Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 1

Cercles de Mohr

COURS 7 **Mardi 14.04.2020**

Introduction

Le but de cette application est de montrer comment tracer les 03 cercles de Mohr dans le cas d'un tenseur de contraintes à 3D. On l'appelle le **tricercle de Mohr**.

On essayera en parallèle de revoir comment calculer les contraintes et directions principales d'un tenseur.

Rappels Cercle de Mohr (Cas Plan)

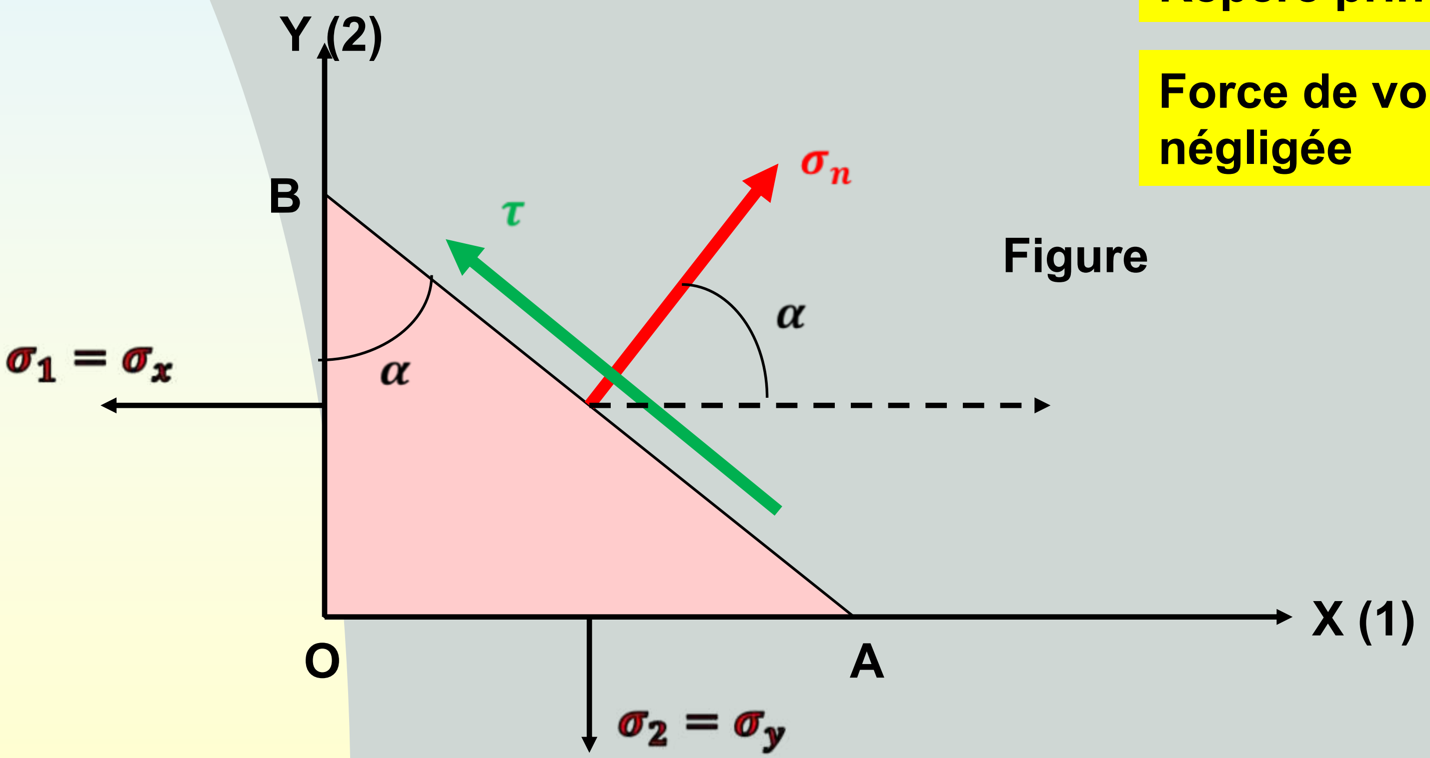
Supposons un petit élément (voir figure) plan défini dans un repère x,y supposé repère principal. L'élément dont la face est inclinée de façon à ce que la normale fait un angle « α » avec l'axe des « x ».

L'élément est très petit qu'on peut négliger les forces de volume.

Sur cette face inclinée il ya une contrainte normale « σ_n » et une contrainte tangentielle « τ» .

