Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 5

Calcul des déplacements

Problème de Glissement Simple

COURS 7 **Mardi 21.04.2020**

Introduction

Le but de cette application est de montrer les étapes qui nous permettent de calculer un vecteur de déplacements à partir du tenseur des déformations.

Il vous est demandé de suivre la procédure et de comprendre la logique derrière l'approche de résolution. En fin de compte ce ne sont que des intégrations et des dérivées.

Exemple

Le tenseur des déformations en un point quelconque M(x,y,z) d'une structure est donné par:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où « α » est une constante quelconque non nulle

i) **Calculer les déformations et directions principales de ce tenseur**
ii) **Calculer le vecteur déplacement (u,v,w) en un point quelconque M(x,y,z)**

Solution

Le tenseur considéré est un tenseur correspondant au glissement simple dans le plan (x,z) de valeur (α)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Déformations et directions principales

Il faut résoudre le système

$$([\boldsymbol{\varepsilon}] - \boldsymbol{\varepsilon}.[\boldsymbol{I}]).\begin{pmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Solutions différentes de zéro si:

$$\boldsymbol{det}\,([\boldsymbol{\varepsilon}] - \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{I}]) = \begin{vmatrix} -\epsilon & 0 & \alpha \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

soit

$$(-\boldsymbol{\varepsilon}).[(-\boldsymbol{\varepsilon}).(-\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{0}] + \boldsymbol{\alpha}.[\mathbf{0} - (-\boldsymbol{\varepsilon}).\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0}$$

Solution

$$(-\varepsilon).\left[(-\varepsilon).(-\varepsilon)-0\right]+\alpha.\left[0-(-\varepsilon).\alpha\right]=0$$

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\\ \alpha & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Soit

$$(\varepsilon).\left[-\varepsilon^2+\alpha^2\right]=0$$

Les solutions seront alors

$$(\varepsilon)=0$$
$$\left[-\varepsilon^2+\alpha^2\right]=0$$

soit

$$\varepsilon_1=-\alpha\ ;\ \varepsilon_2=0;\ \ \varepsilon_3=+\alpha$$

Glissement simple dans le plan (x,z)

Nous confirmons que pour un glissement simple, les déformations principales sont égales et de signes opposés, comme pour le cisaillement simple les contraintes principales sont égales et de signes opposés.

Solution

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Directions Principales

$$([\varepsilon] - \varepsilon.[I]).\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Soit

$$\left[\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \alpha \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Solution

Directions Principales

$$\left[\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \alpha \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Cas 1: $\varepsilon_1 = -\alpha$

$$\left[\begin{pmatrix} -(-\alpha) & 0 & \alpha \\ 0 & -(-\alpha) & 0 \\ \alpha & 0 & -(-\alpha) \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha.l_1 + \alpha.n_1 = 0 \quad \Rightarrow l_1 = -n_1$$
$$\alpha.m_1 = 0 \quad \Rightarrow m_1 = 0$$
$$\alpha.l_1 + \alpha.n_1 = 0$$

Avec $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$

D'où Avec $l_1^2 + 0 + l_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow l_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $l_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $m_1 = 0$; $n_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

45° (x,z) négatif

Solution

Directions Principales

$$\left[\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \alpha \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Cas 2: $\varepsilon_2 = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} -(0) & 0 & \alpha \\ 0 & -(0) & 0 \\ \alpha & 0 & -(0) \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha . n_2 = 0 \quad \Rightarrow n_2 = 0$$
$$0 = 0$$
$$\alpha . l_2 = 0 \quad \Rightarrow l_2 = 0$$

$$\text{Avec } l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

D'où

$$\text{Avec } 0 + m_2^2 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad m_2^2 = 1. \quad \Rightarrow m_2 = \pm 1$$

et

$l_2 = 0 \quad ; \quad m_2 = \pm 1; \quad n_2 = 0$

L'axe des « y »

Solution

Directions Principales

$$\left[\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \alpha \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Cas 3: $\varepsilon_3 = +\alpha$

$$\left[\begin{pmatrix} -(+\alpha) & 0 & \alpha \\ 0 & -(+\alpha) & 0 \\ \alpha & 0 & -(+\alpha) \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\alpha.l_3 + \alpha.n_3 = 0 \quad \Rightarrow l_3 = +n_3$$
$$-\alpha.m_3 = 0 \quad \Rightarrow m_3 = 0$$
$$\alpha.l_3 - \alpha.n_3 = 0$$

