Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 2

Tenseur des contraintes

Equations d'équilibre
Conditions aux limites

COURS 8 Mardi 21.04.2020

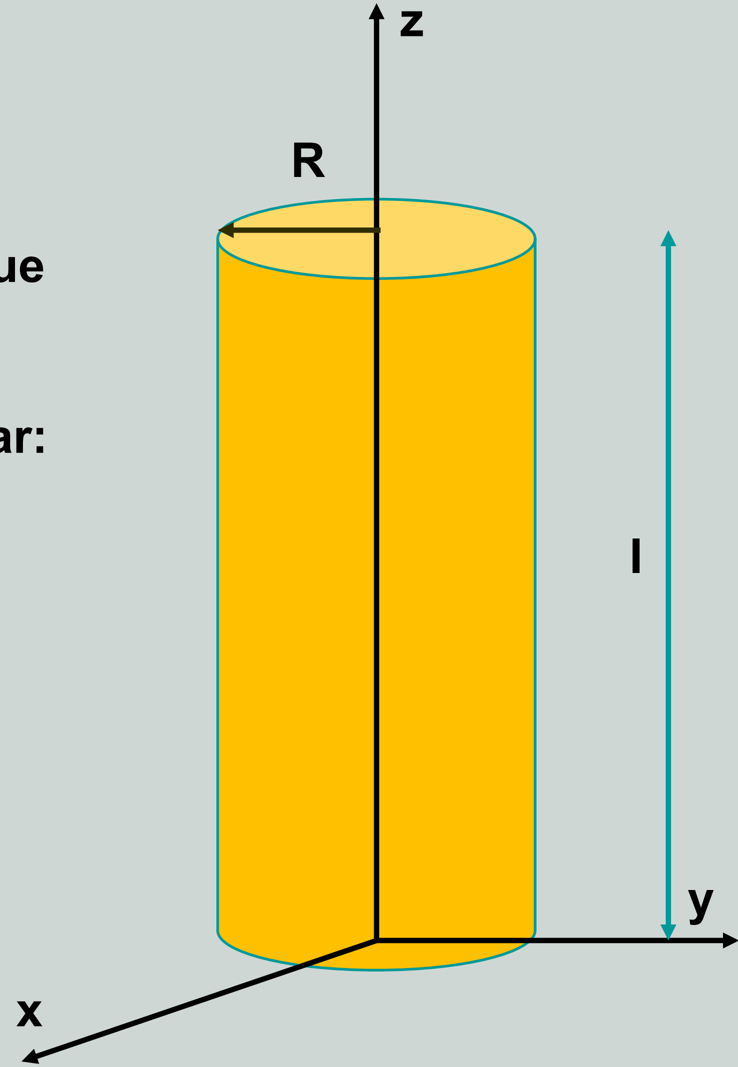
Introduction

Le but de cette application est vérifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites d'une structure quelconque

On aura aussi l'occasion de voir comment passer d'une distribution quelconque en une distribution concentrée des efforts.

Exemple

Le champ de contraintes en un point quelconque d'un corps cylindrique de section transversale circulaire de rayon « R » et dont les bases sont situées dans mes plans z=0 et z=l, est donné par:



$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = \mathrm{a}.x^2 + b.y^2 + c$$
$$\tau_{yz} = d.x.y$$
$$\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z$$

Avec:

ϑ: Coefficient de Poisson du matériau (donné)

a, b, c, d et e : des constantes à déterminer

Les forces de volume sont négligées

Exemple

i) Pour que le cylindre reste en équilibre, les constantes a, b, c, d et e doivent vérifier certaines relations. Trouver lesquelles ?

ii) Si la surface latérale n'est pas chargée, déterminer les conditions de son non chargement.

iii) On suppose maintenant qu'on applique une force concentrée « P » au point (0,0,l) dans la direction des « x ». Calculer alors les constantes a, b, c, d et e.

