Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 9

Elasticité Plane en CP

Distribution symétrique des contraintes
Cylindre circulaire soumis à des pressions

COURS 10 **Jeudi 29.08.2024**

Application

Le but de cette application est d'appliquer les principes de l'élasticité plane en coordonnées polaires pour des cas particuliers de distribution de contraintes.

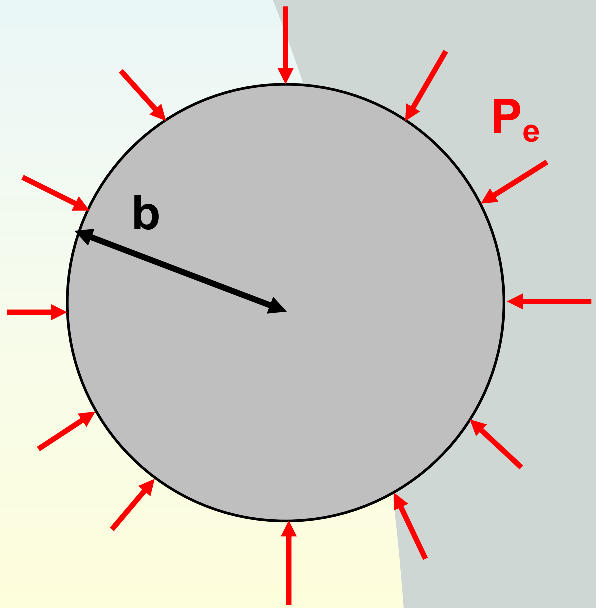
Calcul des contraintes avec vérification des CL, en passant par l'équation biharmonique et la fonction d'Airy.

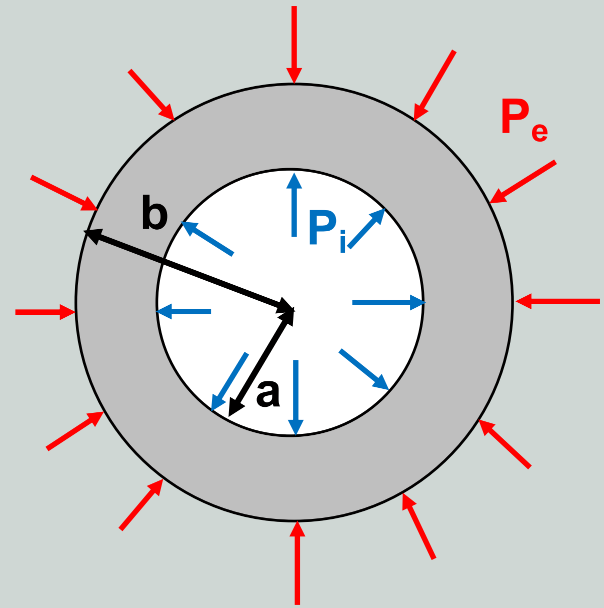
Plusieurs cas sont considérés dans cet exemple.

Application

Considérons un tube cylindrique soumis à l'action de pressions. On supposera plusieurs possibilités :

- Tube plein de rayon « b » soumis à une pression externe.
- Tube troué de rayon intérieur « a » et de rayon extérieur « b » soumis à une pression interne « Pi » et une pression externe « Pe ».





Application

Pour étudier la distribution des contraintes en tout point M(r, θ) de cette poutre on passe par l'équation biharmonique :

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

Avec

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)$$

Par raison de symétrie, la distribution des contraintes est symétrique par rapport à l'axe passant par « O » et perpendiculaire au plan.

Dans ce cas, les composantes de contraintes ne dépendent pas de la variable « θ » mais uniquement de « r ».

Aussi, « $\tau_{r\theta}$ » est nulle.

Application

D'où :

$$\nabla^4(\varphi)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\cancelto{0}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\cancelto{0}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}}\right)=0$$

et

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\cancelto{0}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}}\qquad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\qquad \tau_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}=\cancelto{0}{-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)}$$

Ainsi,

$$\nabla^4(\varphi)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0$$

$$\nabla^4(\varphi)=\frac{\partial^4\varphi}{\partial r^4}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0$$

$$\boxed{\frac{\partial^4\varphi}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0}$$

