Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 7

Elasticité Plane
Poutre Console

COURS 10 **Mardi 28.04.2020**

Application

Le but de cette application est d'appliquer les principes de l'élasticité plane pour une poutre en utilisant la notion de la fonction d'Airy, pour montrer la simplicité de la solution.

Les résultats seront comparés à ceux de la théorie des poutres classique.

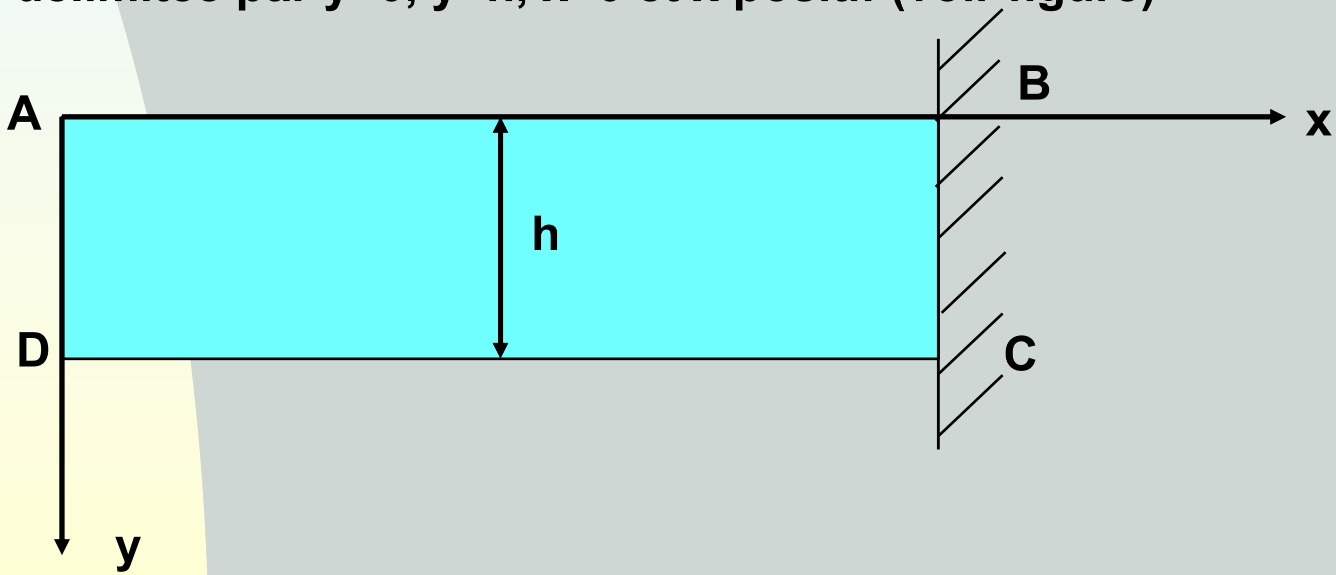
Application

Montrer que la fonction

$$\varphi(x,y) = -\frac{F}{h^3}.x.y^2(3.h-2.y)$$

Est une fonction d'Airy.

Trouver le chargement extérieur correspondant à cette fonction pour le cas d'une poutre délimitée par y=0, y=h, x=0 et x positif (voir figure)



On néglige le poids propre

Application

Pour que $\varphi(x,y)$ soit une fonction d'Airy, il faut 03 conditions

i) Il faut qu'elle vérifie l'équation bi-harmonique.

$$\nabla^4\varphi(x,y) = \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

ii) Il faut que la fonction donne une distribution de contraintes

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y} - \rho.g.x$$

iii) Il faut que la distribution de contraintes vérifie toutes les conditions aux limites

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

Application

i) Il faut qu'elle vérifie l'équation bi-harmonique.

$$\nabla^4\varphi(x,y) = \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

avec

$$\varphi(x,y) = -\frac{F}{h^3}.x.y^2(3.h - 2.y)$$

$$\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} = 0 \qquad \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

D'où

$$\nabla^4\varphi(x,y) = \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial y^4} = 0$$

Est vérifiée

La fonction $\varphi(x,y)$ est bi-harmonique.