Repère principal

Force de volume négligée



Figure

Rappels Cercle de Mohr (Cas Plan)

Par équilibre suivant la normale et la tangentielle on aura:

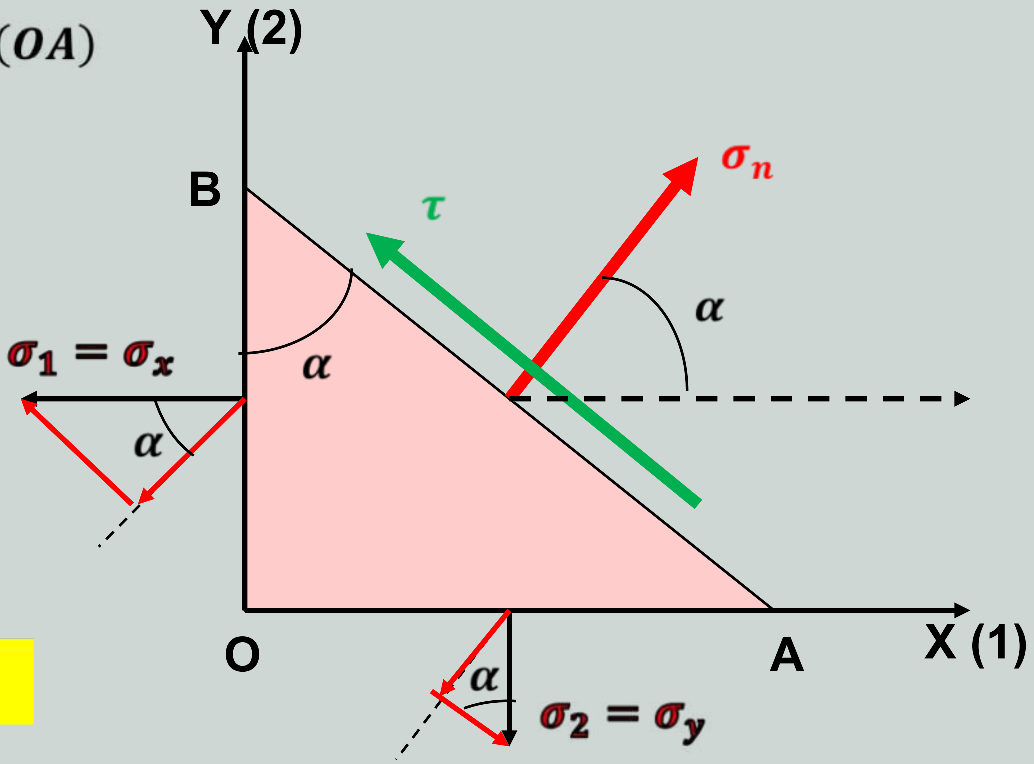
$$\sigma_n.(AB) = \sigma_1 cos\alpha.(OB) + \sigma_2 sin\alpha.(OA)$$

Or $(OB) = cos\alpha.(AB)$

Et $(OA) = sin\alpha.(AB)$

En remplaçant:

$$\sigma_n. = \sigma_1.(cos\alpha)^2 + \sigma_2.(sin\alpha)^2$$
$$\sigma_n. = \sigma_1.l^2 + \sigma_2.m^2$$