Dont la solution est :

$$\boxed{\varphi(r)=A\log r+B\,r^2\log r+C\,r^2+D}$$

A, B, C et D constantes à déterminer par les CL de chargement

Application

Avec $$\varphi(r) = A\,log\,r + B\,r^2 log\,r + C\,r^2 + D$$

La distribution des contraintes sera

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{A}{r} + 2B\,r\,log\,r + Br + 2Cr\right) \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \left(-\dfrac{A}{r^2} + 2B\,log\,r + 3B + 2C\right) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

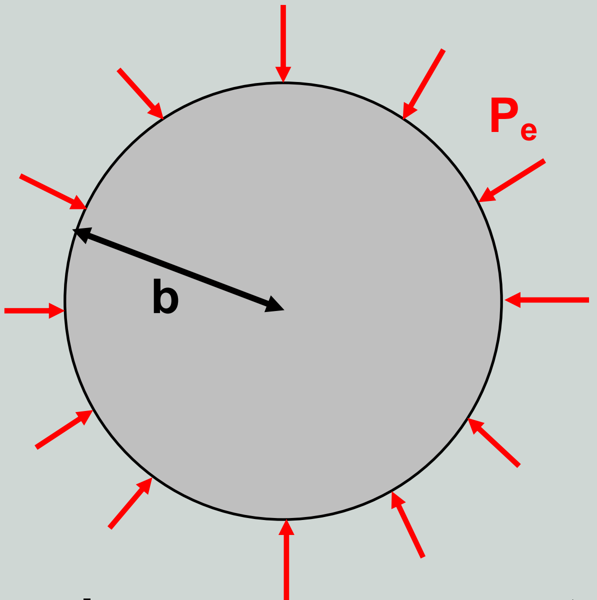
Soit :

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\,log\,r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\,log\,r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Application

Cas 1 : Cylindre plein

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\log r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$



Si $r \to 0$ (tube plein) et si on suppose que $\mathrm{A, B} \neq 0$ alors on aura $\sigma_r \to \infty$ et $\sigma_\theta \to \infty$, ce qui est faux.

D'où, il faut que $\mathrm{A, B} = 0$ Donc $\boxed{\sigma_r = \sigma_\theta = 2C}$

Traction/compression dans toutes les directions du plan

C.L
$$\begin{cases} \bar{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \bar{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$

Avec: $\bar{R} = -Pe$ et $\bar{S} = 0$

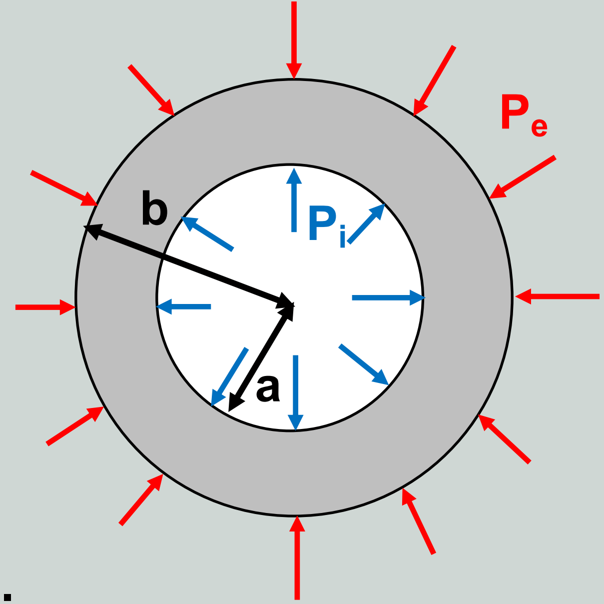
$l = 1 \; et \; m = 0$

D'où: $-Pe = \sigma_r = 2C$ Donc $C = -Pe/2$

$$\boxed{\sigma_r = \sigma_\theta = -Pe}$$

Application

Cas 2 : Cylindre troué



$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1 + 2\log r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $B = 0$ et les contraintes seront.

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \qquad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

C.L

$$\begin{cases} \bar{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \bar{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$

Avec:

Face intérieure $r = a$

$\bar{R} = P_i$, $\bar{S} = 0$ et $l = -1$, $m = 0$

Face extérieure $r = b$

$\bar{R} = -Pe$, $\bar{S} = 0$ et $l = 1$, $m = 0$

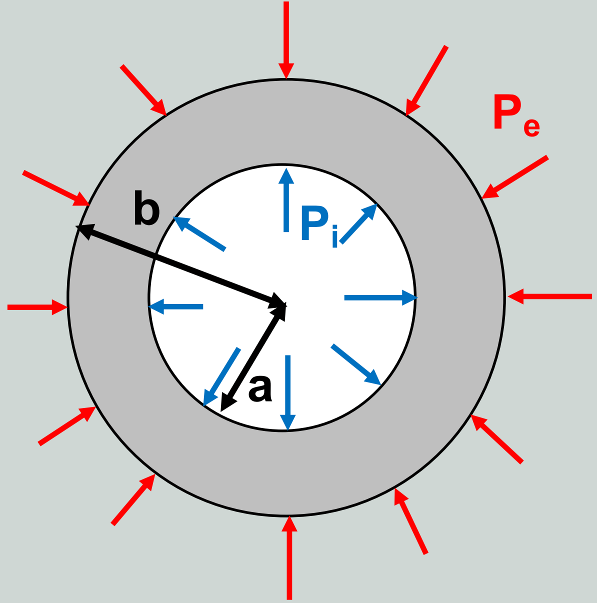
D'où: $P_i = -\sigma_r = -\dfrac{A}{a^2} - 2C$ et $-Pe = \sigma_r = \dfrac{A}{b^2} + 2C$

Par résolution :

$$\boxed{A = \frac{(P_i - P_e)a^2 b^2}{a^2 - b^2}} \qquad \boxed{C = \frac{1}{2}\frac{P_e b^2 - P_i a^2}{a^2 - b^2}}$$

Application

Cas 2 : Cylindre troué



D'où :

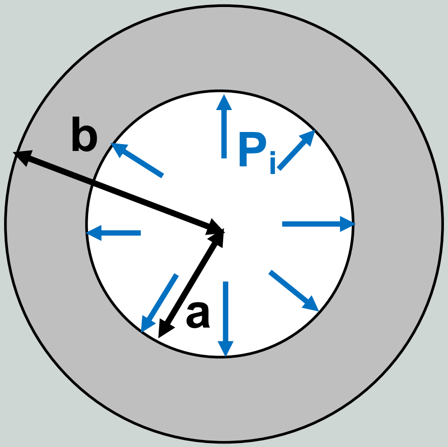
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{(P_i - P_e)a^2b^2}{a^2-b^2} + \dfrac{P_eb^2 - P_ia^2}{a^2-b^2} \\ \sigma_\theta = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{(P_i - P_e)a^2b^2}{a^2-b^2} + \dfrac{P_eb^2 - P_ia^2}{a^2-b^2} \end{cases}$$

Par exemple, on a:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\frac{P_eb^2 - P_ia^2}{a^2-b^2}$$

Toujours $(\forall M(r,\theta))$ constante

Si « $P_e = 0$ » et « $P_i \neq 0$ »



$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{P_i\, a^2b^2}{a^2-b^2} - \frac{P_ia^2}{a^2-b^2}$$

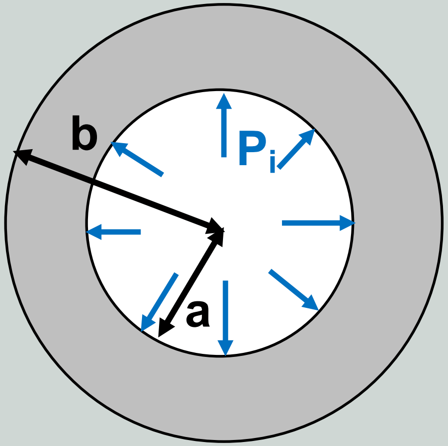
$$\sigma_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{P_i\, a^2b^2}{a^2-b^2} - \frac{P_ia^2}{a^2-b^2}$$

Application

Si « $P_e = 0$ » et « $P_i \neq 0$ »

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{P_i\, a^2 b^2}{a^2 - b^2} - \frac{P_i a^2}{a^2 - b^2}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{P_i\, a^2 b^2}{a^2 - b^2} - \frac{P_i a^2}{a^2 - b^2}$$



En réarrangeant, on aura

$$a \leq r \leq b$$

$$\sigma_r = \frac{P_i a^2}{b^2 - a^2}\underbrace{\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)}_{\leq 0}$$ Compression

$$\sigma_\theta = \frac{P_i a^2}{b^2 - a^2}\underbrace{\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)}_{\geq 0}$$ Traction

Maximum « σ_θ » ?

Pour « r=a »

$$\sigma_{\theta max} = \frac{P_i(a^2+b^2)}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{\theta max} > P_i$$

Mais, si $b \nearrow\nearrow$ $\sigma_{\theta max} \longrightarrow P_i$

Merci. Fin de l’application 9