Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 12

Elasticité Plane en CP

Coin fin soumis à un moment à son sommet

COURS 13 Lundi 02.09.2024

Application

Le but de cette application est de calculer la distribution des contraintes et le vecteur déplacement en n'importe quel point d'un coin fin plan en coordonnées polaires soumise à un moment concentré à son sommet.

Il s'agit d'un problème général dont la distribution des contraintes n'est pas forcément symétrique.

Application

Soit un coin fin (épaisseur unité) illimité d'angle « 2 α » au sommet duquel est appliqué un moment constant « M ».

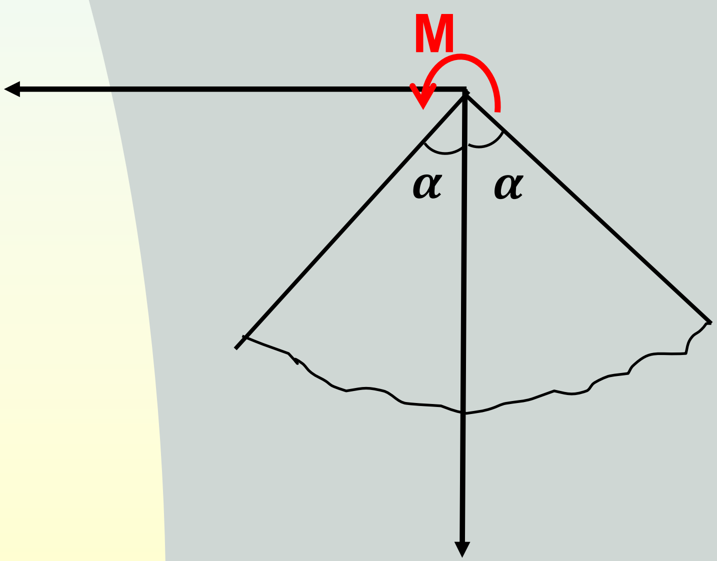
Et soit la fonction $\varphi(r,\theta) = A\theta + B\sin 2\theta$

Où A et B sont 02 constantes à déterminer.

i) **Vérifier que $\varphi(r,\theta)$ est une fonction biharmonique.**

ii) **Déterminer les constantes « A » et « B » pour que les conditions aux limites soient vérifiées. En déduire l'état de contraintes en un point quelconque $M(r,\theta)$.**

iii) **Déterminer le vecteur déplacement (u, v) d'un point quelconque.**



Application

Le problème est quelconque. D'où :

Etape 1 : $\varphi(r,\theta)$ biharmonique ? $\varphi(r,\theta) = A\theta + B\sin 2\theta$

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\cancelto{0}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}} + \cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{r^2}B\sin 2\theta$$

D'où :

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(-\frac{4}{r^2}B\sin 2\theta\right) = 0$$

En développant

$$\nabla^4(\varphi) = -\frac{24}{r^4}B\sin 2\theta + \frac{8}{r^4}B\sin 2\theta + \frac{16}{r^4}B\sin 2\theta = 0$$

Donc

$\varphi(r,\theta)$ est biharmonique

A et B : constantes à déterminer par les CL de chargement

Application

Le problème est quelconque. D'où :

Etape 2 : Distribution des contraintes ?

On a :

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \end{cases}$$

Avec :

$$\varphi(r,\theta) = A\theta + B\sin 2\theta$$

On obtiendra

$$\sigma_r = -\frac{4B}{r^2}\,sin2\theta$$
$$\sigma_\theta = 0$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}(A + 2B\,cos2\theta)$$

Application

$$\sigma_r = -\frac{4B}{r^2}\,sin2\theta$$
$$\sigma_\theta = 0$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}(A + 2B\,cos2\theta)$$

Etape 3 : Conditions aux limites de chargement ?

