Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 3

Tenseur des contraintes

Contraintes et Directions Principales

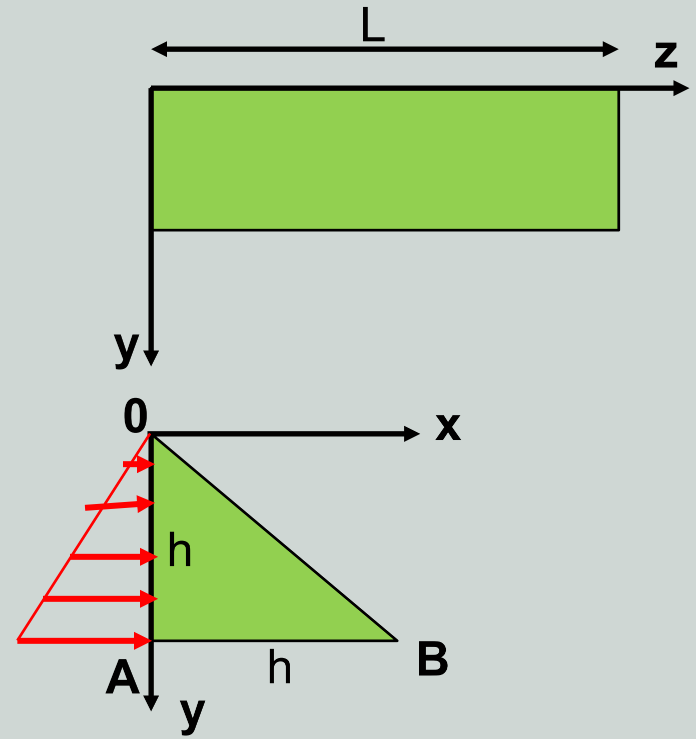
COURS 8 **Mardi 21.04.2020**

Introduction

Le but de cette application est de calculer les contraintes et directions principales d’un tenseur quelconque.

Comment on passera de forces réparties en forces concentrées

Exemple



La distribution de contraintes d'une poutre de masse volumique constante «ρ» et dont la section droite est un triangle rectangle isocèle OAB de coté « h », (la poutre a la forme d'un prisme triangulaire de génératrice parallèle à l'axe « z ») est donnée par :

$$\sigma_x = a_1.x + b_1.y \qquad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_y = a_2.x + b_2.y \qquad ; \quad \tau_{xy} = a_3.x + b_3.y$$

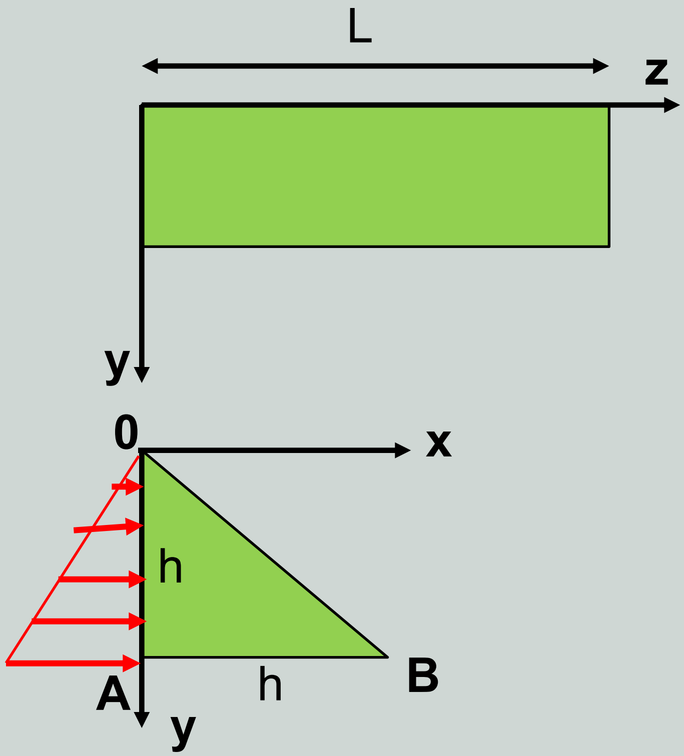
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$

Où «λ» et « G » sont deux constantes positives données dépendant du matériau.

a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 sont des constantes quelconques à déterminer

On suppose que la face « OA » est soumise à une densité de forces de composantes $(\alpha.y, 0, 0)$ où «α» est une constante positive et que la face « OB » n'est pas chargée.