Application

ii) Il faut que la fonction donne une distribution de contraintes

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x \partial y} - \cancelto{0}{\rho.g.x} = \frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

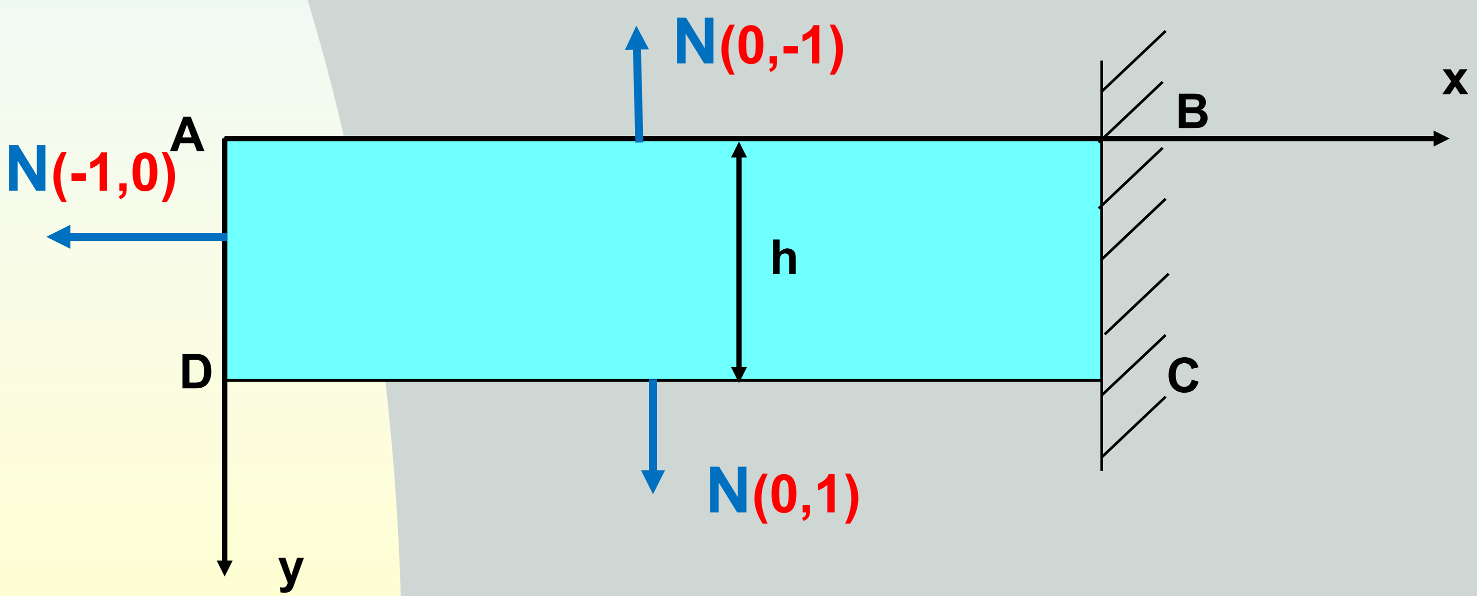
On néglige le poids propre

Application

iii) Il faut que la distribution de contraintes vérifie toutes les conditions aux limites

$$\bar{X} = l.\sigma_x + m.\tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l.\tau_{xy} + m.\sigma_y$$

$$\bar{X} = \left(-\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y\right).l + \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).m$$
$$\bar{Y} = \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).l$$