et

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2.l^2 + \sigma_2^2.m^2$$

D'où

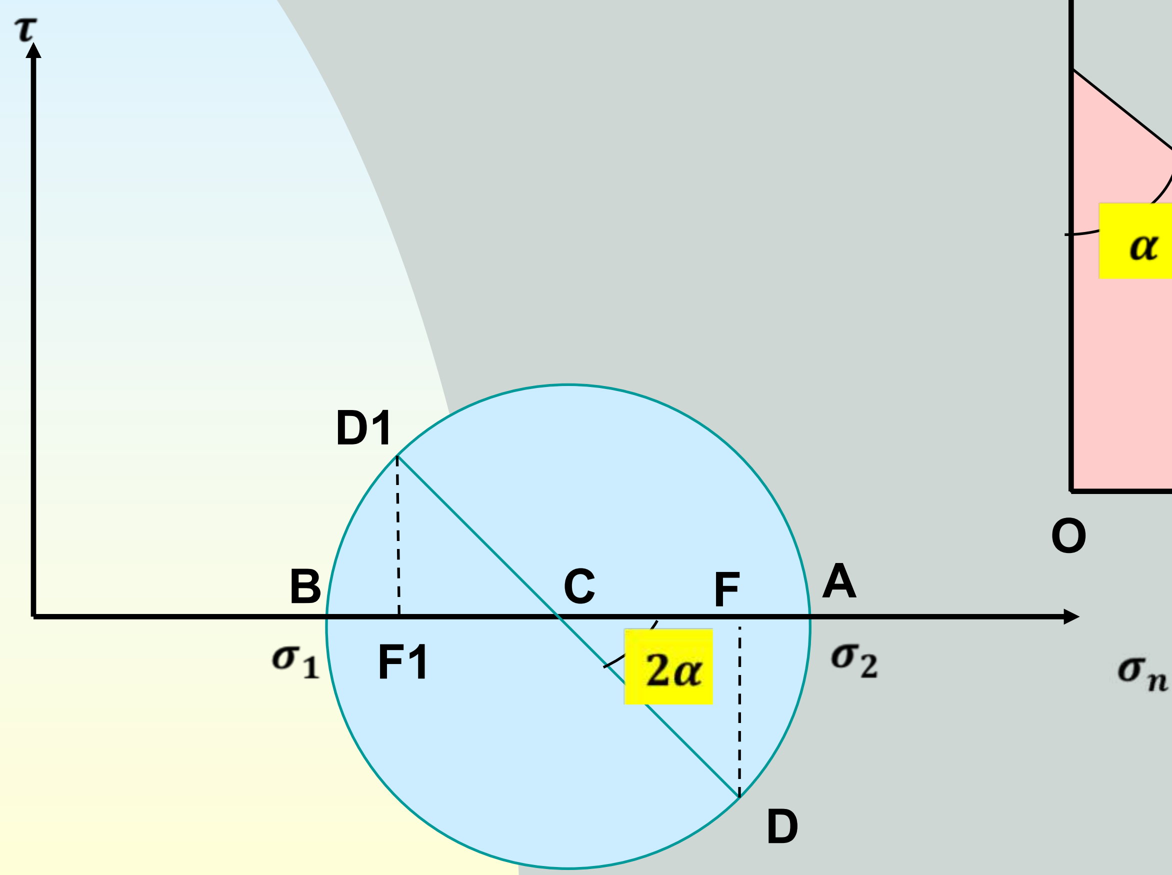
$$\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2.l^2 + \sigma_2^2.m^2 - \sigma_n^2$$

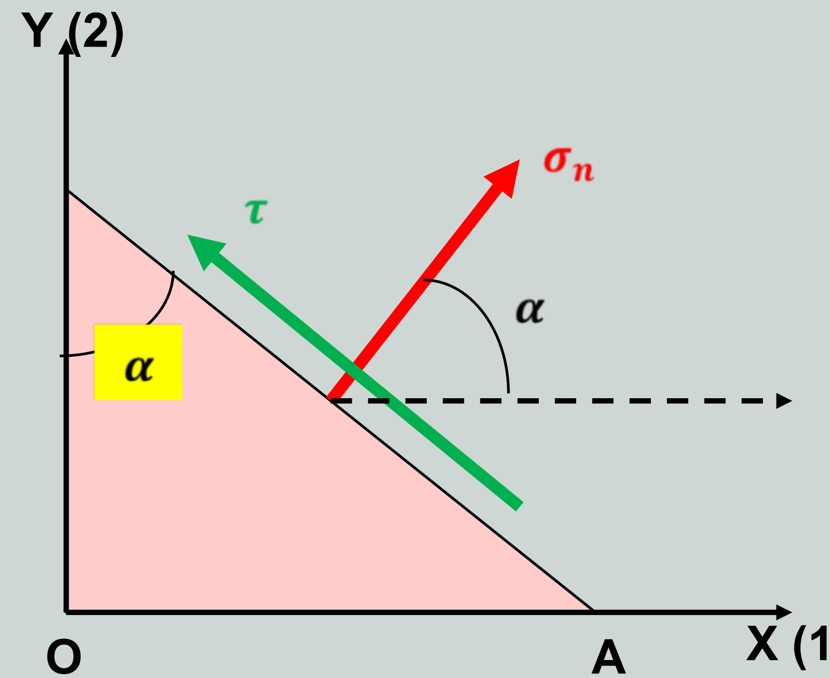
Du graphe

$$\tau = \frac{1}{2} sin\,2\alpha.(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Rappels Cercle de Mohr (Cas Plan)