Solution

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = a.x^2 + b.y^2 + c$$
$$\tau_{yz} = d.x.y$$
$$\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z$$

i) Vérification des équations d'équilibre

Equilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Avec notre tenseur de contraintes on aura:

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$ Vérifiée

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$ Vérifiée

$$2.a.x + d.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x = 0$$

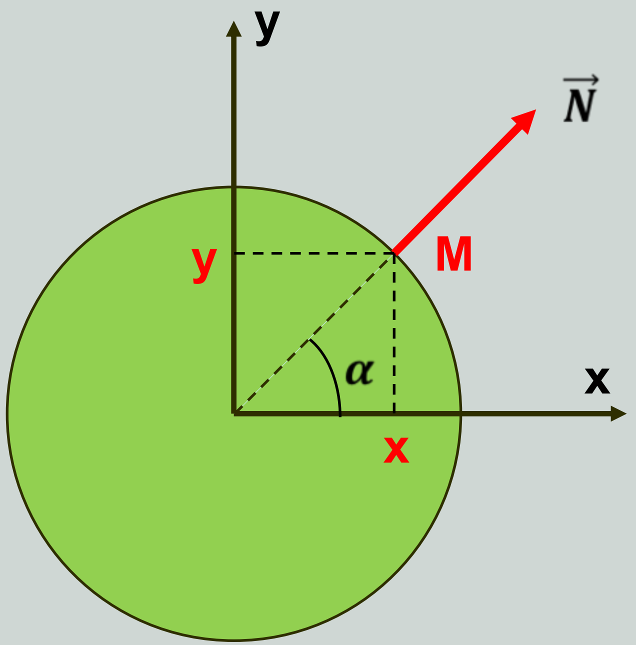
De la 3ème équation, on aura: $\big(2.a + d - 2(1+\vartheta).(a+b)\big)x. = 0$

X étant différent de zéro, on aura

$$\big(2.a + d - 2(1+\vartheta).(a+b)\big) = 0$$

D'où la relation recherchée $\boxed{d - 2.\vartheta.a - 2(1+\vartheta).b = 0}$

Solution



ii) Surface latérale non chargée

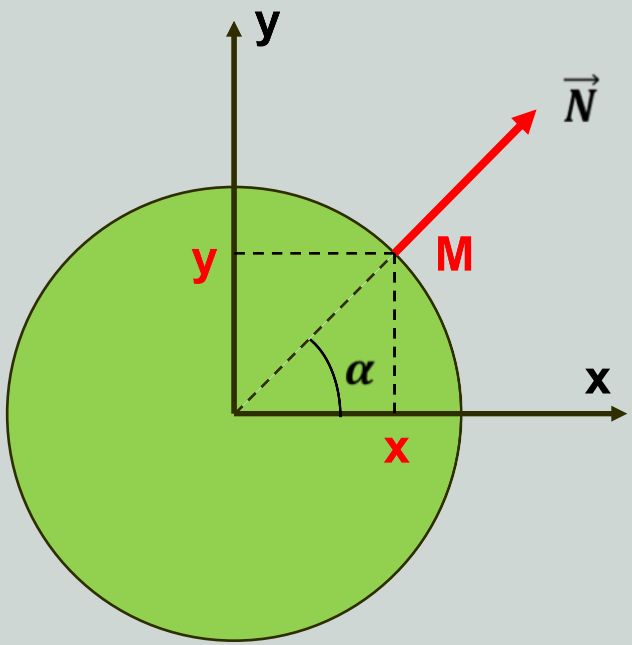
Un point sur la surface latérale dans un plan « z » quelconque est défini par

$$x = R.\cos\alpha$$
$$y = R.\sin\alpha$$
$$\text{Et} \quad x^2 + y^2 = R^2$$

La normale est définie par ses cosinus directeurs

$$l = \cos(N, x) = \cos\alpha$$
$$m = \cos(N, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha) = \sin\alpha$$
$$n = \cos(N, z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Solution



Vérifions les conditions aux limites de chargement sur cette face latérale

On a :

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy} + n.\tau_{xz}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y + n.\tau_{yz}$$
$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} + n.\sigma_z$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = a.x^2 + b.y^2 + c$$
$$\tau_{yz} = d.x.y$$
$$\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z$$

Avec les valeurs de notre tenseur, on aura

$$\bar{X} = \cancelto{0}{l.\sigma_x} + \cancelto{0}{m.\tau_{xy}} + \cancelto{0}{n.\tau_{xz}}$$
$$\bar{Y} = \cancelto{0}{l.\tau_{xy}} + \cancelto{0}{m.\sigma_y} + \cancelto{0}{n.\tau_{yz}}$$
$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} + \cancelto{0}{n.\sigma_z}$$