Exemple



i) Déterminer les constantes a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3

ii) Donner les contraintes et directions principales en un point quelconque de la face « OA » puis en un point quelconque de la face « OB ».

iii) Déterminer les forces extérieures appliquées sur la face « AB »

Rem : Le poids propre de la poutre n'est pas négligé

$$\sigma_x = a_1.x + b_1.y \;\; ; \;\; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_y = a_2.x + b_2.y \;\; ; \;\; \tau_{xy} = a_3.x + b_3.y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$

Solution

i) Déterminons a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3

Vérification des équations d'équilibre

Equilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}} + \cancelto{0}{X} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}} + Y = 0$$
$$\cancelto{0}{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}} + \cancelto{0}{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}} + \cancelto{0}{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}} + \cancelto{0}{Z} = 0$$

Le poids propre n'est pas négligé et la direction verticale étant l'axe « y », on aura alors :

X=0; Y= ρg et Z=0

D'où avec notre tenseur on aura:

$$a_1 + b_3 = 0$$
$$a_3 + b_2 + \rho.g = 0$$
$$0 = 0$$

Vérifiée

Ainsi

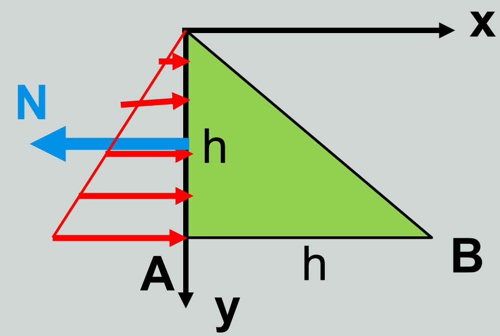
$$\boxed{\begin{aligned} a_1 + b_3 &= 0 \quad (1) \\ a_3 + b_2 + \rho.g &= 0 \quad (2) \end{aligned}}$$

Solution

$$\sigma_x = a_1.x + b_1.y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_y = a_2.x + b_2.y \quad ; \quad \tau_{xy} = a_3.x + b_3.y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$

Conditions aux limites

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy} + n.\tau_{xz}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y + n.\tau_{yz}$$
$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} + n.\sigma_z$$



Face « OA »:

Définie par : x=0; (l,m,n)=(-1,0,0) et chargée par $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$=$(\alpha.y$,0,0)

$$\bar{X} = \alpha.y = (-1).(a_1 x + b_1 y)$$
$$\bar{Y} = 0 = (-1).(a_3 x + b_3 y)$$
$$\bar{Z} = 0 = 0$$

Soit:

$$\bar{X} = \alpha.y = -\cancelto{0}{a_1 x} - b_1 y = -b_1 y$$
$$\bar{Y} = 0 = -\cancelto{0}{a_3 x} - b_3 y$$

Par identification on aura:

(1) $a_1 + b_3 = 0$
$a_3 + b_2 + \rho.g = 0$

$$\alpha.y = -b_1 y$$
$$-b_3 y = 0$$

Soit

$b_1 = -\alpha$ (3)

$b_3 = 0$ (4)

En remplaçant (4) dans (1) on obtient:

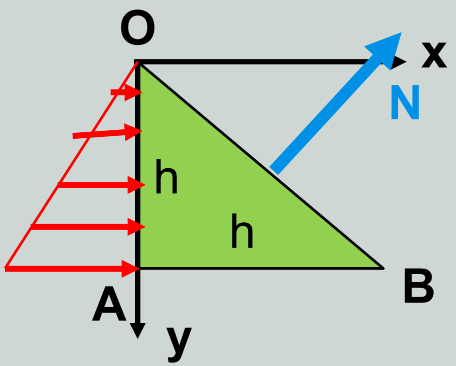
$a_1 = 0$ (5)