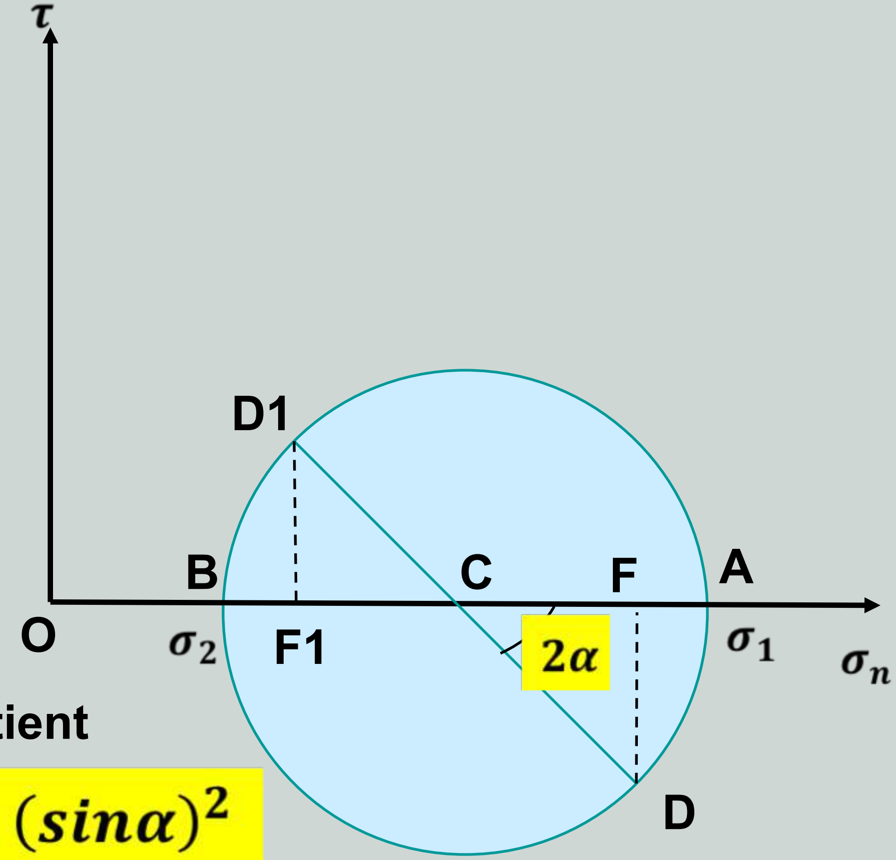
En faisant varier « α » on peut représenter la variation des composantes « σ_n » et « τ» on obtient un cercle





Rappels Cercle de Mohr (Cas Plan)

En faisant varier « α » on peut représenter la variation des composantes « σ_n » et « τ» on obtient un cercle



Du graphe

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF}$$

or $$\overline{OC} = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

et $$\overline{CF} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.cos2\alpha$$

D'où $$\overline{OF} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.cos2\alpha$$

Par transformation trigonométrique on obtient

$$\sigma_n = \overline{OF} = \sigma_1.(cos\alpha)^2 + \sigma_2.(sin\alpha)^2$$

et

$$\tau = \overline{DF} = \overline{CD}.sin2\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)sin2\alpha$$

Rappels Cercle de Mohr (Cas Plan)

