Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 6

Cylindre soumis à son poids propre

COURS 7 **Mardi 14.04.2020**

Introduction

Le but de cette application est de montrer comment résoudre un problème complet d'élasticité en résolvant les 15 équations à 15 inconnus.

Bien que l'exemple est simple, un cylindre soumis uniquement à son poids propre, sa résolution nécessite beaucoup d'efforts et de résolution mathématique pour arriver au but.

Il vous est demandé de suivre la procédure et de comprendre la logique derrière l'approche de résolution. En fin de compte ce ne sont que des intégrations et des dérivées.

Exemple

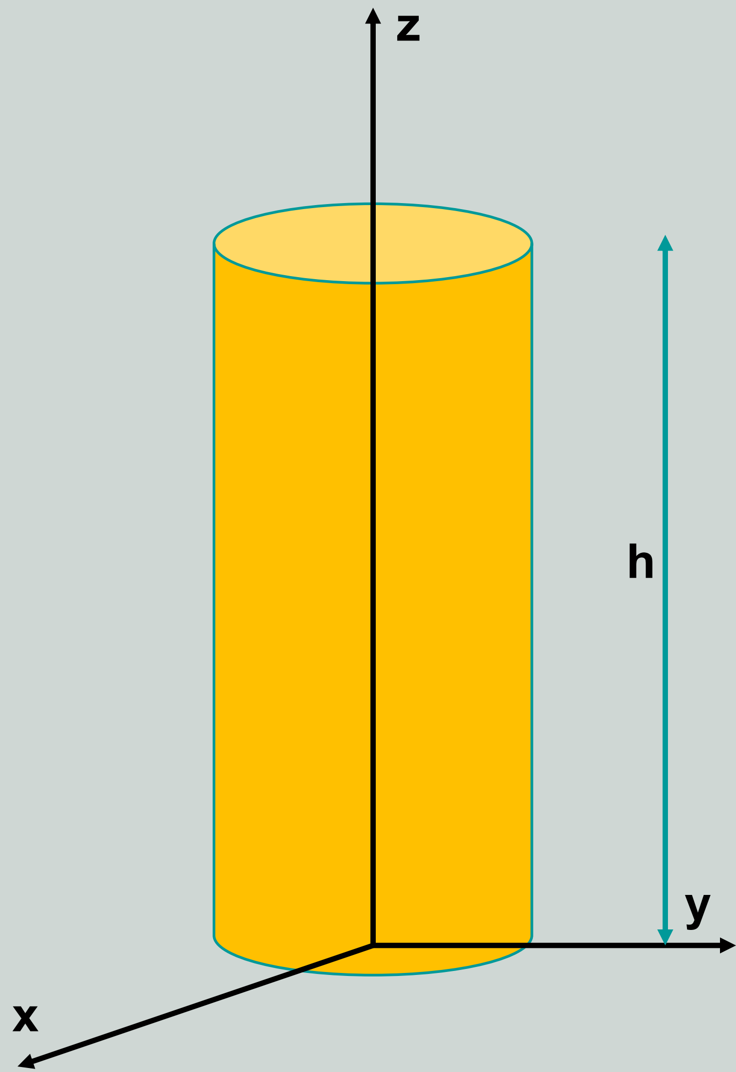
Soit un cylindre soumis uniquement à une contrainte normale $\sigma_z = \rho . g . z$

où

« ρ » est la masse volumique

« g » pesanteur.

$\sigma_x ; \sigma_y ; \tau_{xy} ; \tau_{xz} ; \tau_{yz} = 0$



But: Déterminer les déplacements d'un point M(x,y,z) quelconque u(x,y,z); v(x,y,z) et w(x,y,z) dus à l'action de σ_z

Solution

Pour passer des contraintes aux déplacements, il faut passer par les 15 équations de l'élasticité:

03 équations d'équilibre

06 équations de compatibilité

06 équations de HOOKE.

Equilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad \Rightarrow \quad X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = -\rho . g$$

Sachant que : $\sigma_z = \rho . g . z; \quad et\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

C'est comme si on a l'action du poids propre seulement

Solution

Pour passer des contraintes aux déformations, on utilise les équations de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

En remplaçant par les valeurs de notre tenseur des contraintes, on aura:

$$\varepsilon_x = \frac{-\vartheta.\sigma_z}{E} = \frac{-\vartheta.\rho.g.z}{E}. \quad ; \quad \gamma_{xy} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\vartheta.\sigma_z}{E} = \frac{-\vartheta.\rho.g.z}{E} \quad ; \quad \gamma_{xz} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho.g.z}{E} \quad ; \quad \gamma_{yz} = 0$$

Solution

Pour passer maintenant des déformations aux déplacements, on utilise les équations de compatibilité.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Pour trouver les déplacements (u,v,w), il faut intégrer. Mais il faut que les 06 équations soient vérifiées lors des intégrations.

On peut commencer le processus par n'importe quelle équation.

Solution

Exemple:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho.g.z}{E} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \textbf{(1)}$$

En intégrant on peut trouver une première forme de w(x,y,z). Soit

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\rho g}{E}z^2 + w_0(x,y) \qquad \textbf{(2)}$$

Où $w_0(x,y)$ est une constante d'intégration en (x,y) puisqu'on a intégré par rapport à « z ». Il faut déterminer ($w_0(x,y)$).