Solution

Conditions aux lilmites

$$\sigma_x = a_1.x + b_1.y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_y = a_2.x + b_2.y \quad ; \quad \tau_{xy} = a_3.x + b_3.y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy} + n.\tau_{xz}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y + n.\tau_{yz}$$
$$\bar{Z} = l.\tau_{xz} + m.\tau_{yz} + n.\sigma_z$$



Face « OB »:

Définie par : x=y; (l,m,n)=($\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$) et non chargée par $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$=(0,0,0)

$$\bar{X} = 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(\cancelto{0}{a_1}x + b_1y) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(a_3x + \cancelto{0}{b_3}y)$$
$$\bar{Y} = 0 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(a_3x + \cancelto{0}{b_3}y) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(a_2x + b_2y)$$
$$\bar{Z} = 0 = 0$$

avec

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = -\alpha$$
$$b_3 = 0$$

On aura:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(-\alpha y - a_3x) = 0$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(a_3x - a_2x - b_2y) = 0$$

Solution

$$\sigma_x = a_1.x + b_1.y \;\; ; \;\; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_y = a_2.x + b_2.y \;\; ; \;\; \tau_{xy} = a_3.x + b_3.y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$

soit

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(-\alpha y - a_3 x) = 0$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).(a_3 x - a_2 x - b_2 y) = 0$$

(2) $$\begin{aligned} a_1 + b_3 &= 0 \\ a_3 + b_2 + \rho.g &= 0 \end{aligned}$$

Avec : x=y

$$(-\alpha y - a_3 x) = 0 \quad ; \quad a_3 x = -\alpha.y = -\alpha.x$$
$$(a_3 x - a_2 x - b_2 y) = 0 \qquad (6)$$

De la 1ère par identification, on aura $a_3 = -\alpha$

Or de l'équation (2), $a_3 + b_2 + \rho.g = 0$ On aura $b_2 = \alpha - \rho.g$

De l'équation (6), on peut tirer $(a_3 x - a_2 x - b_2 y) = 0 \; ; (-\alpha.x - a_2 x - (\alpha - \rho.g).x) = 0$

Soit $a_2 x = (-2.\alpha.x + \rho.g.x) = (\rho.g - 2.\alpha).x$

Par identification $a_2 = (\rho.g - 2.\alpha)$

Solution

$$\sigma_x = a_1.x + b_1.y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_y = a_2.x + b_2.y \quad ; \quad \tau_{xy} = a_3.x + b_3.y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$

Ainsi, on a toutes les constantes

$$a_1 = 0 \quad ; \quad a_2 = (\rho.g - 2.\alpha). \quad ; \quad a_3 = -\alpha$$
$$b_1 = -\alpha \, ; \quad b_2 = \alpha - \rho.g \quad ; \quad b_3 = 0$$

Avec ces constantes, le tenseur des contraintes devient:

$$\sigma_x = -\alpha.y$$
$$\sigma_y = (\rho.g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho.g).y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\tau_{xy} = -\alpha.x$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

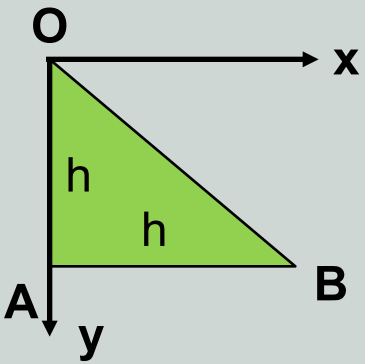
Solution

$$\sigma_x = -\alpha.y$$
$$\sigma_y = (\rho.g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho.g).y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\tau_{xy} = -\alpha.x;\ \tau_{xz} = 0;\ \tau_{yz} = 0$$

ii) Contraintes et directions principales

Face OA

X=0



Le tenseur devient:

$$\sigma_x = -\alpha.y$$
$$\sigma_y = (\alpha - \rho.g).y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(-\rho.g.y)$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