Avec $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$

D'où Avec $l_3^2 + 0 + l_3^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_3^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $m_3 = 0$; $n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

45° (x,z) positif

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution

Récapitulatif

Déformations Principales

$$\varepsilon_1 = -\alpha \;;\; \varepsilon_2 = 0;\;\; \varepsilon_3 = +\alpha$$

Directions Principales

45° (x,z) négatif

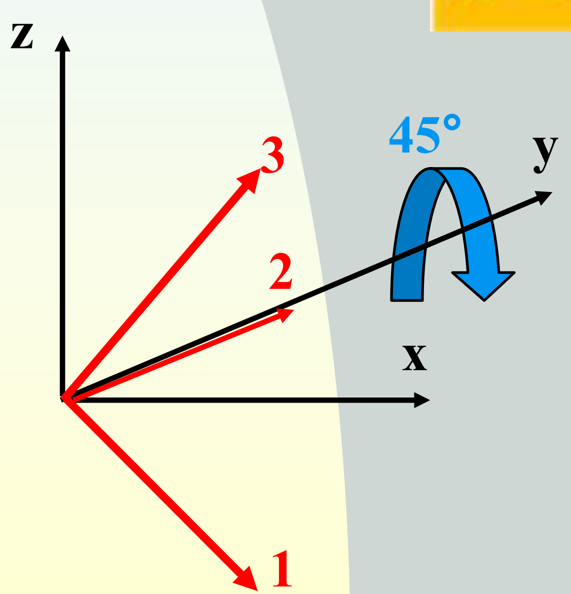
$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad m_1 = 0 \quad ; n_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'axe des « y »

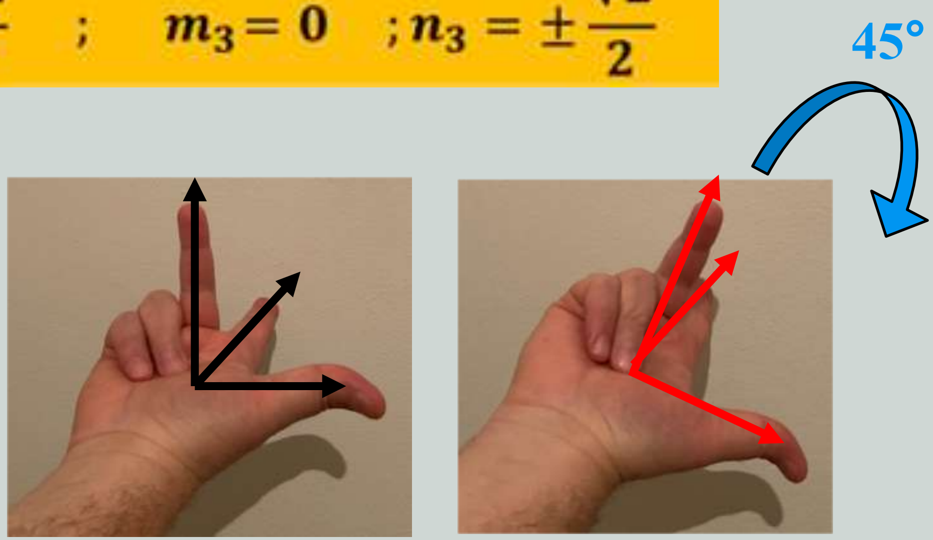
$$l_2 = 0 \quad ; \quad m_2 = \pm 1; \quad n_2 = 0$$

45° (x,z) positif

$$l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad m_3 = 0 \quad ; n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$



et



Solution

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Calcul des déplacements

Pour passer maintenant des déformations aux déplacements, on utilise les équations de compatibilité.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Pour trouver les déplacements (u,v,w), il faut intégrer. Mais il faut que les 06 équations soient vérifiées lors des intégrations.

On peut commencer le processus par n'importe quelle équation.

Solution

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

En intégrant on peut trouver une première forme de w(x,y,z). Soit

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \qquad (2)$$

Où $w_0(x,y)$ est une constante d'intégration en (x,y) puisqu'on a intégré par rapport à « z ». Il faut déterminer ($w_0(x,y)$).