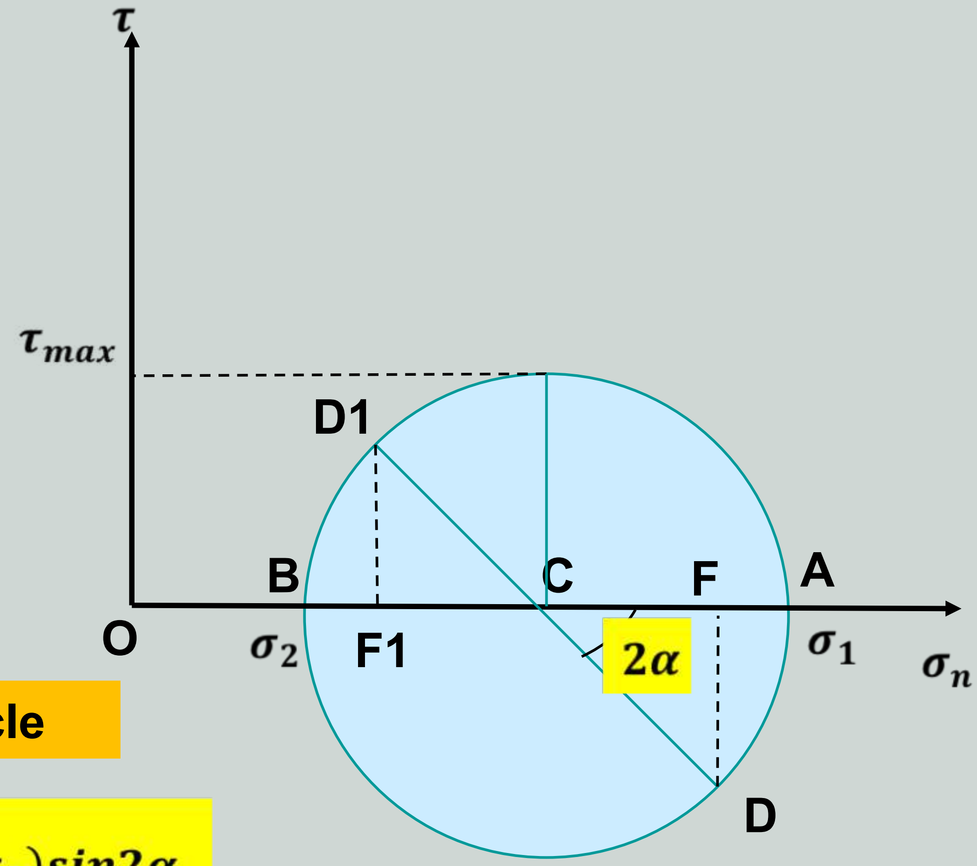
Questions de signes ?

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

D se déplace de A vers B (partie inférieure)

et $$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

D se déplace de B vers A (partie supérieure)



Cisaillement maximal = rayon du cercle

$$\tau = \overline{DF} = \overline{CD}.sin2\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)sin2\alpha$$

et

Pour: sin2 α=1 soit 2 α= $\frac{\pi}{2}$ ou bien. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\tau_{max} = \overline{CD} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Exemple

En un point quelconque d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et partie déviatorique. Que peut représenter la partie déviatorique.

ii) Déterminer les contraintes et directions principales du **tenseur déviatorique**. En déduire les contraintes et directions principales du tenseur initial.

iii) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

iv) Tracer le **tricercle de Mohr** de l'état de contrainte en un point quelconque. Représenter sur le tricercle le vecteur contrainte au point appartenant à la facette dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.

Solution

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i) Partie sphérique et partie déviatorique.

$$[\sigma] = [\sigma]_s + [\sigma]_D$$

Partie Sphérique

$$[\sigma]_s = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} = 3$$

$$[\sigma]_s = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution

Partie Déviatorique

$$[\sigma]_D = [\sigma] - [\sigma]_s$$

$$[\sigma]_D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peur décomposer $[\sigma]_D$ en 02 tenseurs

$$[\sigma]_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cisaillement Plan « x,y »

Cisaillement Plan « x,z »

$[\sigma]_D$ est la superposition de deux cisaillements

Solution

$$[\sigma]_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique.

Il faut résoudre le système

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$([\sigma]_D - \sigma_d.[I])\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Solutions différentes de zéro si:

$$det\,([\sigma]_D - \sigma_d.[I]) = \begin{vmatrix} -\sigma_d & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_d & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma_d \end{vmatrix} = 0$$

Soit

$$(-\sigma_d)[(-\sigma_d).(-\sigma_d)] - 1.[1.(-\sigma_d)] + 1.[-1.(-\sigma_d)] = 0$$

Soit

$$\sigma_{d1} = -\sqrt{2}\ ; \sigma_{d2} = 0\ \ ; \sigma_{d3} = \sqrt{2}$$

Solution

$$[\sigma]_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Directions Principales

$$([\sigma]_D - \sigma_d . [I]) \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \sigma_d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\left[\begin{pmatrix} -\sigma_d & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_d & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma_d \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution

Directions Principales

$$\left[\begin{pmatrix} -\sigma_d & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_d & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma_d \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cas 1: $\sigma_{d1} = -\sqrt{2}$

$$\left[\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}.l_1 + m_1 + n_1 = 0 \\ l_1 + \sqrt{2}.m_1 = 0 \\ l_1 + \sqrt{2}.n_1 = 0 \end{cases}$$

La 2ème et 3ème éqs nous donnent $m_1 = n_1$. et $l_1 = -\sqrt{2}.m_1 = -\sqrt{2}.n_1$

La 1ère équation est vérifiée

Or: $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$; en remplaçant, on aura $2.m_1^2 + m_1^2 + m_1^2 = 1$

$$l_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\quad m_1 = \pm\frac{1}{2} \;;\; n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