En tenseur, on aura

$$[\sigma]_{OA} = \begin{bmatrix} -\alpha.y & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \rho.g).y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{2(\lambda + G)}.\rho.g.y \end{bmatrix}$$

Solution

Face OA

$$[\sigma]_{OA} = \begin{bmatrix} -\alpha.y & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha-\rho.g).y & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda}{2(\lambda+G)}.\rho.g.y \end{bmatrix}$$

Toutes les contraintes tangentielles sont nulles, ce qui veut qu'on a que des contraintes normales principales:

Contraintes principales

$$\sigma_1 = -\alpha.y \quad ; \quad \sigma_2 = (\alpha-\rho.g).y \quad ; \quad \sigma_3 = \frac{-\lambda}{2(\lambda+G)}.\rho.g.y$$

Directions principales

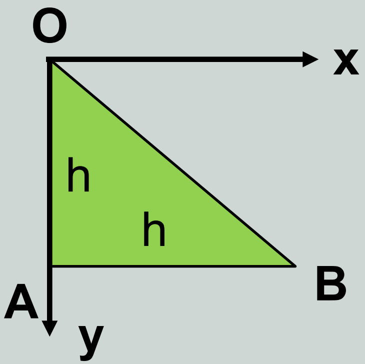
Les directions principales des points de la face « OA » sont directement les axes « x », « y » et « z ».

Solution

$$\sigma_x = -\alpha.y$$
$$\sigma_y = (\rho.g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho.g).y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\tau_{xy} = -\alpha.x;\ \tau_{xz} = 0;\ \tau_{yz} = 0$$

Face OB

x=y



Le tenseur devient:

$$\sigma_x = -\alpha.x$$
$$\sigma_y = -\alpha.x$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{(\lambda + G)}.\alpha.x$$
$$\tau_{xy} = -\alpha.x$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

En tenseur, on aura

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha.x.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{(\lambda + G)} \end{bmatrix}$$

Solution

Face OB

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha.x.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{(\lambda+G)} \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales:

$$\boxed{\sigma_3 = \frac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x}$$

Les 02 autres s'obtiennent par la résolution du problème propre

$$([\sigma]-\sigma[I]).\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \quad \textbf{soit} \quad \begin{pmatrix} -\alpha.x-\sigma & -\alpha.x & 0 \\ -\alpha.x & -\alpha.x-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x-\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Le déterminant = 0;

$$(-\alpha.x-\sigma).\left[(-\alpha.x-\sigma).\left(\frac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x-\sigma\right)\right] + \alpha.x\left[(-\alpha.x).\left(\frac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x-\sigma\right)\right] = 0$$

La résolution nous donne les 02 autres contraintes principales:

$$\boxed{\sigma_1 = 0 \qquad et \qquad \sigma_2 = -2.\alpha.x}$$

Solution

Face OB

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha.x.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{(\lambda+G)} \end{bmatrix}$$

$$l_3 = 0\ ; m_3 = 0\ et\quad n_3 = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha.x-\sigma & -\alpha.x & 0 \\ -\alpha.x & -\alpha.x-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x-\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Pour $\sigma_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -\alpha.x-0 & -\alpha.x & 0 \\ -\alpha.x & -\alpha.x-0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\alpha.x.l_1 - \alpha.x.m_1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad l_1 = -m_1$$

$$-\alpha.x.l_1 - \alpha.x.m_1 = 0$$

$$\frac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x.n_1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad n_1 = 0$$

Or $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$

$$2.l_1^2 = 1 \quad ; \; l_1^2 = \frac{1}{2}$$

En remplaçant on aura

$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ; m_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,et\quad n_1 = 0$$

Solution

Face OB

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha.x.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{(\lambda+G)} \end{bmatrix}$$

