Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 03-B

Contraintes et Directions Principales

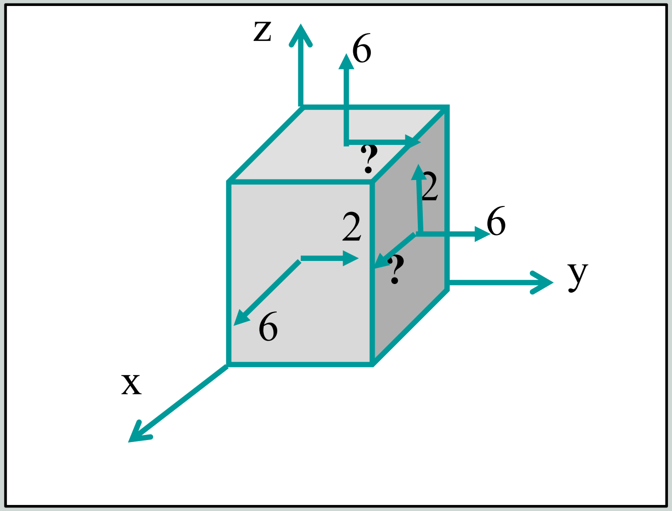
COURS 14 **Lundi 02.09.2024**

Application

Le but de cette application est de calculer les contraintes et directions principales d'un tenseur quelconque.

Application

La distribution des contraintes en un point M(x,y,z) quelconque d'un milieu élastique est représentée en figure 1. (Ce qui n'est pas représenté est nul)



i) Redessiner la distribution des contraintes en définissant les valeurs en « ? ». En déduire le tenseur de contraintes

ii) Soit le vecteur unitaire « $\vec{n}$» de composantes $\{n\} = \{1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2\}^T$

Sur la facette « $\vec{n}$» :

Calculer les composantes du vecteur contrainte $\sigma(M,\vec{n})$**, dans le repère (x, y, z)**

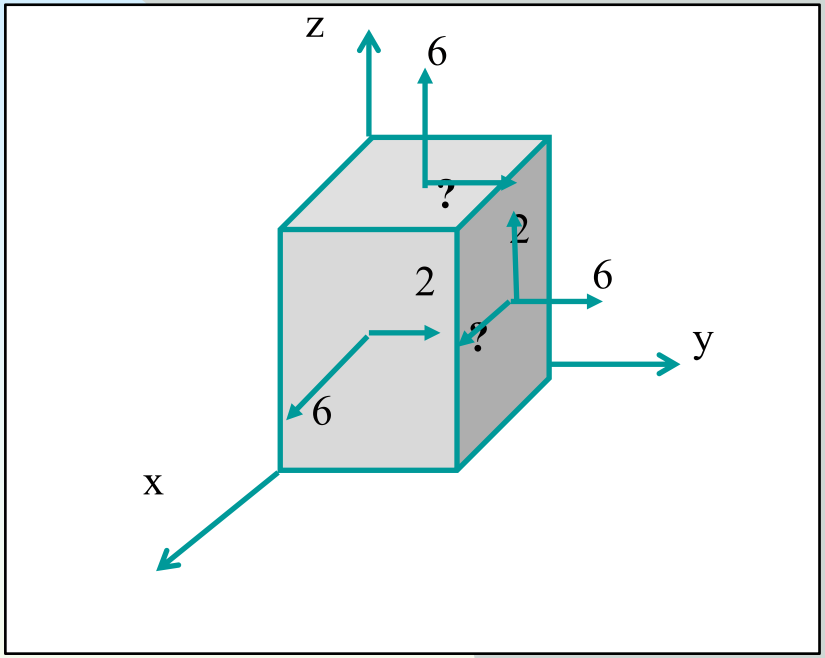
Calculer les composantes du vecteur contrainte (σ_n,τ) dans le repère (x, y, z). Que peut-on conclure ?

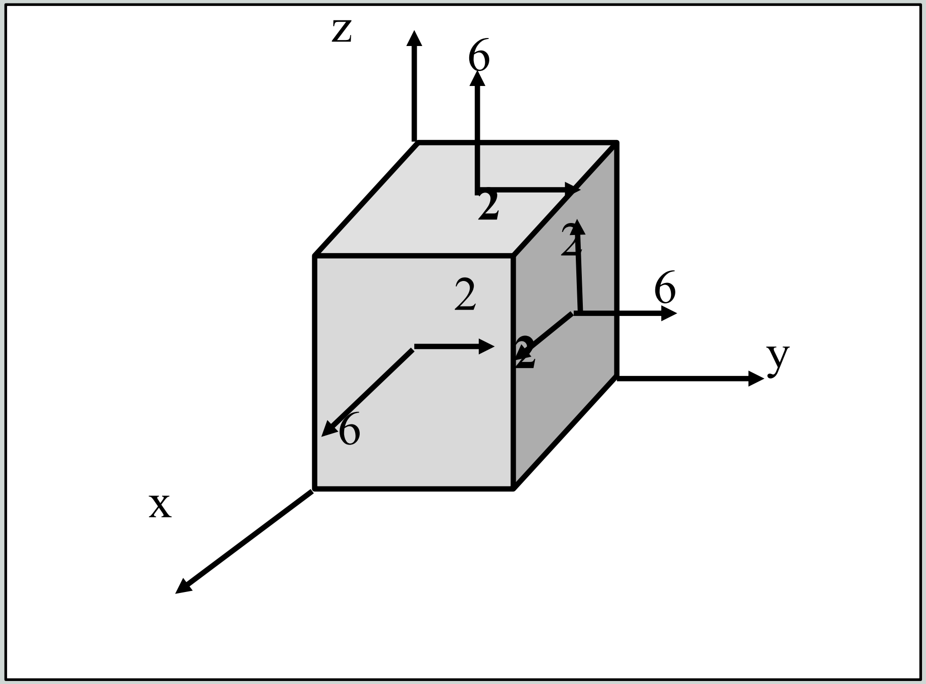
iii) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et en partie déviatorique. Que peut représenter la partie déviatorique ?

