorsque  $(i,j)$  désigne une permutation des indices du plan de glissement considéré.

Exemple plan  $x_1x_2$ , on a  $T_{12} \neq 0$  et  $T_{21} \neq 0$ .

Pour  $i=j$ , on a

$$T_{ii} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{ii}$$

Pour  $i \neq j$ , on a

$$T_{ij} = 2.\mu.\varepsilon_{ij}$$

## Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

Ainsi 
$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = (3.\lambda + 2.\mu).\varepsilon_{kk} = 0 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_{kk} = 0$$

D'où 
$$T_{11} = 2.\mu.\varepsilon_{11} = 0 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_{11} = 0$$

De même pour  $T_{22}$  et  $T_{33}$ .

Seul  $T_{12} = 2.\mu.\varepsilon_{12} \neq 0$  d'où  $\varepsilon_{12} \neq 0$ .

Si le tenseur des contraintes est un **cisaillement simple**, le tenseur des déformations est aussi un tenseur de **glissement simple**.

### 3.3 Tenseur des contraintes uniaxiales.

Un tenseur est uniaxial si toutes les composantes sont nulles, sauf une seul qui sera normale. (Ex suivant  $Ox_1$ , il n'y a que  $T_{11}$ ).

D'où: 
$$T_{11} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{11}$$

Or: 
$$T_{kk} = T_{11} = (3.\lambda + 2.\mu).\varepsilon_{kk}$$

D'où, en inversant

$$\varepsilon_{kk} = \frac{T_{11}}{(3.\lambda + 2.\mu)}$$

## Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

D'où

$$T_{11} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{11} = \lambda \cdot \left( \frac{T_{11}}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{11}$$

En inversant, on aura:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} \cdot T_{11}$$

De même, on aura:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} \cdot T_{11}$$

Ainsi, un tenseur de contrainte uniaxial ne donne pas forcément un tenseur de déformation uniaxial.

### 3.4 Relations entre $E, \nu$ et $\lambda, \mu$ .

On a vu que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} T_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} T_{kk} \quad \text{et}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} T_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \delta_{ij} T_{kk}$$

Par identification

## Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

Par identification

$$\frac{1 + \nu}{E_y} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{E_y} = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}$$

Ou bien

$$\mu = \frac{E_y}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E_y}{(1 + \nu)(1 - 2 \cdot \nu)}$$
$$E_y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

(6.13)

**Les constantes de Lamé, le module de Young, le module de cisaillement, le coefficient de Poisson et le module de rigidité à la compression sont tous interreliés. Seulement 02 d'entre eux sont indépendants pour un solide isotrope élastique linéaire.**

**Le tableau suivant résume ces différentes relations.**

## Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

Conversion des constantes pour un matériau élastique isotrope.

	$\lambda, \mu$	$E_Y, \nu$	$\mu, \nu$	$E_Y, \mu$	$k, \nu$
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\nu E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\mu(E_Y-2\mu)}{3\mu-E_Y}$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$
$\mu$	$\mu$	$\frac{E_Y}{2(1+\nu)}$	$\mu$	$\mu$	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$
$k$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E_Y}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu E_Y}{3(3\mu-E_Y)}$	$k$
$E_Y$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$E_Y$	$2\mu(1+\nu)$	$E_Y$	$3k(1-2\nu)$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\nu$	$\nu$	$\frac{E_Y}{2\mu} - 1$	$\nu$

# 4. Relation entre tenseurs déviatoriques de contrainte et de déformation

On a

$$\mathbf{T} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon$$

Or chaque tenseur peut être décomposé en:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_D \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_D$$

D'où:

$$\mathbf{T} = \lambda \cdot [(\varepsilon_{kk})_s + (\varepsilon_{kk})_D] + 2 \cdot \mu \cdot [(\varepsilon)_s + (\varepsilon)_D]$$

$$\mathbf{T}_s + \mathbf{T}_D = [\lambda \cdot (\varepsilon_{kk})_s + 2 \cdot \mu \cdot (\varepsilon)_s] + 2 \cdot \mu \cdot [(\varepsilon)_D]$$

Or, un tenseur sphérique de contraintes donne un tenseur sphérique de déformation. D'où

$$\mathbf{T}_s = [\lambda \cdot (\varepsilon_{kk})_s + 2 \cdot \mu \cdot (\varepsilon)_s]$$

Par identification, on aura:

$$\mathbf{T}_D = 2 \cdot \mu \cdot [(\varepsilon)_D]$$

$$(\varepsilon)_D = \frac{1}{2\mu} \mathbf{T}_D = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{T}_D$$

(6.14)



# 5. Equations d'élasticité en déplacements.

## Equation de Lamé Clapeyron.

C'est une méthode de résolution directe valable principalement pour les problèmes de type I. On résoud le problème isostatique en termes de déplacements. Il est donc utile de faire appel à des équations ne faisant intervenir que les déplacements.

Les équations de Lamé Clapeyron sont obtenues par exprimer les équations d'équilibre en déplacements, en faisant intervenir les équations de compatibilité et de Hooke.