Pour $\sigma_2 = -2.\alpha.x$

$$\begin{pmatrix} -\alpha.x-(-2.\alpha.x) & -\alpha.x & 0 \\ -\alpha.x & -\alpha.x-(-2.\alpha.x) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x-(-2.\alpha.x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$+\alpha.x.l_2 - \alpha.x.m_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad l_2 = m_2$$

$$-\alpha.x.l_2 + \alpha.x.m_2 = 0$$

$$\left(\frac{-\lambda}{(\lambda+G)}.\alpha.x + 2.\alpha.x\right).n_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad n_2 = 0$$

Or $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$

$$2.l_2^2 = 1 \quad ; \; l_2^2 = \frac{1}{2}$$

En remplaçant on aura

$$l_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;; m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\, et \quad n_2 = 0$$

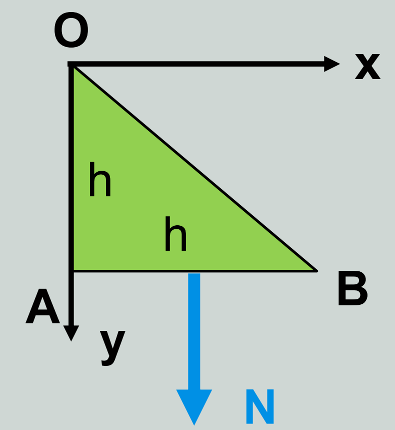
Solution

$$\sigma_x = -\alpha . y$$
$$\sigma_y = (\rho . g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho . g).y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\tau_{xy} = -\alpha . x;\ \tau_{xz} = 0;\ \tau_{yz} = 0$$

iii) Calcul des forces sur la face AB ?

Face AB

y=h **(l,m,n)=(0,1,0)**



Les conditions aux limites seront:

$$\overline{X} = \cancelto{0}{l.\sigma_x} + m.\tau_{xy} + \cancelto{0}{n.\tau_{xz}}$$
$$\overline{Y} = \cancelto{0}{l.\tau_{xy}} + m.\sigma_y + \cancelto{0}{n.\tau_{yz}}$$
$$\overline{Z} = \cancelto{0}{l.\tau_{xz}} + \cancelto{0}{m.\tau_{yz}} + \cancelto{0}{n.\sigma_z}$$

Soit:

$$\overline{X} = -\alpha . x$$
$$\overline{Y} = (\rho . g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho . g).h$$
$$\overline{Z} = 0$$

La face « AB » est chargée suivant « x » et suivant « y ».

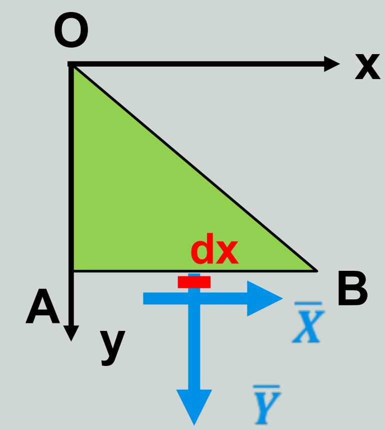
On peut calculer les résultantes de ces forces pour avoir les forces extérieures correspondantes

Solution

Face AB

$$\sigma_x = -\alpha . y$$
$$\sigma_y = (\rho . g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho . g).y$$
$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2.(\lambda + G)}.(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\tau_{xy} = -\alpha . x; \ \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0$$

En prenant la somme de toutes les forces élémentaires, on aura:



$$R_x = \int_0^h \overline{X}\, dx \qquad R_x = \int_0^h -\alpha . x \ dx$$

$$R_y = \int_0^h \overline{Y}\, dx \qquad R_y = \int_0^h (\rho . g - 2.\alpha).x + (\alpha - \rho . g).dx$$

Soit:

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= -\alpha . \frac{h^2}{2} \\ R_y &= -\rho . g . \frac{h^2}{2} \\ R_z &= -0 \end{aligned}}$$

C’est l’équivalent du chargement extérieure appliqué sur la face « AB »

Merci. **Fin de l'Application 3**