Abdellatif MEGNOUNIF

Application 10

Elasticité Plane en CP

Déplacements élastiques dans le cas de distribution symétrique des contraintes

COURS 11 **Jeudi 29.08.2024**

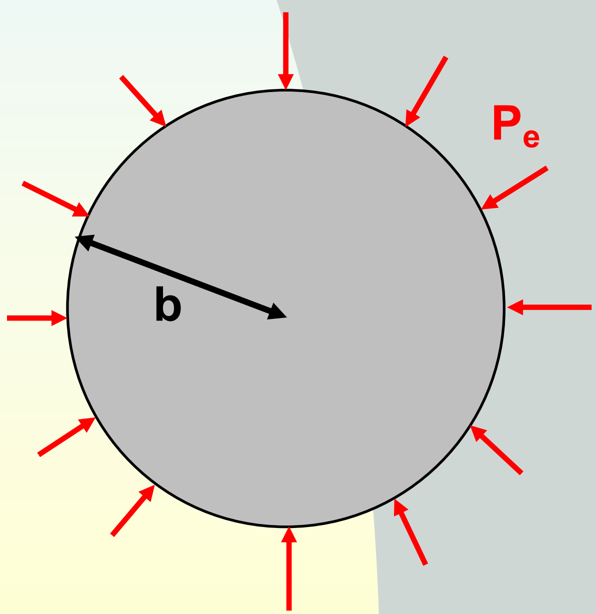
Application

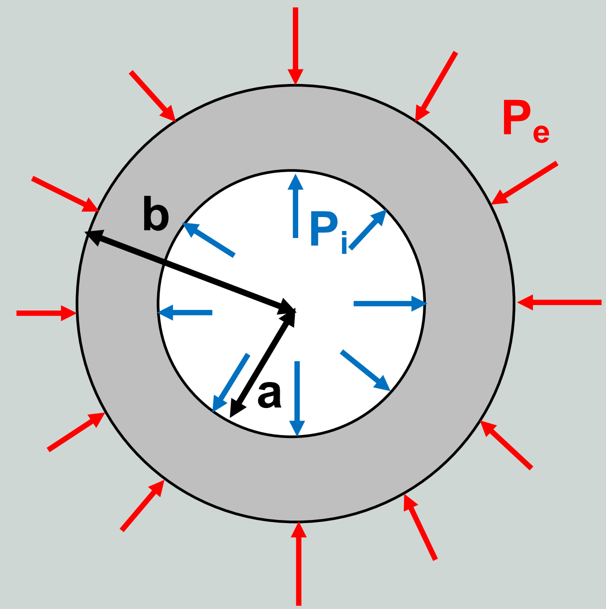
Le but de cette application est de calculer le vecteur déplacement en n'importe quel point dans le cas d'une structure en élasticité plane en coordonnées polaires et pour des cas particuliers de distribution symétrique de contraintes.

Application

Considérons une structure plane quelconque, en coordonnées polaires et dont la distribution des contraintes est symétrique (exemple l'application 9)

Calculer le vecteur déplacement $u(r,\theta); v(r,\theta)$ en n'importe quel point de cette structure.
On considère le cas général, puis on applique les résultats aux cas particuliers





Application

On a vu, que dans le cas de distribution symétrique des contraintes, on aura:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\log r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Par intégration ?

On a :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{\tau_{r\theta}}{G} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r} + \dfrac{\partial v}{r\,\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \end{cases}$$

Application

$$\frac{\partial(r\log\ -r)}{\partial r} = \log r$$

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\log r) + 2C$$
$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C$$
$$\tau_{r\theta} = 0$$

D'où

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) = \frac{1}{E}\left(\frac{(1+\nu)}{r^2}A + 2(1-\nu)B\log r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C\right)$$

Par intégration ?

$$u(r,\theta) = \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)\,Br\log r - 2(1-\nu)Br + (1-3\nu)Br + 2(1-\nu)Cr\right) + f(\theta)$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)\,Br\log r - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Cr\right) + f(\theta)$$

et

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r)$$
$$= \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r^2}A + 2(1-\nu)B\log r - (1+\nu)B + 2(1-\nu)C\right) + \frac{f(\theta)}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta}$$
$$= \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r^2}A + 2(1-\nu)B\log r + (3-\nu)B + 2(1-\nu)C\right)$$

Application

$$u(r,\theta) = \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)\,Brlogr - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Cr\right) + f(\theta)$$

D'où

$$\frac{f(\theta)}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} = \frac{4\,B}{E} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{4\,B\,r}{E} - f(\theta)$$

Par intégration

$$v(r,\theta) = \frac{4\,B\,r\theta}{E} - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

Déterminer $f(\theta)$ et $g(r)$? Par $\gamma_{r\theta}$

D'où

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + \cancel{\frac{4\,B\,\theta}{E}} + \frac{\partial g(r)}{\partial r} - \cancel{\frac{4\,B\,\theta}{E}} + \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{g(r)}{r} = 0$$

Par identification

$$\frac{\partial g(r)}{\partial r} - \frac{g(r)}{r} = 0$$

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + \int f(\theta)d\theta = 0$$