On a :

$$\begin{cases} \bar{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \bar{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$

* **Face coté gauche $\theta = \alpha$**

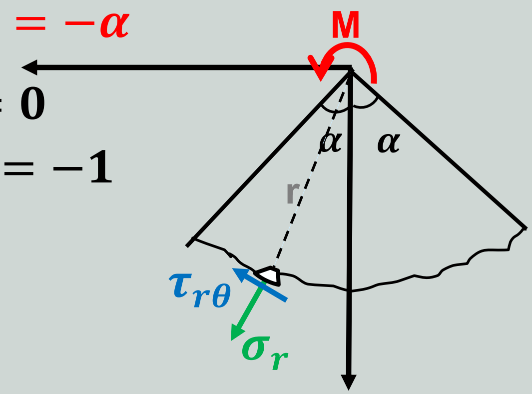
Avec: $\bar{R} = 0$, $\bar{S} = 0$ et $l = 0$, $m = 1$

$$\begin{cases} \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Face coté gauche $\theta = -\alpha$

$\bar{R} = 0$, $\bar{S} = 0$ et $l = 0$, $m = -1$

$$\begin{cases} \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$



$$(A + 2B\,cos2\alpha) = 0 \qquad (1)$$

* **Egalité des Moments**

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\,\tau_{r\theta}\,r d\theta = M \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha}(A + 2B\,cos2\theta)d\theta = M$$

$$(2A\alpha + 2B\,sin2\alpha) = M \qquad (2)$$

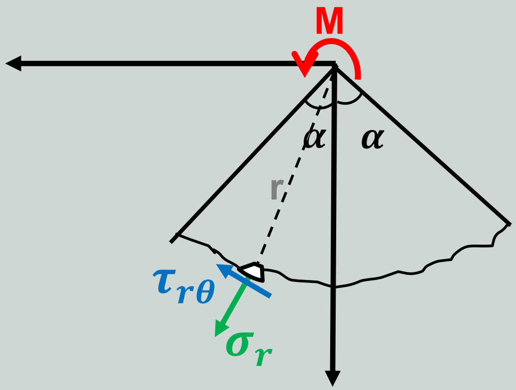
Application

$$\sigma_r = -\frac{4B}{r^2} sin2\theta$$
$$\sigma_\theta = 0$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}(A + 2B\, cos2\theta)$$

Etape 3 : Conditions aux limites de chargement ?

On a : $(A + 2B\, cos2\alpha) = 0$ **(1)**

$(2A\alpha + 2B\, sin2\alpha) = M$ **(2)**



Dont la solution

$$A = \frac{-M\, cos2\alpha}{sin2\alpha - 2\alpha\, cos2\alpha} \qquad B = \frac{M}{2\, sin2\alpha - 4\alpha\, cos2\alpha}$$

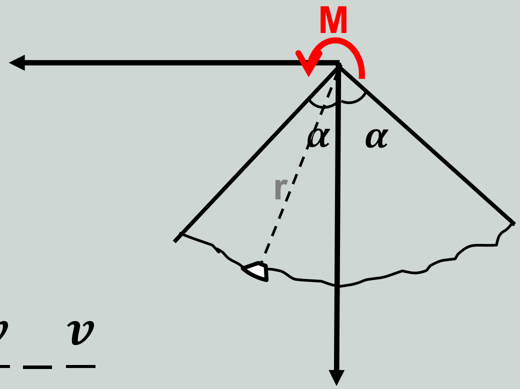
$$\sigma_r = \frac{-2\, M\, sin2\theta}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\, cos2\alpha)}$$
$$\sigma_\theta = 0$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{M\,(cos2\theta - cos2\alpha)}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\, cos2\alpha)}$$

Application

Composantes de déplacements ?

$$\sigma_r = \frac{-2\,M\,sin2\theta}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}$$
$$\sigma_\theta = 0$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{M\,(cos2\theta\ - cos2\alpha)}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}$$

Par intégration ?