Solution

Directions Principales

Cas 2: $\sigma_{d2} = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_2 + n_2 = 0 \\ 1.\, l_2 = 0 \\ 1.\, l_2 = 0 \end{cases}$$

La 1ère nous donne $m_2 = -n_2$. Et les autres $l_2 = 0$

Or: $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$; en remplaçant, on aura $2.\, m_2^2 = 1$ soit $m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

En remplaçant, on aura

$$l_2 = 0 \;\; ; \quad m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; n_2 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution

Directions Principales

Cas 3: $\sigma_{d3} = \sqrt{2}$

$$\left[\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}.\,l_3 + m_3 + n_3 = 0 \\ l_3 - \sqrt{2}.\,m_3 = 0 \\ l_3 - \sqrt{2}.\,n_3 = 0 \end{cases}$$

La 2ème et 3ème éqs nous donnent $m_3 = n_3$. et $l_3 = \sqrt{2}.\,m_3 = \sqrt{2}.\,n_3$

La 1ère équation est vérifiée

Or: $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$; en remplaçant, on aura $2.\,m_3^2 + m_3^2 + m_3^2 = 1$

$$l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad m_3 = \pm\frac{1}{2} \quad ; n_3 = \pm\frac{1}{2}$$

Solution

Tenseur initial

Les contraintes principales du tenseur initial sont égales aux contraintes principales du tenseur déviatorique augmentées de la contrainte moyenne.

$$[\sigma] = [\sigma]_s + [\sigma]_D$$

$$\sigma_i = \sigma_{di} + \sigma_m$$

$$\sigma_1 = \sigma_{d1} + \sigma_m \ ; \sigma_2 = \sigma_{d2} + \sigma_m \ ; \sigma_3 = \sigma_{d3} + \sigma_m \ ;$$

$$\sigma_1 = -\sqrt{2} + 3; \quad \sigma_2 = 3; \quad \sigma_3 = \sqrt{2} + 3$$

Les directions principales du tenseur initial sont les mêmes directions principales du tenseur déviatorique

$$l_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad m_1 = \pm\frac{1}{2} \qquad n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$l_2 = 0 \qquad m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad n_2 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad m_3 = \pm\frac{1}{2} \qquad n_3 = \pm\frac{1}{2}$$

Solution

iii) Contrainte de cisaillement maximale.

avec

$$\tau_1 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \pm\frac{1}{2}\left|-\sqrt{2} - 0\right| = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau_2 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|-\sqrt{2} - \sqrt{2}\right| = \mp\sqrt{2}$$

$$\tau_3 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|0 - \sqrt{2}\right| = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi

$$\tau_{max} = \sqrt{2}$$

Solution

iv) Tricercle de Mohr.

Le cercle de Mohr est défini dans le repère contrainte normale « σ_n » et contrainte tangentielle « τ ».

Comme on a trois (03) plans dans l'espace, on va avoir trois (03) cercles de Mohr.

Il faut donc d'abord définir les expressions de « σ_n » et « τ ».

On sait par définition, dans un repère principal que:

Sachant que les composantes d'une contrainte :

$$\begin{cases} q_x = \sigma_1 . l \\ q_y = \sigma_2 . m \\ q_z = \sigma_3 . n \end{cases}$$

On aura

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 . l^2 + \sigma_2^2 . m^2 + \sigma_3^2 . n^2$$
$$\sigma_n^2 = \sigma_1 . l^2 + \sigma_2 . m^2 + \sigma_3 . n^2$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

On obtient 03 équations à 03 inconnues (l^2, m^2 et n^2) qu'on peut résoudre en les linéarisant.

Solution

La résolution nous donne

$$l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2).(\sigma_1 - \sigma_3) \quad > 0}$$

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3).(\sigma_2 - \sigma_1) \quad < 0}$$

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1).(\sigma_3 - \sigma_2) \quad > 0}$$

Sachant que l^2 , m^2 et n^2 doivent être positifs et que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

On doit avoir

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) < 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0$$

Solution

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) < 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0$$

Si on considère les variables de l'axe de repère « σ_n » suivant l'axe « x » et «τ » suivant l'axe « y », on remarque que les 03 équations représentent des équations de cercles.