On cherche les déformations où on peut trouver w(x,y,z) ?

Ce sont γ_{xz} et γ_{yz}

Soit:

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad d'où \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2.\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad d'où \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

Solution

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad d'où \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2.\alpha$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad d'où \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

(3)

Des équations (3) on peut tirer

$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2.\alpha - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2.\alpha - \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

(4)

En intégrant ces 02 équations on aura

$$u(x,y,z) = 2.\alpha.z - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}.z + u_0(x,y)$$

$$v(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}.z + v_0(x,y)$$

(4')

Où $u_0(x,y)$ *et* $v_0(x,y)$ sont des constantes en (x,y) puisqu'on a intégré par rapport à « z »

$$u(x,y,z) = 2.\alpha.z - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}.z + u_0(x,y)$$
$$v(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}.z + v_0(x,y)$$

Solution

Pour trouver $u_0(x,y)$ *et* $v_0(x,y)$ on utilise les 03 déformations qui nous restent ε_x; ε_y et γ_{xy}

Soit

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\right).z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right).z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0$$

On a A.z+B = C.z+D d'où par identification : A=C et B=D

Soit:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad et \quad +\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0 \\ -\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0 \quad et \quad +\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Solution

$$-\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad et \quad + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$-\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0 \quad et \quad + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

Soit

$$\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$u(x,y,z) = 2.\alpha.z - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}.z + u_0(x,y)$$

$$v(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}.z + v_0(x,y)$$

Avant d'intégrer ces équations, on regarde d'abord la dernière déformation qui nous reste , γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Rightarrow -\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right).z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right).z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

Solution

$$\gamma_{xy} = 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Rightarrow -\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right).z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right).z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} = 0$$

Soit

$$2.\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right).z + \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

Par identification

$$\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

(8)

Ceci $w_0(x,y)$ ne dépend pas du terme « x.y »

On a toutes les équations, on peut intégrer les équations (6) et (8)

Solution

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La 1ère équation de (6) nous donne

$$\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad d'o\grave{u} \quad \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} = C_1 \quad ; w_0(x,y) = C_1.x + C_2$$

et $$\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0 \quad d'o\grave{u} \quad \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} = B_1 \quad ; w_0(x,y) = B_1.y + B_2$$

Par combinaison, on aura

$$w_0(x,y) = C_1.x + B_1.y + A$$

Les 02 autres équations de (6) nous donnent

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0 \quad ; u_0(x,y) = u_0(y)$$

$$\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0 \quad ; v_0(x,y) = v_0(x)$$

Solution

(8) $$\left(\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

En remplaçant dans la 2ème équation de (8) on aura

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = 0$$

Equation différentielle qui a pour solution une seule:

et

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} = A_1 \quad \Longrightarrow \quad u_0(y) = A_1 . y + A_2$$

$$\frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = -A_1 \Longrightarrow \quad v_0(x) = -A_1 . x + A_3$$

Avec $u_0(y)$, $v_0(x)$ **et** $w_0(x,y)$ **on peut maintenant déterminer les expressions finales des déplacements (équations (2) et (4'))**

Solution

En remplaçant toutes les équations on aura

(4')
$$u(x,y,z) = 2.\alpha.z - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}.z + u_0(x,y)$$
$$v(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}.z + v_0(x,y)$$

(2)
$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Avec $u_0(y)$, $v_0(x)$ et $w_0(x,y)$ on peut maintenant déterminer les expressions finales des déplacements (équations (2) et (4'))

$$u_0(y) = A_1.y + A_2$$
$$v_0(x) = -A_1.x + A_3$$

$$w_0(x,y) = C_1.x + B_1.y + A$$

$$u(x,y,z) = -C_1.z + 2.\alpha.z + A_1.y + A_2$$
$$v(x,y,z) = -B_1.z - A_1.x + A_3$$
$$w(x,y,z) = C_1.x + B_1.y + A$$

Les constantes A, A_1, A_2, A_3, B_1, et C_1 sont des constantes liées aux déplacements. Elles seront déterminées par les conditions aux limites de déplacements.

Il suffit de supposer des appuis pour pouvoir déterminer ces constantes.

Merci. Fin de l'Application 5