On a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

et

$$T_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot e + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot e + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})$$

D'où

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial e}{\partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot e_{,j} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ji})$$

(6.15)

## Equations d'élasticité en déplacements. Equation de Lamé Clapeyron. (Suite)

Or on a:

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}_j} \cdot \delta_{ij} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}_i}$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_j} \right) = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}_i}$$

Donc l'équation d'équilibre (3.26)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

$$\mathbf{T}_{ij,j} + \mathbf{f}_{vi} = \rho \mathbf{a}_i \quad \text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f}_v = \rho \mathbf{a}$$

devient

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_o B_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6.16)$$

## Equations d'élasticité en déplacements. Equation de Lamé Clapeyron. (Suite)

Pour  $i=1, 2$  et  $3$ , on aura:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \rho_0 B_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_1} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \rho_0 B_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \rho_0 B_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_3} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3$$

avec

$$e = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{u}$$

Finalement, en forme invariant, on a les équations de Lamé Clapeyron

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{B} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \text{div } \nabla \mathbf{u} \quad (6.17)$$

Ou bien

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) u_{j,j} + \mu u_{i,jj} + f_{vi} \quad (6.18)$$

# 6. Equations d'élasticité en déplacements.

## Coordonnées Cylindriques.

La loi de Hooke en coordonnées cylindriques sera:

$$\begin{aligned}T_{rr} &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\T_{\theta\theta} &= \lambda e + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\T_{zz} &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\T_{r\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = T_{\theta r} \\T_{\theta z} &= \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) = T_{z\theta} \\T_{zr} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = T_{rz}\end{aligned} \tag{6.19}$$

et

avec

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{6.20}$$

## Coordonnées Cylindriques.

Les équations de Navier en coordonnées cylindriques seront:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \rho_0 B_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right] \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \rho_0 B_\theta + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \rho_0 B_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]\end{aligned}\tag{6.21}$$

# 7. Equations d'élasticité en déplacements.

## Coordonnées Sphériques.

La loi de Hooke en coordonnées sphériques sera:

$$T_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$T_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$T_{\phi\phi} = \lambda e + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \right)$$

$$T_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

(6.22)

et

$$T_{\theta\phi} = \mu \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right)$$

$$T_{\phi r} = \mu \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right)$$

avec

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r}$$

(6.23)

# Coordonnées Sphériques.

Les équations de Navier en coordonnées sphériques seront:

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_o B_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_o B_\theta + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial t^2} = \rho_o B_\phi + \frac{\lambda + \mu}{r \sin \theta} \frac{\partial e}{\partial \phi} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$$

(6.24)

# 8. Equations d'élasticité en contraintes.

## Equations de Beltrami-Michell.

C'est une méthode de résolution directe valable surtout pour les problèmes de type II. Il est indiqué de faire appel à des équations ne faisant intervenir que les composantes  $T_{ij}$  du tenseur de contraintes.

Les équations de mouvement sont généralement insuffisantes. Une fois les contraintes connues, il faut que ça donne des déformations par le biais des équations de Hooke et que ces déformations puissent donner des déplacements par compatibilité.

Dans ce cas, il faut exprimer la combinaison des 03 types d'équations en contraintes.

$$\nabla T_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot [f_{k,k} \cdot \delta_{ij} + (f_{i,j} + f_{j,i})] = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot [a_{k,k} \cdot \delta_{ij} + (a_{i,j} + a_{j,i})] \quad (6.25)$$

Avec:  $\theta = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

Si les forces de volume sont constantes ou négligées, et qu'on est en état statique l'équation devient

$$\nabla T_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} = 0 \quad (6.26)$$



## Equations d'élasticité en contraintes. (Suite)

### Démonstration

On a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} T_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} T_{kk}$$

En considérant, l'équation de compatibilité, on a:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

La 1<sup>ère</sup> s'écrira

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2.\varepsilon_{12,12}$$

En remplaçant, on aura:

$$(1+\nu).[T_{11,22} + T_{22,11}] - \nu(\theta_{,11} + \theta_{,22}) = 2(1+\nu).T_{12,12} \quad (6.27)$$

Il faut calculer  $T_{12,12}$  à partir des équations d'équilibre.

$$T_{ij,j} + f_{vi} = \rho a_i$$

## Equations d'élasticité en contraintes. (Suite)

### Démonstration

On dérive la 1<sup>ère</sup> % à  $x_1$ , la 2<sup>ème</sup> % à  $x_2$  et la 3<sup>ème</sup> % à  $x_3$ , on aura:

$$T_{11,11} + T_{12,12} + T_{13,13} + f_{v1,1} = \rho a_{1,1} \quad (\text{i})$$

$$T_{12,12} + T_{22,22} + T_{23,23} + f_{v2,2} = \rho a_{2,2} \quad (\text{ii})$$

$$T_{13,13} + T_{23,23} + T_{33,33} + f_{v3,3} = \rho a_{3,3} \quad (\text{iii})$$

En faisant (i) + (ii) - (iii) on aura:

$$2.T_{12,12} = (\rho_0 . a_{1,1} + \rho_0 . a_{2,2} - \rho_0 . a_{3,3}) - [T_{11,11} + T_{22,22} - T_{33,33}] - (f_{v1,1} + f_{v2,2} - f_{v3,3})$$

En remplaçant dans (6.27), on aura:

(6.28)

$$(1 + \nu) [\nabla \theta - \theta_{,33} - \nabla T_{33}] - \nu [\nabla \theta - \theta_{,33}] = (1 + \nu) (\rho_0 . a_{1,1} + \rho_0 . a_{2,2} - \rho_0 . a_{3,3}) - (1 + \nu) (f_{v1,1} + f_{v2,2} - f_{v3,3})$$

## Equations d'élasticité en contraintes. (Suite)

### Démonstration

De façon similaire pour les 02 autres équations, on aura:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) [\nabla\theta - \theta_{,11} - \nabla T_{11}] - \nu [\nabla\theta - \theta_{,11}] &= \\ (1 + \nu) (-\rho_0 \cdot a_{1,1} + \rho_0 \cdot a_{2,2} + \rho_0 \cdot a_{3,3}) - (1 + \nu) (-f_{\nu 1,1} + f_{\nu 2,2} + f_{\nu 3,3}) & \\ (1 + \nu) [\nabla\theta - \theta_{,22} - \nabla T_{22}] - \nu [\nabla\theta - \theta_{,22}] &= \\ (1 + \nu) (\rho_0 \cdot a_{1,1} - \rho_0 \cdot a_{2,2} + \rho_0 \cdot a_{3,3}) - (1 + \nu) (f_{\nu 1,1} - f_{\nu 2,2} + f_{\nu 3,3}) & \end{aligned}$$