Application

$$u(r,\theta) = \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)\ Brlogr - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Cr\right) + f(\theta)$$

$$v(r,\theta) = \frac{4\,B\,r\theta}{E} - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

$$\frac{\partial g(r)}{\partial r} - \frac{g(r)}{r} = 0$$

D'où $g(r) = F\,r$

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \int f(\theta)d\theta = 0$$

$$f(\theta) = H\ sin\theta + K\ cos\theta$$

En remplaçant, on aura finalement :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{E}\left(-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)\ Br\ logr - (1+\nu)\ Br + 2(1-\nu)\ Cr\right) + H\ sin\theta + K\ cos\theta$$

$$v(r,\theta) = \frac{4\,B\,r\theta}{E} + F\,r + H\ cos\theta - K\ sin\theta$$

A, B et C : constantes déjà calculées pour chaque cas (voir application 9) (cylindre plein ou troué)

F, H et K : constantes à déterminer par les conditions aux limites de déplacements.

Rappel

Rappel

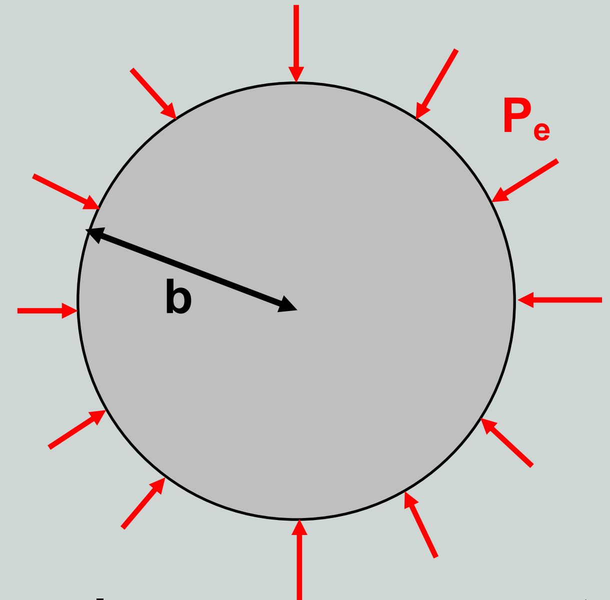
Application 9

Ctes A, B et C

Application

Cas 1 : Cylindre plein

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\,log\,r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\,log\,r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$



Si $r \to 0$ (tube plein) et si on suppose que $\mathrm{A, B} \neq 0$ alors on aura $\sigma_r \to \infty$ et $\sigma_\theta \to \infty$, ce qui est faux.

D'où, il faut que $\mathrm{A, B} = 0$ Donc $\boxed{\sigma_r = \sigma_\theta = 2C}$

Traction/compression dans toutes les directions du plan

C.L
$$\begin{cases} \bar{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \bar{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$

Avec: $\bar{R} = -Pe$ et $\bar{S} = 0$

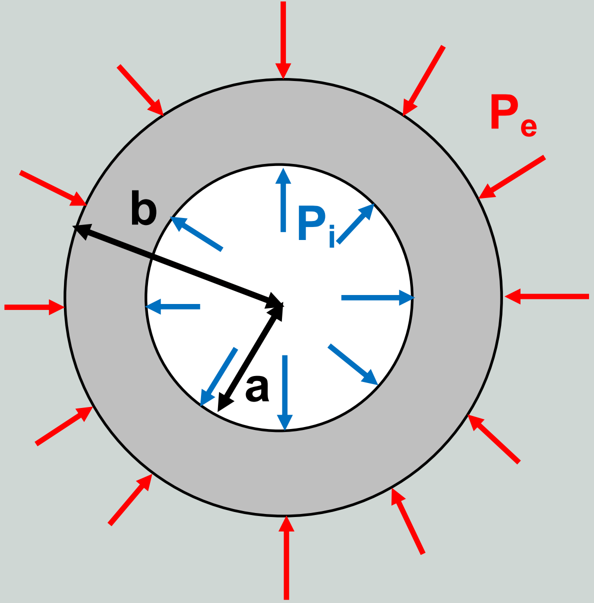
$l = 1\; et\; m = 0$

D'où: $-Pe = \sigma_r = 2C$ Donc $C = -Pe/2$

$$\boxed{\sigma_r = \sigma_\theta = -Pe}$$

Application

Cas 2 : Cylindre troué



$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\log r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $B = 0$ et les contraintes seront.

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \qquad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

C.L

$$\begin{cases} \bar{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \bar{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$

Avec:

Face intérieure $r = a$

$\bar{R} = P_i$, $\bar{S} = 0$ et $l = -1$, $m = 0$

Face extérieure $r = b$

$\bar{R} = -Pe$, $\bar{S} = 0$ et $l = 1$, $m = 0$

D'où: $P_i = -\sigma_r = -\dfrac{A}{a^2} - 2C$ et $-Pe = \sigma_r = \dfrac{A}{b^2} + 2C$

Par résolution :

$$\boxed{A = \frac{(P_i - P_e)a^2 b^2}{a^2 - b^2}} \qquad \boxed{C = \frac{1}{2}\frac{P_e b^2 - P_i a^2}{a^2 - b^2}}$$

Merci. **Fin de l'application 10**