On cherche les déformations où on peut trouver w(x,y,z) ?

Ce sont γ_{xz} et γ_{yz}

Soit:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ; \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

Solution

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\rho g}{E}z^2 + w_0(x,y)$$

En utilisant l'équation (2) on trouve:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \qquad \textbf{(4)}$$

En intégrant ces 02 équations, on peut trouver les premières fonctions de u(x,y,z) et v(x,y,z). Notons que l'intégration se fait suivant « z » et que les membres à droite ne dépendent que de (x,y) sont donc constants par rapport à « z ». Par intégration on aura:

$$u(x,y,z) = -z.\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + u_0(x,y)$$
$$v(x,y,z) = -z.\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + v_0(x,y) \qquad \textbf{(5)}$$

Où $u_0(x,y)$ et $v_0(x,y)$ sont des constantes d'intégration en (x,y) puisqu'on a intégré par rapport à « z ». Il faut $u_0(x,y)$ et $v_0(x,y)$.

Solution

On cherche les déformations où on peut trouver u(x,y,z) ey v(x,y,z)?

Ce sont ε_x **et** ε_y

or

$$\varepsilon_x = \frac{-\vartheta.\rho.g.z}{E} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\vartheta.\rho.g.z}{E} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

En remplaçant les expressions de u et v de l'équation (5), en les dérivant respectivement par rapport à « x » et « y » on aura:

$$u(x,y,z) = -z.\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + u_0(x,y)$$

$$v(x,y,z) = -z.\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + v_0(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}.z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = -\frac{\vartheta.\rho.g}{E}.z \qquad \textbf{(6)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}.z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = -\frac{\vartheta.\rho.g}{E}.z$$

Solution

Par identification membre à membre des équations (6), on peut écrire

A.z + B = C.z + 0   on aura: A=C et B=0

Soit pour les équations (6):

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\vartheta.\rho.g}{E}$$
$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\vartheta.\rho.g}{E} \qquad \textbf{(7)}$$

et

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Solution

Avant d'intégrer les équations (7) et (8) il nous reste à vérifier la dernière équation de compatibilité:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$u(x,y,z) = -z.\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + u_0(x,y)$$
$$v(x,y,z) = -z.\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + v_0(x,y)$$

En utilisant les expressions (5) de u(x,yz) et v(x,y,z) on aura:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}.z + \frac{\partial u_0}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}.z + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

La somme nous donne:

$$\gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y}.z + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Solution

Toujours Par identification on aura:

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

La première veut dire que la fonction $w_0(x,y)$ ne dépend pas du produit « x.y »

On peut maintenant intégrer les équations (7) et (8) quoi donnent:

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\vartheta.\rho.g}{E}$$
$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\vartheta.\rho.g}{E}$$

Les 02 équations (7) en même temps nous donnent:

$$w_0(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\vartheta \rho g}{E}(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + a_3 \qquad \textbf{(12)}$$

Avec a_1; a_2 et a_3 sont des constantes d'intégration

Solution

L'intégration des 02 équations (8) nous donne:

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_0(y)$$
$$\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0(x) \qquad \textbf{(13)}$$

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

En remplaçant ceci dans la 2ème équation de (11) on aura:

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

La seule solution de cette équation différentielle est:

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} = A \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = -A \qquad \textbf{(15)}$$

Solution

En intégrant les équations (15) on aura:

$$u_0(y) = A\,y + B$$
$$v_0(x) = -\,A\,x + C \qquad \textbf{(16)}$$

Ainsi on a pu trouver toutes les constantes u_0; v_0 et w_0.Èn les remplaçant dans les expressions (2) et (5) on trouvera les expressions finales des déplacements en n'importe quel point M(x,y,z). Soit:

$$u(x,y,z) = -\frac{\vartheta\rho g}{E}.z.x - a_1 z + Ay + B$$
$$v(x,y,z) = -\frac{\vartheta\rho g}{E}.z.y - a_2 z - Ax + C \qquad \textbf{(17)}$$
$$w(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\rho g}{E}(\vartheta x^2 + \vartheta y^2 + z^2) + a_1 x + a_2 y + a_3$$

Solution

Les constantes : a_1; a_2 et a_3: A; B et C sont des constantes qui peuvent être déterminées par des conditions aux limites de déplacements. Ce sont des constantes liées aux déplacements.

Il suffit de supposer des appuis au niveau du cylindre pour pouvoir déterminer ces constantes.

Exemple comme conditions aux limites de support:

Si on n'a pas de rotation on peut éliminer a_1; a_2 et A (constantes liées à des fonctions linéaires).

Si on n'a pas de déplacement latéral alors. B=C=0

Si le point (0,0,l) (sommet) n'est pas déplacé verticalement (w(0,0,l)=0) on aura:

$$a_3 = -\frac{1}{2}\frac{\rho g}{E}(l^2)$$

Dans ce cas on aura:

$$u(x,y,z) = -\frac{\vartheta \rho g}{E}.z.x$$

$$v(x,y,z) = -\frac{\vartheta \rho g}{E}.z.y$$

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{\rho g}{E}(\vartheta x^2 + \vartheta y^2 + z^2 - l^2)$$

Merci. **Fin de l'Application 6**