(6.29)

En faisant la somme des 03 équations, on aura::

$$\nabla\theta = \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) [(\rho_0 \cdot a_{1,1} + \rho_0 \cdot a_{2,2} + \rho_0 \cdot a_{3,3}) - (f_{\nu 1,1} + f_{\nu 2,2} + f_{\nu 3,3})]$$

En remplaçant dans (6.28) et (6.29) on aura:

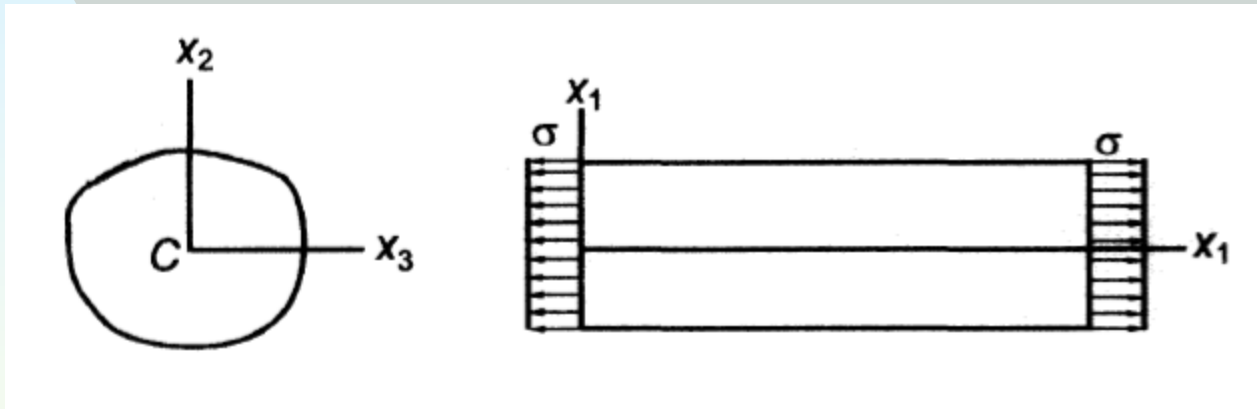
(6.30)

$$\nabla T_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} \theta_{,ij} + \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot [f_{k,k} \cdot \delta_{ij} + (f_{i,j} + f_{j,i})] = \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot [a_{k,k} \cdot \delta_{ij} + (a_{i,j} + a_{j,i})]$$

# 9. Applications.

## 9.1 Extension simple

On considère une barre cylindrique de section transversale quelconque soumise à une traction normale «  $\sigma$  » uniformément distribuée sur les faces extrêmes. Sa surface latérale n'est pas chargée (forces de surface et de volume).



Par expérience, la distribution des contraintes est la même quelque soit la section choisie suivant «  $x_1$  ».

Sachant que sur les faces  $x_1=0$  et  $x_1=l$ , les conditions aux limites sont:  $T_{11}=\sigma$ ,  $T_{21}=T_{31}=0$  et sur les plans  $x_2=a$ ,  $T_{12}=T_{22}=T_{32}=0$ , la distribution la plus probable le long de la barre sera:

$$T_{11} = \sigma, \quad T_{22} = T_{23} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$$

## Applications. (Suite) Extension simple

On doit montrer que:

- i) Les équations d'équilibre sont satisfaites
- ii) Toutes les conditions aux limites sont satisfaites
- iii) Il existe un champ de déplacement qui correspond au champ de contraintes supposé.

i) Toutes les composantes de contraintes sont constantes et les forces de volume sont négligées, d'où les équations d'équilibre sont satisfaites.

ii) Les conditions aux limites sur

La surface latérale

$$\mathbf{n} = 0\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$$

Et

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} = n_2(\mathbf{T}\mathbf{e}_2) + n_3(\mathbf{T}\mathbf{e}_3) = n_2(\mathbf{0}) + n_3(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

La condition de non chargement de la surface latérale est vérifiée.

## Applications. (Suite) Extension simple

D'après la loi de Hooke, on a:

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} [T_{11} - \nu (T_{22} + T_{33})] = \frac{\sigma}{E_Y}$$

$$E_{22} = \frac{1}{E_Y} [T_{22} - \nu (T_{33} + T_{11})] = -\nu \frac{\sigma}{E_Y}$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_Y} [T_{33} - \nu (T_{11} + T_{22})] = -\nu \frac{\sigma}{E_Y}$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Les composantes de déformation sont constantes, d'où les équations de compatibilité sont vérifiées.

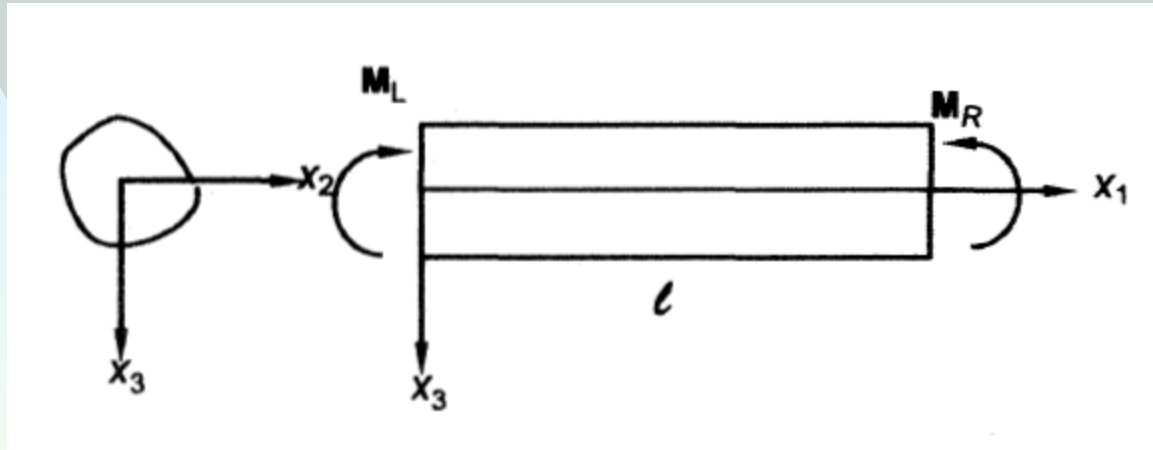
Par intégration, le champ de déplacement sera:

$$u_1 = \left( \frac{\sigma}{E_Y} \right) x_1, \quad u_2 = -\left( \nu \frac{\sigma}{E_Y} \right) x_2, \quad u_3 = -\left( \nu \frac{\sigma}{E_Y} \right) x_3$$

## Applications. (Suite)

### 9.2 Flexion pure d'une poutre

On considère une barre cylindrique de section transversale quelconque en flexion simple ou pure.



On cherche un état de contrainte qui correspond à une surface latérale non soumise à la traction et une certaine distribution de traction normale sur les faces extrémités qui seront statiquement équivalents aux couples de flexion  $M_R = M_2 e_2 + M_3 e_3$  et  $M_L = -M_R$ .

En s'appuyant sur le cas de l'extension simple, on peut supposer que seule  $T_{11}$  est différent de zéro et qu'elle est fonction de «  $x_1$  ».

## Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Pour satisfaire l'équilibre, on a:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{D'où} \quad T_{11} = T_{11}(x_2, x_3).$$

Par la loi de Hooke, on aura les déformations

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} T_{11}, \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{\nu}{E_Y} T_{11},$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Il faut vérifier les équations de compatibilité (les contraintes ont été supposées)

$$\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Ces équations sont vérifiées uniquement pour

$$T_{11} = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_3$$



## Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Vérifions les conditions aux limites.

Sur la surface latérale pas de chargement.

Sur la face «  $x_1=l$  », on aura:

$$\mathbf{t} = T\mathbf{e}_1 = T_{11} \mathbf{e}_1$$

Qui donnera le système de force résultant suivant

$$R_1 = \int T_{11} dA = \alpha \int dA + \beta \int x_2 dA + \gamma \int x_3 dA = \alpha A$$

$$R_2 = R_3 = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int x_3 T_{11} dA = \alpha \int x_3 dA + \beta \int x_2 x_3 dA + \gamma \int x_3^2 dA \\ &= \beta I_{23} + \gamma I_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\int x_2 T_{11} dA = -\alpha \int x_2 dA - \beta \int x_2^2 dA - \gamma \int x_2 x_3 dA \\ &= -\beta I_{33} - \gamma I_{23} \end{aligned}$$

Avec «  $A$  » section transversale et  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  et  $I_{23}$  sont des moments d'inertie.

Sur la face «  $x_1=0$  », on aura un système de force opposé.

## Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Par conditions aux limites, il n'ya pas de charge axiale aux extrémités, d'où:  $R_1=0$ , ce qui donne  $\alpha=0$ .

De plus, on suppose que les axes  $x_2$  et  $x_3$  coïncident avec les axes principaux, d'où  $I_{23}=0$ . Dans ce cas, on aura:

$$\beta = -\frac{M_3}{I_{33}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{M_2}{I_{22}}$$

Ainsi, la distribution de la contrainte pour la barre cylindrique sera:

$$T_{11} = \frac{M_2}{I_{22}} x_3 - \frac{M_3}{I_{33}} x_2$$

Et les autres  $T_{ij}=0$ .

Supposons que  $M_3=0$  (simplicité) et considérons les déformations.

$$E_{11} = \frac{M_2}{I_{22} E_Y} x_3, \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{\nu M_2}{I_{22} E_Y} x_3$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

## Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Puisque les déformations vérifient les équations de compatibilité, on peut les intégrer pour trouver les déplacements:

$$u_1 = \frac{M_2}{E_Y I_{22}} x_1 x_3 - \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4$$

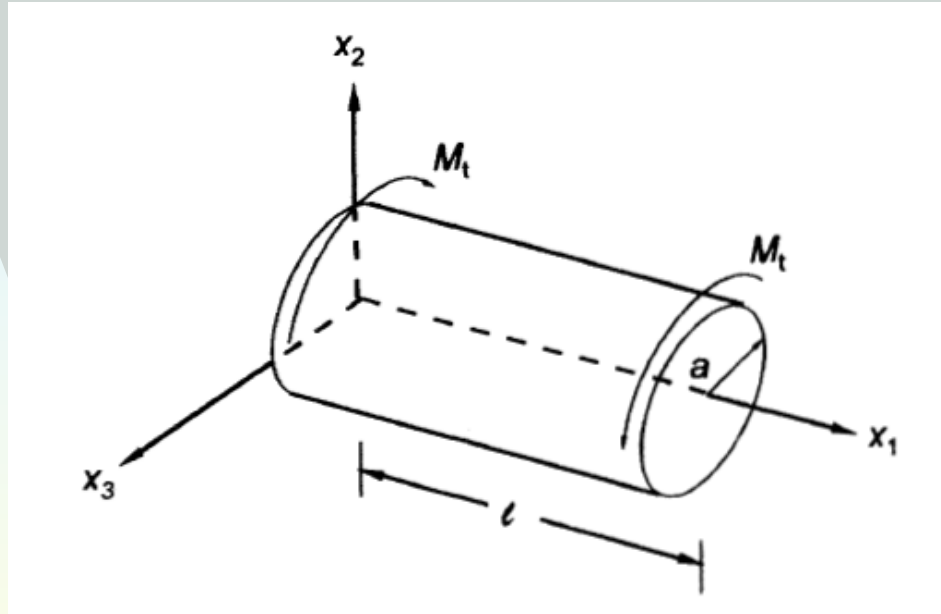
$$u_2 = -\nu \frac{M_2}{E_Y I_{22}} x_2 x_3 + \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 + \alpha_5$$

$$u_3 = -\frac{M_2}{2E_Y I_{22}} [x_1^2 - \nu (x_2^2 - x_3^2)] - \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_6$$

Les «  $\alpha_i$  » sont des constantes d'intégration obtenues par les conditions aux limites sur le déplacement.