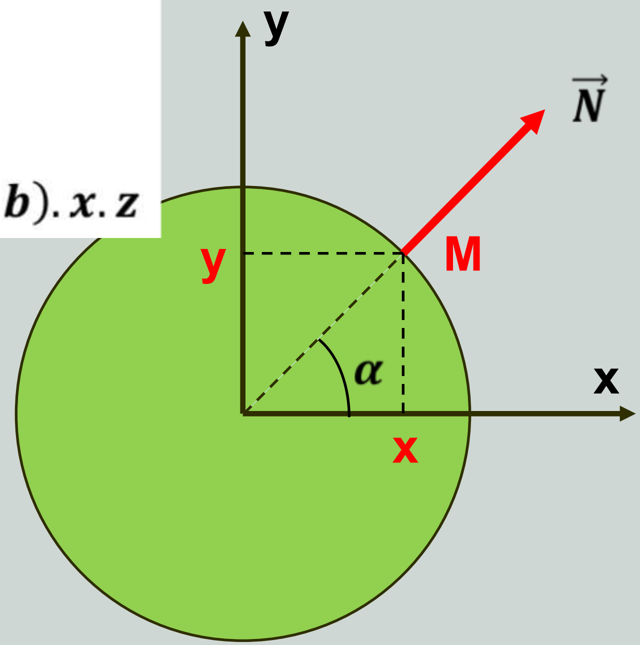
Les 02 premières nous donnent $\bar{X}$= $\bar{Y}$=0 (non chargée suivant x et y.

Pour la 3ème il faut que:

$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} = 0$$

Solution

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = a.x^2 + b.y^2 + c$$
$$\tau_{yz} = d.x.y$$
$$\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z$$



Donc pour la 3ème il faut

$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} = 0$$

soit

$$\cos\alpha.\left(a.x^2 + b.y^2 + c\right) + \sin\alpha.(d.x.y) = 0$$

Sachant $\quad x = R.\cos\alpha$
$\quad y = R.\sin\alpha$

$$\cos\alpha.\left(a.x^2 + b.y^2 + c\right) + \sin\alpha.(d.R\cos\alpha.R\sin\alpha) = 0$$

$$\cos\alpha.\left[\left(a.x^2 + b.y^2 + c\right) + \left(d.R^2\sin^2\alpha\right)\right] = 0$$