Considérons par exemple la 1ère équation. On a

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$$

Soit:

$$\tau^2 + \sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2.\sigma_3 > 0$$

Après réarrangement

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 > \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

Dans le repère (σ_n, τ) c'est l'équation d'un cercle de rayon $\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)$ et de centre $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$

Solution

Les 02 autres équations se calculent de la même manière et on aura 02 autres cercles:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 < \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

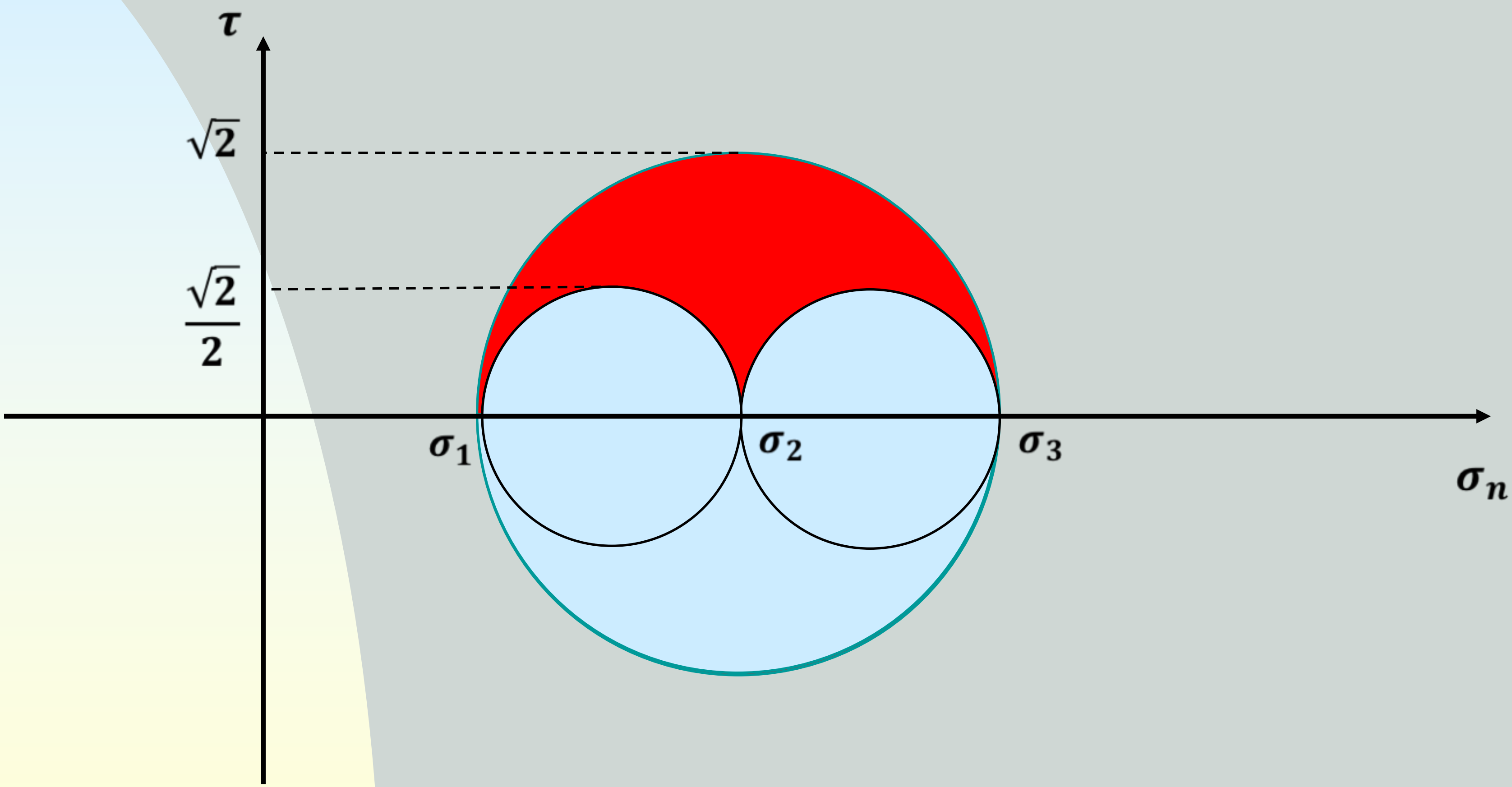
et

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 > \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

On peut maintenant tracer les 03 cercles dans un même repère (σ_n, τ) en respectant les inégalités des équations.