### 9.3 Torsion d'un cylindre à section circulaire

On considère un cylindre à section circulaire de rayon «  $a$  » et de longueur «  $l$  » soumis à des moments de torsion aux extrémités.



Par symétrie du problème, le mouvement de chaque plan de section transversale est une rotation de corps rigide autour de l'axe «  $x_1$  ».

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Si on considère «  $\theta$  » un angle de rotation petit, le champ de déplacement associé sera:

$$\mathbf{u} = (\theta \mathbf{e}_1) \times \mathbf{r} = (\theta \mathbf{e}_1) \times (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) = \theta (x_2 \mathbf{e}_3 - x_3 \mathbf{e}_2)$$

Ou bien:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\theta x_3, \quad u_3 = \theta x_2$$

Avec:  $\theta = \theta(x_1)$

En intégrant le vecteur déplacement, on obtient les déformations:

$$E_{12} = E_{21} = -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

Et les contraintes seront:

$$T_{12} = T_{21} = -\mu x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

$$T_{13} = T_{31} = \mu x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Avec cette distribution de contraintes, il reste à vérifier les équations d'équilibre. Soit (en négligeant les forces de volume)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Qui donne:

$$-\mu x_3 \left( \frac{d^2 \theta}{d x_1^2} \right) = 0$$

$$+\mu x_2 \left( \frac{d^2 \theta}{d x_1^2} \right) = 0$$

Par intégration, on a:

$$\frac{d \theta}{d x_1} \equiv \theta' = \text{constant.}$$

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

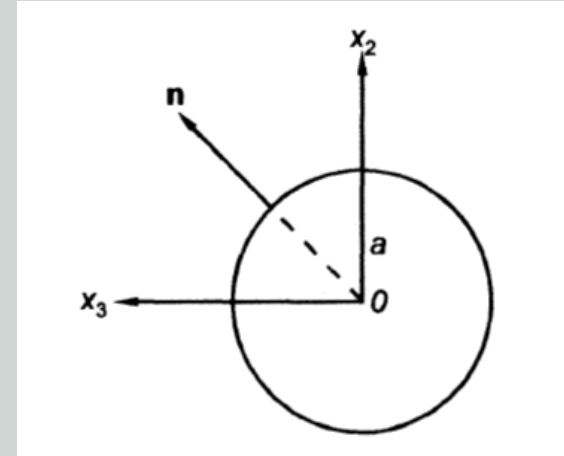
Vérifions maintenant les conditions aux limites.

Sur la surface latérale, on aura le vecteur normal:

$$\mathbf{n} = (1/a)(x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3).$$

Donc sur la surface latérale, on aura:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{n}] = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ T_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} x_2 T_{12} + x_3 T_{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



En remplaçant les composantes de contraintes trouvées, on aura:

$$\mathbf{t} = \frac{\mu}{a} (-x_2 x_3 \theta' + x_2 x_3 \theta') \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Résultat vrai, puisqu'il n'y a que des moments de torsion, pas de force de traction aux extrémités.

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Sur la face «  $x_1=l$  », on aura le vecteur normal

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$$

D'où

$$\mathbf{t} = T\mathbf{e}_1 = T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3$$

La distribution de la traction de surface sur l'extrémité donne:

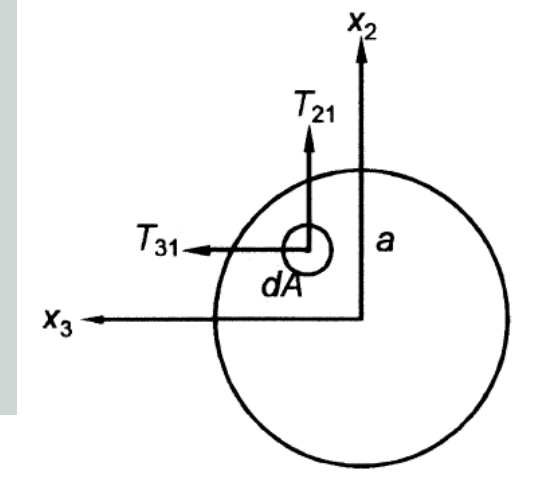
$$R_1 = \int T_{11} dA = 0$$

$$R_2 = \int T_{21} dA = -\mu \theta' \int x_3 dA = 0$$

$$R_3 = \int T_{31} dA = \mu \theta' \int x_2 dA = 0$$

$$M_1 = \int (x_2 T_{31} - x_3 T_{21}) dA = \mu \theta' \int (x_2^2 + x_3^2) dA = \mu \theta' I_p$$

$$M_2 = M_3 = 0$$



Avec  $I_p = \pi \cdot a^4 / 2$  le moment d'inertie polaire.

De plus,  $\int x_2 dA = \int x_3 dA = 0$  puisque la surface est symétrique % aux axes.