On a :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{\tau_{r\theta}}{G} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r} + \dfrac{\partial v}{r\,\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \end{cases}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) = \frac{1}{E}\left[\frac{-2\,M\,sin2\theta}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}\right]$$

Posons $$C = \frac{M}{(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{C}{E}\left[\frac{-\,sin2\theta}{r^2}\right]$$

D'où

$$u(r,\theta) = \frac{2\,C}{E\,r}sin2\theta + f(\theta)$$

Application

$$C = \frac{M}{(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}$$

$$\sigma_r = \frac{-2\,M\sin 2\theta}{r^2\,(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{M\,(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{r^2\,(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = r\varepsilon_\theta - u = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) - u = \frac{-r\nu\,\sigma_r}{E} - u$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{2\nu M\sin 2\theta}{r\,(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)} - \frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta - f(\theta) = \frac{2\,\nu\,C\sin 2\theta}{r} - \frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta - f(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{2\nu M\sin 2\theta}{E\,r\,(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)} - \frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta - f(\theta) = \frac{2\,\nu\,C\sin 2\theta}{E\,r} - \frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta - f(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = -(1-\nu)\frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta - f(\theta)$$

D’où

$$v(r,\theta) = (1-\nu)\frac{C}{E\,r}\cos 2\theta - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

Déterminer $f(\theta)$ et $g(r)$? **Par** $\gamma_{r\theta}$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{M\,(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{G\,r^2\,(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}$$

Application

$$u(r,\theta) = \frac{2\,C}{E\,r} sin2\theta + f(\theta)$$

Avec

$$v(r,\theta) = (1-\nu)\frac{C}{E\,r} cos2\theta - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

$$\sigma_r = \frac{-2\,M\,sin2\theta}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{M\,(cos2\theta\ - cos2\alpha)}{r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}$$

$$C = \frac{M}{(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$= \frac{4C\,cos2\theta}{E\,r^2} - (1-\nu)\frac{C}{E\,r^2} cos2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial g(r)}{\partial r} - (1-\nu)\frac{C}{E\,r^2} cos2\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{1}{r} g(r)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{M\,(cos2\theta\ - cos2\alpha)}{G\,r^2\,(sin2\alpha - 2\alpha\,cos2\alpha)} = \frac{2\,C(1+\nu)(cos2\theta\ - cos2\alpha)}{E\,r^2}$$

Par égalité

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{1}{r} g(r) = \frac{-2C(1+\nu)}{E\,r^2} cos2\alpha$$

Ou bien :

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + r\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \int f(\theta)d\theta - g(r) = \frac{-2C(1+\nu)}{Er} cos2\alpha$$

Application

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \int f(\theta)d\theta - g(r)$$

$$u(r,\theta) = \frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta + f(\theta)$$

$$v(r,\theta) = (1-\nu)\frac{C}{E\,r}\cos 2\theta - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

$$C = \frac{M}{(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}$$

Par identification $$= \frac{-2C(1+\nu)}{Er}\cos 2\alpha$$

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \int f(\theta)d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\theta) = H\cos\theta + K\sin\theta$$

$$r\frac{\partial g(r)}{\partial r} - g(r) = \frac{-2C(1+\nu)}{Er}\cos 2\alpha \quad \Rightarrow \quad g(r) = L\,\frac{C(1+\nu)}{E}\frac{1}{r}\cos 2\alpha$$

En remplaçant, on aura finalement :

$$u(r,\theta) = \frac{2\,C}{E\,r}\sin 2\theta + H\cos\theta + K\sin\theta$$

$$v(r,\theta) = (1-\nu)\frac{C}{E\,r}\cos 2\theta + L\,\frac{C(1+\nu)}{E}\frac{1}{r}\cos 2\alpha + K\cos\theta - H\sin\theta$$

Avec : $$C = \frac{M}{(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}$$

H, K et L : constantes à déterminer par les conditions aux limites de déplacements.

Merci. Fin de l’application 12