Solution

Soit, avec $\sigma_1 = -\sqrt{2} + 3; \quad \sigma_2 = 3; \quad \sigma_3 = \sqrt{2} + 3$



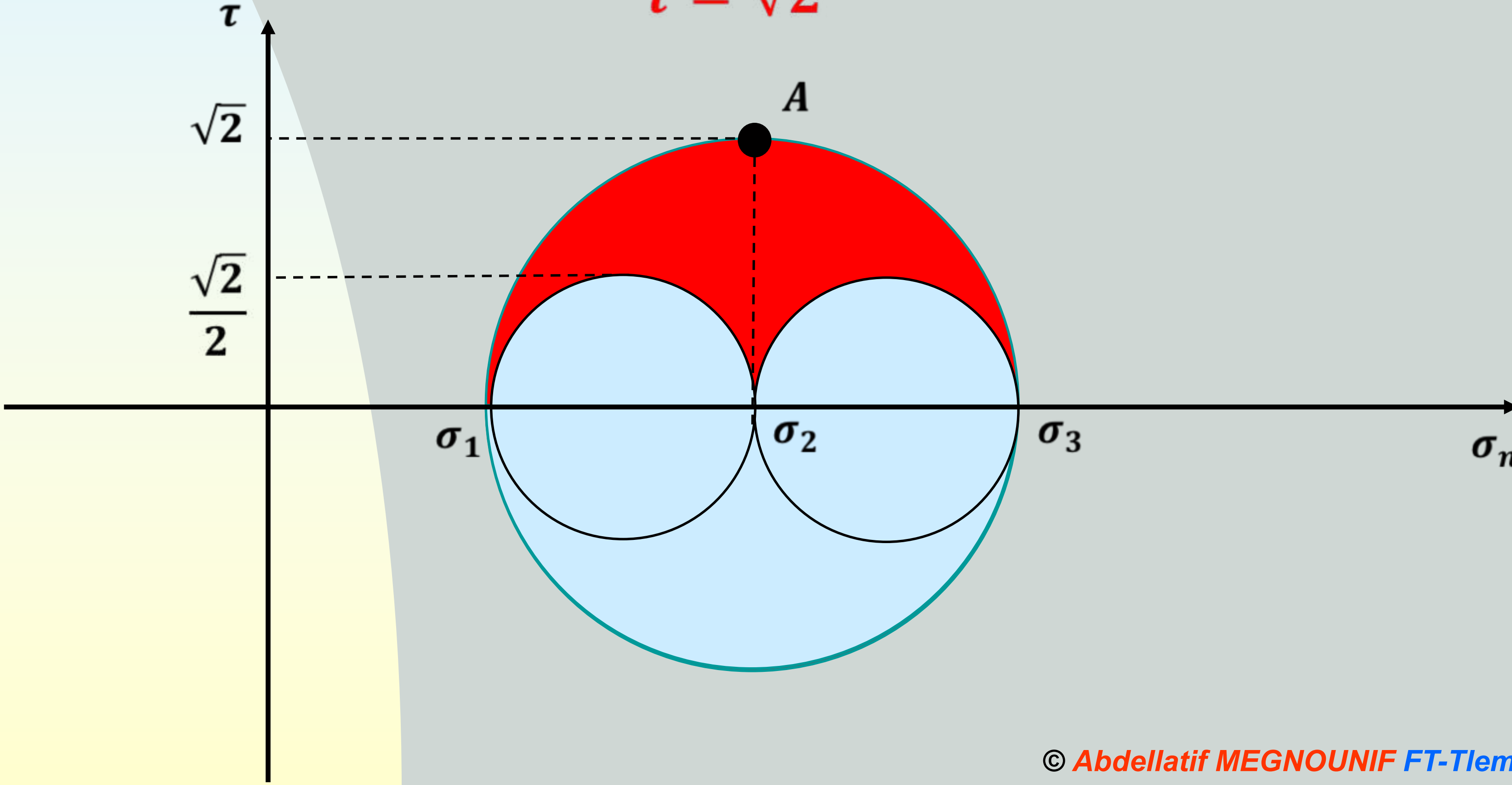
Solution Vecteur contrainte dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.

Soit $l=\frac{\sqrt{2}}{2}$; m=0; $n=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Or : $\sigma_n = l^2.\sigma_1 + m^2.\sigma_2 + n^2.\sigma_3 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(3+\sqrt{2}) = 3$

et $\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = l^2.\sigma_1^2 + m^2.\sigma_2^2 + n^2.\sigma_3^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{2})^2 - 9 = 2$

$$\tau = \sqrt{2}$$



Merci. Fin de l'Application