# 10. Problèmes plans.

## 10.1 Déformation plane

Un corps est en déformation plane si la composante de déplacement axiale est nulle et les autres composantes de déplacement ne dépendent pas de la coordonnée axiale. Soit par exemple:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0 \quad (6.31)$$

Les déformations correspondantes seront:

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad E_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (6.32)$$
$$E_{13} = E_{23} = E_{33} = 0$$

Et les contraintes non nulles seront:  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{22}$  et  $T_{33}$  avec;

$$T_{33} = \nu(T_{11} + T_{22}) \quad (6.33)$$

Si on néglige les forces de volume, les équations d'équilibre seront:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = 0.$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = 0$$

## Problèmes plans. (suite) Déformation plane

On peut facilement vérifier que pour n'importe quelle fonction scalaire «  $\varphi$  », la solution du système est du type:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad (6.34)$$

Mais les contraintes obtenues par cette solution doivent donner des déformations qui vérifieront les équations de compatibilité.

Dans ce cas la loi de Hooke nous donne:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{E_Y} [(1 - \nu^2)T_{11} - \nu(1 + \nu)T_{22}] = \frac{1}{E_Y} [(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \nu(1 + \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}] \\ E_{22} &= \frac{1}{E_Y} [(1 - \nu^2)T_{22} - \nu(1 + \nu)T_{11}] = \frac{1}{E_Y} [(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \nu(1 + \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}] \\ E_{12} &= \frac{1}{E_Y} (1 + \nu)T_{12} = -\frac{1}{E_Y} (1 + \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ E_{13} &= E_{23} = E_{33} = 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

## Problèmes plans. (suite) Déformation plane

En remplaçant dans la seule équation de compatibilité:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

On aura:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (6.36)$$

$\varphi(x_1, x_2)$  est appelée fonction de contraintes **d'Airy**.

**Rem:** Si la force de volume existe, il suffit juste d'ajouter une solution particulière à la solution (6.34).

### 10.2 Contrainte plane

Dans ce cas, les contraintes  $T_{ij}$  sont indépendantes de  $x_3$  (par exemple) et on a:

$$T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0$$

On en déduit que les déformations seront:

$$E_{13} = E_{23} = 0 \quad \text{Et} \quad E_{33} (\lambda + 2\mu) + \lambda (E_{11} + E_{22}) = 0 \quad (6.37)$$

Toutes les composantes de déformation  $E_{ij}$  sont indépendantes de  $x_3$  mais le champ de déplacement n'est pas en général un champ plan.

Le problème de contrainte plane revient à résoudre la même équation biharmonique que celle de la déformation plane pour déterminer la distribution des contraintes.

# 11. Solides élastiques anisotropiques Linéaires.

## 11.1 Plan de symétrie du matériau.

On suppose  $S_1$  le plan dont la normale est dans la direction de  $e_1$ . La transformation:

$$e_1' = -e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 \quad (6.38)$$

Décrit une réflexion par rapport au plan  $S_1$ .

On peut écrire cette transformation sous la forme

$$e_i' = Qe_i \quad (6.39)$$

Où:

$$[Q] = [Q_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Si les relations constitutives d'un matériau, écrites dans la base  $\{e_i\}$ , restent les mêmes sous la transformation  $[Q_1]$ , le plan  $S_1$  est un **plan de symétrie du matériau**.

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (suite) Plan de symétrie du matériau.

Pour un matériau élastique linéaire, on doit avoir:

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl} \quad (6.41)$$

Avec:

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad \text{et} \quad T'_{ij} = C'_{ijkl} E'_{kl}$$

Lorsqu'on transforme

$$e'_i = Qe_i$$

Et (éq 2.37, chapitre 2)

$$[T]' = [Q]^T [T] [Q] \quad \text{et} \quad [T] = [Q] [T]' [Q]^T \quad (6.42)$$

Avec ces transformations on peut réduire le nombre de paramètres indépendants.

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite)

### 11.2 Solides élastiques linéaires anisotropiques monocliniques.

Si un matériau élastique linéaire a un seul plan de symétrie, on l'appelle un matériau monoclinique.

Pour ce type de matériau, il existe **13** coefficients d'élasticité indépendants.

Supposons  $e_1$  normale au plan de symétrie du matériau  $S_1$ . Alors on par définition:

$$e_1' = -e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3$$

Et:

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$

Avec:

$$[Q] = [Q_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = -1, \quad Q_{22} = Q_{33} = 1.$$

Les autres  $Q_{ij}$  sont nulles

Et (chapitre 2)

$$C'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} \cdot C_{mnrs} \quad (6.43)$$

D'où

$$C_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} \cdot C_{mnrs} \quad (6.44)$$

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite) **anisotropiques monocliniques**

Alors:

$$C_{1112} = Q_{11} Q_{11} Q_{11} Q_{22} C_{1112} + 0 + 0 \dots = (-1)(-1)(-1)(+1) C_{1112} = -C_{1112}$$

D'où:

$$C_{1112} = 0$$

De même, on peut montrer que:

$$C_{1112} = C_{1113} = C_{1222} = C_{1223} = C_{1233} = C_{1322} = C_{1323} = C_{1333} = 0$$

Il ne reste finalement que **13** coefficients. Les relations seront:

$$T_{11} = C_{1111} E_{11} + C_{1122} E_{22} + C_{1133} E_{33} + 2C_{1123} E_{23}$$

$$T_{22} = C_{1122} E_{11} + C_{2222} E_{22} + C_{2233} E_{33} + 2C_{2223} E_{23}$$

$$T_{33} = C_{1133} E_{11} + C_{2233} E_{22} + C_{3333} E_{33} + 2C_{2333} E_{23}$$

$$T_{23} = C_{1123} E_{11} + C_{2223} E_{22} + C_{2333} E_{33} + 2C_{2323} E_{23}$$

$$T_{31} = 2C_{1213} E_{12} + 2C_{1313} E_{13}$$

$$T_{12} = 2C_{1212} E_{12} + 2C_{1213} E_{13}$$

(6.45)



## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite) **anisotropiques monocliniques**

Ou bien:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{2333} & 0 & 0 \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{2333} & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1213} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

En notation condensée, on peut écrire la matrice suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

**[C]** doit être une matrice positive définie i.e. tous les éléments diagonaux positifs, le déterminant de C positif et la matrice inverse  $S=C^{-1}$  existe et aussi symétrique positif définie.