iv) Déterminer les contraintes et directions principales du tenseur déviatorique. En déduire les contraintes et directions principales du tenseur initial.

v) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

Application





i) Tenseur des contraintes est symétrique

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Application

ii) Composantes de $\sigma(M,\vec{n})$,

$$\begin{cases} q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ q_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ q_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 1+3\sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+3 \end{Bmatrix}$$

Composantes (σ_n,τ) ?

$$\boldsymbol{\sigma_n} = lq_x + mq_y + nq_z = (l \quad m \quad n)^T \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \left(1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2\right)^T \begin{Bmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 2+3\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \mathbf{6+2\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \mathbf{44 + 24\sqrt{2}}$$

d'où $$\boldsymbol{\tau}^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = 44 + 24\sqrt{2} - \left(6+2\sqrt{2}\right)^2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma_n} = 6+2\sqrt{2} \\ \tau = 0 \end{cases}$$

D'où. $\boldsymbol{\sigma_n}$ est une contrainte principale et $\{\boldsymbol{n}\} = \{1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2\}^T$ est une direction principale.

Application

iii) Partie sphérique et déviatorique

$$[\sigma] = [\sigma]_s + [\sigma]_D$$

Avec : $[\sigma]_s = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$ et $\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = 6$

Et : $[\sigma]_D = [\sigma] - [\sigma]_s$

$$[\sigma]_D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cisaillement dans le plan xy

Cisaillement dans le plan yz

Application

iv) Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique

$$\begin{vmatrix} 0-\sigma_d & 2 & 0 \\ 2 & 0-\sigma_d & 2 \\ 0 & 2 & 0-\sigma_d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\sigma_d)\left[\sigma_d^2 - 4\right] - 2[2(-\sigma_d)] = 0$$

Soit : $\boldsymbol{\sigma_{d1}} = -2\sqrt{2}; \boldsymbol{\sigma_{d2}} = 0 \; \boldsymbol{et} \; \boldsymbol{\sigma_{d3}} = 2\sqrt{2}$

Directions ?

$\boldsymbol{\sigma = \sigma_{d1} = -2\sqrt{2}}$; $\begin{pmatrix} 0-(-2\sqrt{2}) & 2 & 0 \\ 2 & 0-(-2\sqrt{2}) & 2 \\ 0 & 2 & 0-(-2\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = 0 =$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}l_1 + 2m_1 = 0 \\ 2l_1 + 2\sqrt{2}m_1 + 2n_1 = 0 \\ 2m_1 + 2\sqrt{2}n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = n_1 \\ m_1 = -\sqrt{2}l_1 \end{cases}$$

Avec $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, on aura $\boldsymbol{l_1} = \pm\frac{1}{2}; \boldsymbol{m_1} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}; \boldsymbol{n_1} = \pm\frac{1}{2}$

Application

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_{d2} = 0} \qquad \begin{pmatrix} 0-(0) & 2 & 0 \\ 2 & 0-(0) & 2 \\ 0 & 2 & 0-(0) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = 0 =$$

$$\begin{cases} 2m_2 = 0 \\ 2l_2 + 2n_2 = 0 \\ 2m_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = -n_2 \\ m_2 = 0 \end{cases}$$

Avec $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$, **on aura** $\boldsymbol{l_2} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}; \boldsymbol{m_2} = 0; \boldsymbol{n_2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_{d3} = 2\sqrt{2}} \qquad \begin{pmatrix} 0-(2\sqrt{2}) & 2 & 0 \\ 2 & 0-(2\sqrt{2}) & 2 \\ 0 & 2 & 0-(2\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0 =$$

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}l_3 + 2m_3 = 0 \\ 2l_3 - 2\sqrt{2}m_3 + 2n_3 = 0 \\ 2m_3 - 2\sqrt{2}n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3 = n_3 \\ m_3 = \sqrt{2}l_3 \end{cases}$$

Avec $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$, **on aura** $\boldsymbol{l_3} = \pm\frac{1}{2}; \boldsymbol{m_3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \boldsymbol{n_3} = \pm\frac{1}{2}$

Tenseur initial :

$$\sigma_i = \sigma_{di} + \sigma_m$$

Soit : $\boldsymbol{\sigma_1 = 6 - 2\sqrt{2}; \sigma_2 = 6 \ et \ \sigma_3 = 6 + 2\sqrt{2}}$

Les directions principales du tenseur initial sont les mêmes que celles du tenseur déviatorique

Application

v) Cisaillement maximal

$$\tau_{max} = Max(\tau_{1max}; \tau_{2max}; \tau_{3max})$$

$$\boldsymbol{\tau_{1max}} = \pm\frac{1}{2}|(\sigma_1 - \sigma_2)| = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

$$\tau_{2max} = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{\tau_{3max}} = \pm\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau_{max} = 2\sqrt{2}}}$$

Merci. Fin de l'application 3B