$\cos\alpha \neq 0$ Et comme $x^2 + y^2 = R^2$ ou bien $y^2 = R^2 - x^2$

$$a.x^2 + b.(R^2 - x^2) + c + \left(\frac{y}{R}\right)^2.d\,R^2 = 0$$

Solution

$$a.\, x^2 + b.\,(R^2 - x^2) + c + \left(\frac{y}{R}\right)^2 .\, d\, R^2 = 0$$

Avec les simplifications, on aura

$$a.\, x^2 + b.\,(R^2 - x^2) + c + d.\,(R^2 - x^2) = 0$$

Soit

$$(a - b - d).\, x^2 + (b.\, R^2 + C + d.\, R^2) = 0$$

Par identification

$$(a - b - d) = 0$$

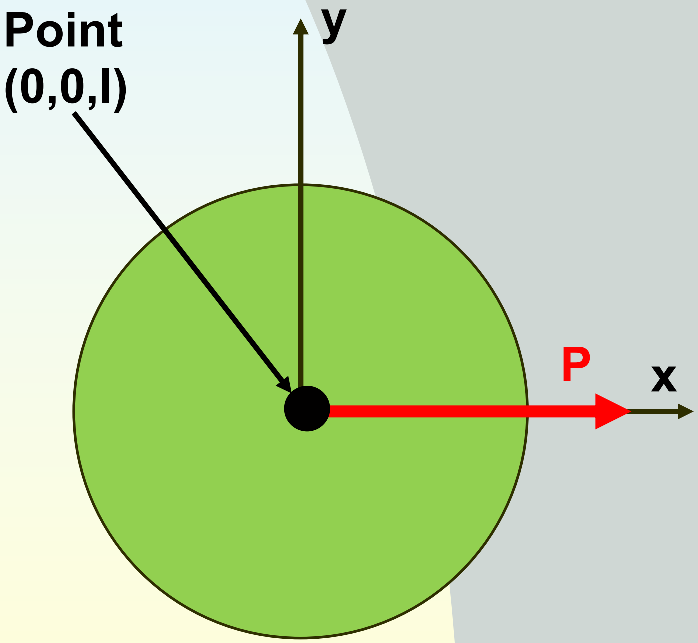
$$b.\, R^2 + C + d.\, R^2 = 0$$

D’où les relations recherchées

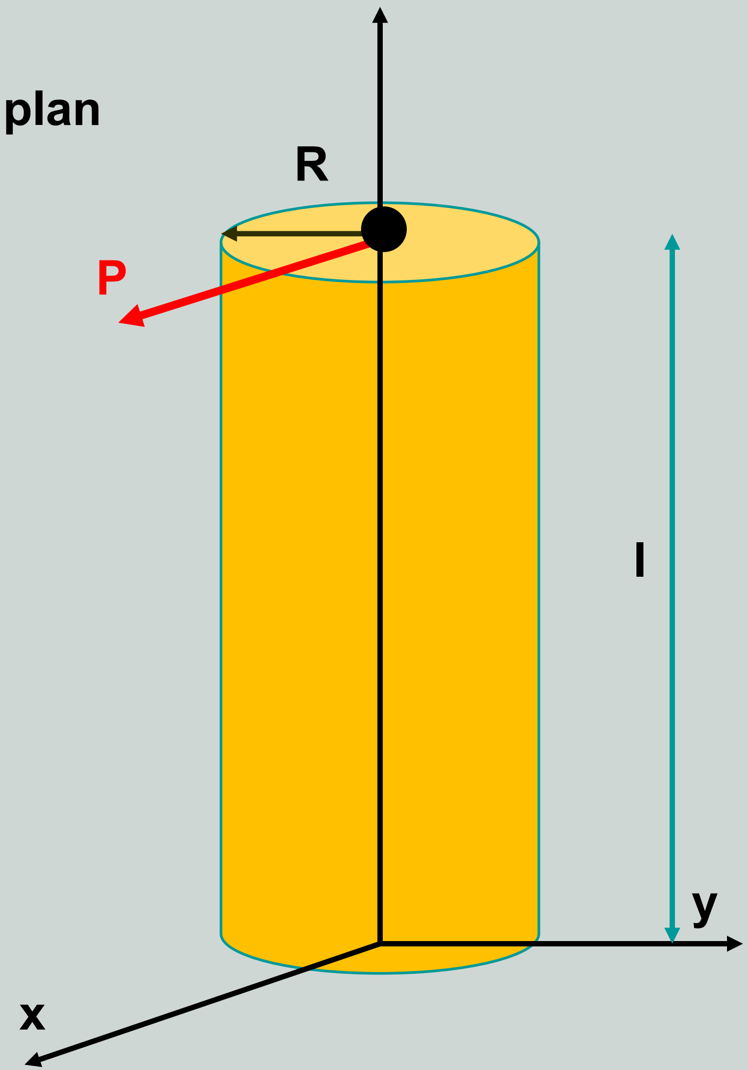
Solution

iii) Charge concentrée au sommet

Un point sur la surface latérale dans un plan « z » quelconque est défini par



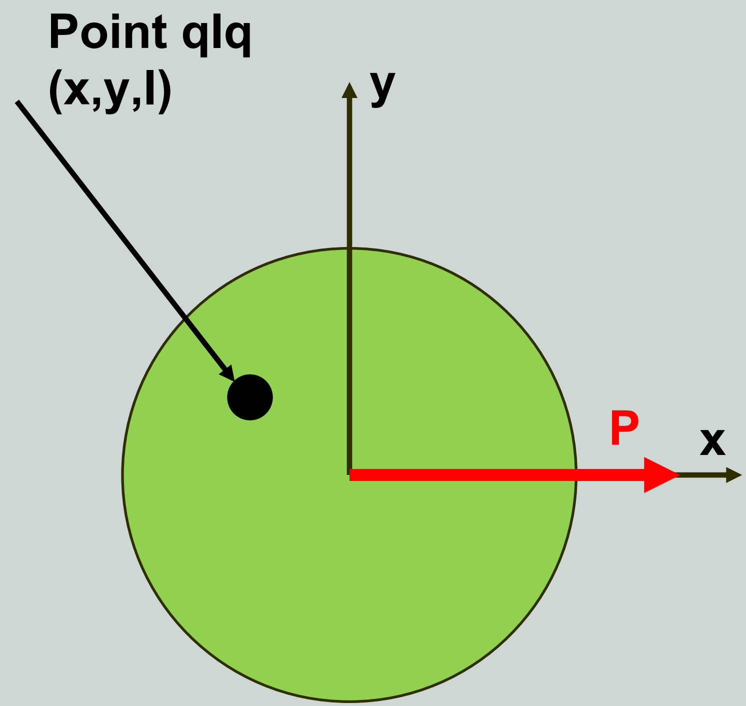
Surface z=l



Solution

Un point quelconque du cercle aura

$$l = \cos(N,x) = 0$$
$$m = \cos(N,y) = 0$$
$$n = \cos(N,z) = \cos(0) = 1$$



La force « P » est concentrée on doit la rendre distribuée sur la surface du cercle. soit