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite)

### 11.3 Solides élastiques linéaires orthotropiques.

Si un matériau élastique linéaire a **02 plans de symétrie** mutuellement perpendiculaires, plan  $S_1$  avec une normale unitaire  $e_1$  et plan  $S_2$  avec une normale  $e_2$  (le 3<sup>ème</sup> plan  $S_3$  de normale  $e_3$  est aussi plan de symétrie), on l'appelle un **matériau orthotropique**.

Dans ce cas, pour les solides, les coefficients  $C_{ijkl}$  doivent rester invariants par rapport aux 02 transformations données par:

$$e_1' = -e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 \quad \text{et} \quad e_1' = e_1, \quad e_2' = -e_2, \quad e_3' = e_3. \quad (6.48)$$

Le cas de la 1<sup>ère</sup> symétrie on l'a traité et on a défini les coefficients du système (6.46).

Donc en plus, due à la 2<sup>ème</sup> symétrie on aura:

$$C_{1123} = C_{2223} = C_{2333} = C_{1213} = 0 \quad (6.49)$$

Il nous reste finalement que **09** coefficients.

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite) orthotropiques

Les relations pour un matériau élastique orthotrope sont:

$$\begin{aligned}T_{11} &= C_{1111} E_{11} + C_{1122} E_{22} + C_{1133} E_{33} \\T_{22} &= C_{1122} E_{11} + C_{2222} E_{22} + C_{2233} E_{33} \\T_{33} &= C_{1133} E_{11} + C_{2233} E_{22} + C_{3333} E_{33} \\T_{12} &= 2C_{1212} E_{12} \\T_{31} &= 2C_{1313} E_{31} \\T_{23} &= 2C_{2323} E_{23}\end{aligned}\tag{6.50}$$

Ou bien en forme condensée

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}\tag{6.51}$$

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite)

### 11.3 Matériaux élastiques linéaires transversalement isotropiques.

S'il existe un plan (ex  $S_3$ ) de façon à ce que chaque plan perpendiculaire à  $S_3$  est un plan de symétrie du matériau, alors le matériau est appelé matériau transversalement isotropique.

Le plan  $S_3$  est appelé plan d'isotropie et sa direction normale  $e_3$  est l'axe d'isotropie transversale.

Un matériau transversalement isotropique est aussi orthotropique.

Supposons  $S_\beta$  un plan de normale  $e'_1$  parallèle au plan  $S_3$  et faisant un angle « $\beta$  » avec l'axe  $e_1$  appartenant au plan  $S_3$ .

Alors, pour chaque valeur de « $\beta$  », le plan  $S_\beta$  est par définition un plan de symétrie.

Alors on :

$$\begin{aligned}e_1' &= \cos\beta e_1 + \sin\beta e_2 \\e_2' &= -\sin\beta e_1 + \cos\beta e_2 \\e_3' &= e_3\end{aligned}\tag{6.52}$$

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite) transversalement isotropiques

Avec cette transformation.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

On doit avoir:

$$C'_{1113} = C'_{1223} = C'_{1322} = C'_{1333} = 0 \quad (i)$$

et

$$C'_{1112} = C'_{1222} = C'_{1233} = C'_{1323} = 0 \quad (ii)$$

Les 1<sup>ère</sup> relations sont automatiquement vérifiées, tandis que les 2<sup>ème</sup> conduisent à des relations supplémentaires.

Prenons le cas  $C'_{1323} = 0$ , alors

$$C'_{1323} = Q_{11} Q_{12} C_{1313} + Q_{21} Q_{22} C_{2323} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \beta \sin \beta (C_{1313} - C_{2323}) = 0$$

Conduisant à

$$C_{1313} = C_{2323}$$

## Solides élastiques anisotropiques Linéaires. (Suite) transversalement isotropiques

De même pour les autres coefficients. On obtient finalement **05** coefficients indépendants et les relations finales seront:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)(C_{1111}-C_{1122}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}$$

(6.54)

Ou bien

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}$$

(6.55)

# 12. Résumé des différentes constantes d'ingénieur pour les différents matériaux.

## 12.1 Matériau élastique isotrope.

Pour ce type de matériau, la relation contrainte-déformation peut être inversée pour obtenir (02 paramètres indépendants):

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Avec

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.57)$$

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite) **élastique isotrope**

La matrice étant définie positive, alors les termes de la diagonale sont positifs. D'où:

$$E > 0, G > 0$$
$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} = \frac{1}{E^2} (1 - \nu^2) > 0, \text{ i.e., } \nu^2 < 1 \quad (6.58)$$

et

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} = \frac{1}{E^3} (1 - 2\nu^3 - 3\nu^2) = \frac{1}{E^3} (1 - 2\nu)(1 + \nu)^2 > 0 \quad (6.59)$$

i.e.

$$\nu < \frac{1}{2}$$

Alors:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (6.60)$$



## Résumé des constantes d'ingénieur (suite).

### 12.2 Matériau élastique transversalement isotrope.

Pour ce type de matériau, la relation contrainte-déformation peut être inversée pour obtenir (**05** paramètres indépendants):

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Avec

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{21})} \quad (6.62)$$

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite). élastique transversalement isotrope

Et, comme définition.

**$E_3$** : module de Young dans la direction  $e_3$  (la direction de l'axe de l'isotropie transversale).

**$\nu_{31}$** : le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction  $x_1$  ou  $x_2$  quand il ya une traction/compression suivant  $x_3$ .