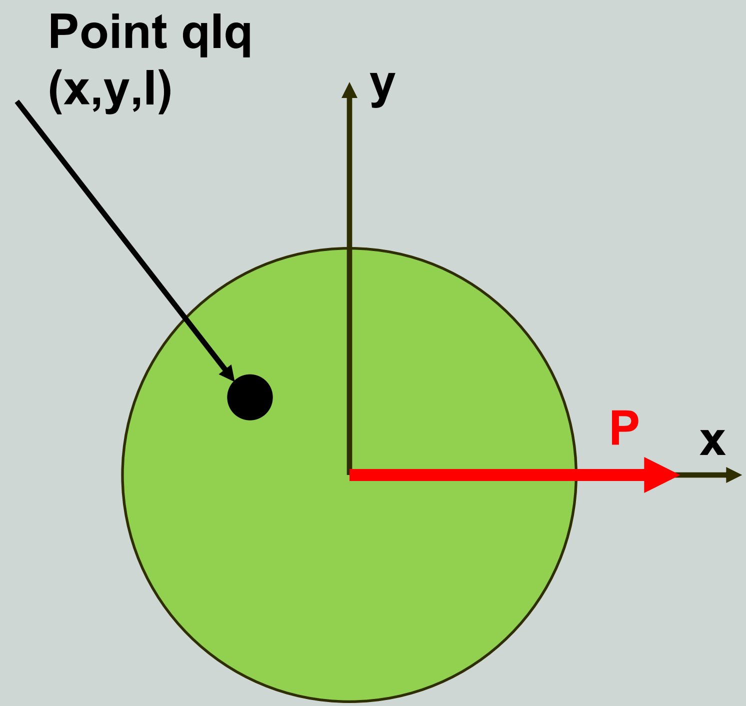
$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy} + n.\tau_{xz}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y + n.\tau_{yz}$$
$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} + n.\sigma_z$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = a.x^2 + b.y^2 + c$$
$$\tau_{yz} = d.x.y$$
$$\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z$$

soit

$$\bar{X} = \frac{P}{\pi.R^2} = \underbrace{l}_{0}.\underbrace{\sigma_x}_{0} + \underbrace{m}_{0}.\underbrace{\tau_{xy}}_{0} + n.\tau_{xz}$$
$$\bar{Y} = 0 = \underbrace{l}_{0}.\tau_{xy} + \underbrace{m}_{0}.\sigma_y + n.\tau_{yz}$$
$$\bar{Z} = 0 = \underbrace{l}_{0}.\tau_{xz} + \underbrace{m}_{0}.\tau_{yz} + n.\sigma_z$$

Solution



$$\bar{X} = \frac{P}{\pi . R^2} = \cancelto{0}{l.\sigma_x} + \cancelto{0}{m.\tau_{xy}} + n.\tau_{xz}$$

$$\bar{Y} = 0 = \cancelto{0}{l.\tau_{xy}} + \cancelto{0}{m.\sigma_y} + n.\tau_{yz}$$

$$\bar{Z} = 0 = \cancelto{0}{l.\tau_{xz}} + \cancelto{0}{m.\tau_{yz}} + n.\sigma_z$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = \mathrm{a}.x^2 + b.y^2 + c$$
$$\tau_{yz} = d.x.y$$
$$\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z$$

Soit

$$n.\tau_{xz} = \mathrm{a}.x^2 + b.y^2 + c = \frac{P}{\pi . R^2}$$

$$n.\tau_{yz} = d.x.y = 0$$

$$n.\sigma_z = e.x - 2(1+\vartheta).(a+b).x.z = 0$$

Avec z=l, on aura les relations finales demandées

$$\mathrm{a}.x^2 + b.y^2 + c = \frac{P}{\pi . R^2}$$
$$d.x.y = 0$$
$$e = 2(1+\vartheta).(a+b).l$$

Merci. Fin de l'Application 2