**$E_1$** : module de Young dans les directions  $e_1$  et  $e_2$  (i.e. plan de symétrie).

**$\nu_{21}$** : le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction  $x_2$  quand il ya traction/compression suivant  $x_1$  ou bien déformation transversale suivant  $x_1$  qd traction/compression suivant  $x_2$  (i.e. Poisson dans le plan d'isotropie,  **$\nu_{21} = \nu_{12}$** ).

**$\nu_{13}$** : Coefficient de Poisson pour la déformation transversale suivant  $e_3$  (l'axe de l'isotropie transversale) quad il ya traction/compression dans une direction du plan d'isotropie.

**$G_{12}$** : module de cisaillement dans le plan d'isotropie transversale.

**$G_{13}$** : module de cisaillement dans des plans perpendiculaires au plan d'isotropie transversale.

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite). élastique transversalement isotrope

Puisque la matrice est symétrique, on aura:

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad (6.63)$$

Et puisque la matrice est définie positive, on doit avoir:

$$E_1 > 0, E_3 > 0, G_{12} > 0, G_{13} > 0$$

Et

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_1^2} (1 - \nu_{21}^2) > 0 \quad (6.64)$$

$$-1 < \nu_{21}^2 < 1$$

i.e.

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_1 E_3} \left( 1 - \nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3} \right) > 0 \quad (6.65)$$

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite). élastique transversalement isotrope

D'où

$$\nu_{31}^2 < \frac{E_3}{E_1} \quad \text{or} \quad \nu_{13}\nu_{31} < 1 \quad (6.64)$$

De plus, il faut:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_1^2 E_3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{E_1}{E_3} \right) \nu_{21} \nu_{31}^2 - 2 \left( \frac{E_1}{E_3} \right) \nu_{31}^2 - \nu_{21}^2 \right] \quad (6.65)$$
$$= \left[ 1 - 2 \left( \frac{E_1}{E_3} \right) \nu_{31}^2 - \nu_{21} \right] (1 + \nu_{21}) > 0$$

puisque  $1 + \nu_{21} > 0$ ,

alors

$$1 - 2\nu_{31}^2 \left( \frac{E_1}{E_3} \right) > \nu_{21} \quad \text{Ou bien} \quad 1 - 2\nu_{31}\nu_{13} > \nu_{21} \quad (6.66)$$

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite).

### 12.3 Matériau élastique orthotropique.

Pour ce type de matériau, la relation contrainte-déformation peut être inversée pour obtenir (09 paramètres indépendants):

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

Avec:

$E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ : modules de Young suivant  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ .

$G_{23}$ ,  $G_{31}$  et  $G_{12}$ : modules de cisaillement dans les plans  $x_2x_3$ ,  $x_1x_3$  et  $x_1x_2$ .

$\nu_{ij}$ : le coefficients de Poisson déformation transversale en « j » qd traction/compression suivant « i ».

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite). élastique orthotropique

Puisque la matrice est symétrique, alors:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (6.68)$$

Et puisqu'elle est définie positive, on aura:

$$E_1 > 0, E_2 > 0, E_3 > 0, G_{23} > 0, G_{31} > 0, G_{12} > 0$$

$$\begin{aligned} \nu_{21}^2 &< \left(\frac{E_2}{E_1}\right); & \nu_{12}^2 &< \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \\ \nu_{32}^2 &< \left(\frac{E_3}{E_2}\right); & \nu_{23}^2 &< \left(\frac{E_2}{E_3}\right) \\ \nu_{13}^2 &< \left(\frac{E_1}{E_3}\right); & \nu_{31}^2 &< \left(\frac{E_3}{E_1}\right) \end{aligned} \quad (6.69)$$

Et

$$1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} > 0 \quad (6.70)$$

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite).

### 12.3 Matériau élastique monoclinique.

Pour ce type de matériau, la relation contrainte-déformation peut être inversée pour obtenir (**13** paramètres indépendants):

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{41}}{G_4} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{42}}{G_4} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{43}}{G_4} & 0 & 0 \\ \frac{\eta_{14}}{E_1} & \frac{\eta_{24}}{E_2} & \frac{\eta_{34}}{E_3} & \frac{1}{G_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_5} & \frac{\mu_{65}}{G_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_{56}}{G_5} & \frac{1}{G_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Due à la matrice de la matrice, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2}, & \frac{\nu_{13}}{E_1} &= \frac{\nu_{31}}{E_3}, & \frac{\nu_{23}}{E_2} &= \frac{\nu_{32}}{E_3}, \\ \frac{\eta_{14}}{E_1} &= \frac{\eta_{41}}{G_4}, & \frac{\eta_{24}}{E_2} &= \frac{\eta_{42}}{G_4}, & \frac{\eta_{34}}{E_3} &= \frac{\eta_{43}}{G_4}, & \frac{\mu_{56}}{G_5} &= \frac{\mu_{65}}{G_6} \end{aligned} \quad (6.72)$$

## Résumé des constantes d'ingénieur (suite). **élastique monoclinique**

**Avec:**

**$E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$** : modules de Young suivant  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ .

**$\nu_{ij}$** : le coefficients de Poisson déformation transversale en « j » qd traction/compression suivant « i ».

**$G_6$** : module de cisaillement dans le plan  $x_1x_2$ .

**$G_5$** : module de cisaillement dans le plan  $x_1x_3$ .

**$G_4$** : module de cisaillement dans le plan  $x_2x_3$ .

**$\eta$** : coefficient représentant la déformation de cisaillement (ex plan  $x_2x_3$ ) due à des contraintes normales dans les autres directions ( $x_1$  ou  $x_2$ ).

**$\mu$** : coefficient représentant la déformation de cisaillement (ex plan  $x_1x_3$ ) due à des contraintes de cisaillement dans un autre plan (ex:  $x_1x_2$ ).



**Merci. Fin du chapitre 6**

# *Mécanique des Milieux Continus*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Semaine Prochaine**

**Chap. 7**

**Méthodes  
variationnelles**