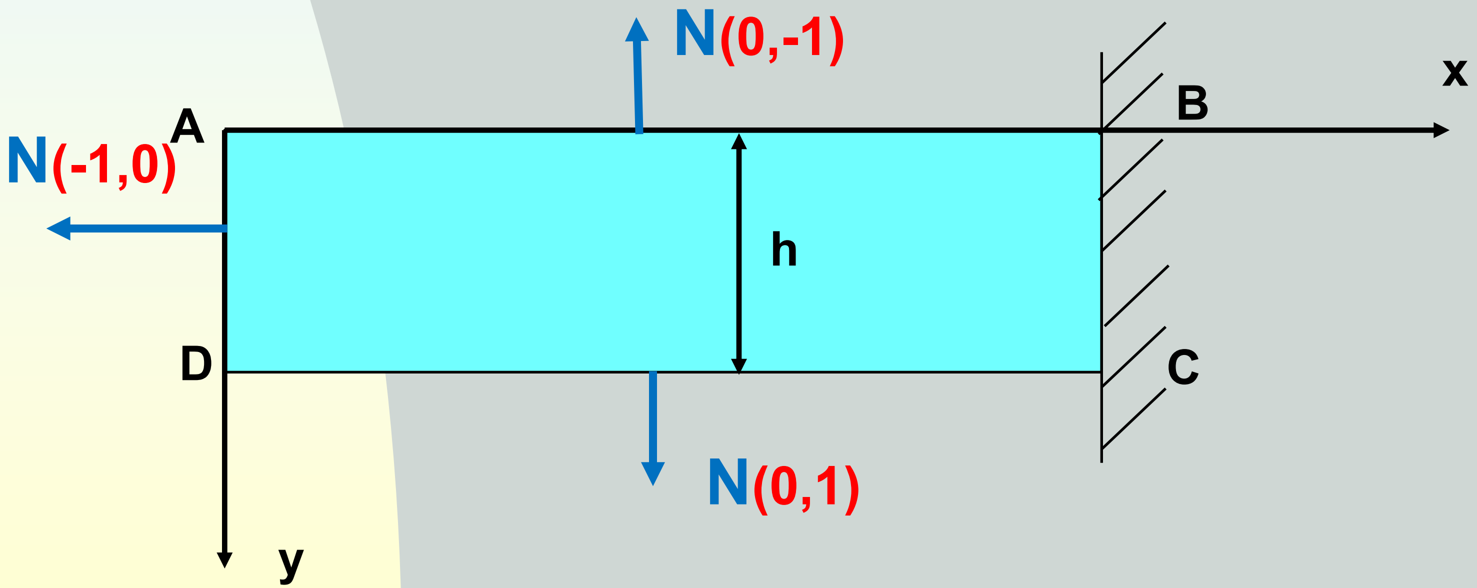
Application

Face AB : (l,m)=(0,-1) et y=0

$$\bar{X} = \left(-\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y\right).l + \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).m$$
$$\bar{Y} = \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).l$$

$$\bar{X} = 0$$
$$\bar{Y} = 0$$

Face non Chargée



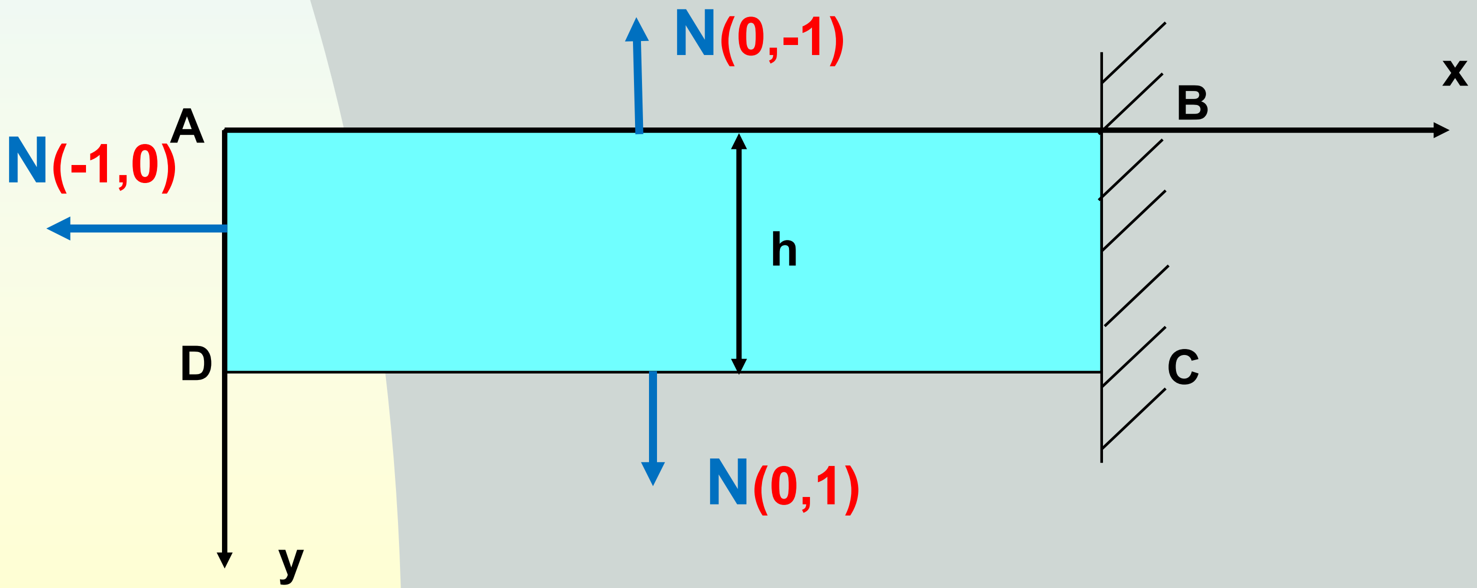
Application

$$\overline{X} = \left(-\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y\right).l + \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).m$$
$$\overline{Y} = \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).l$$

Face CD : (l,m)=(0,1) et y=h

$$\overline{X} = \frac{6.F.h}{h^2} - \frac{6.F.h^2}{h^3} = 0$$
$$\overline{Y} = 0$$

Face non Chargée



Application

$$\overline{X} = \left(-\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y\right).l + \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).m$$

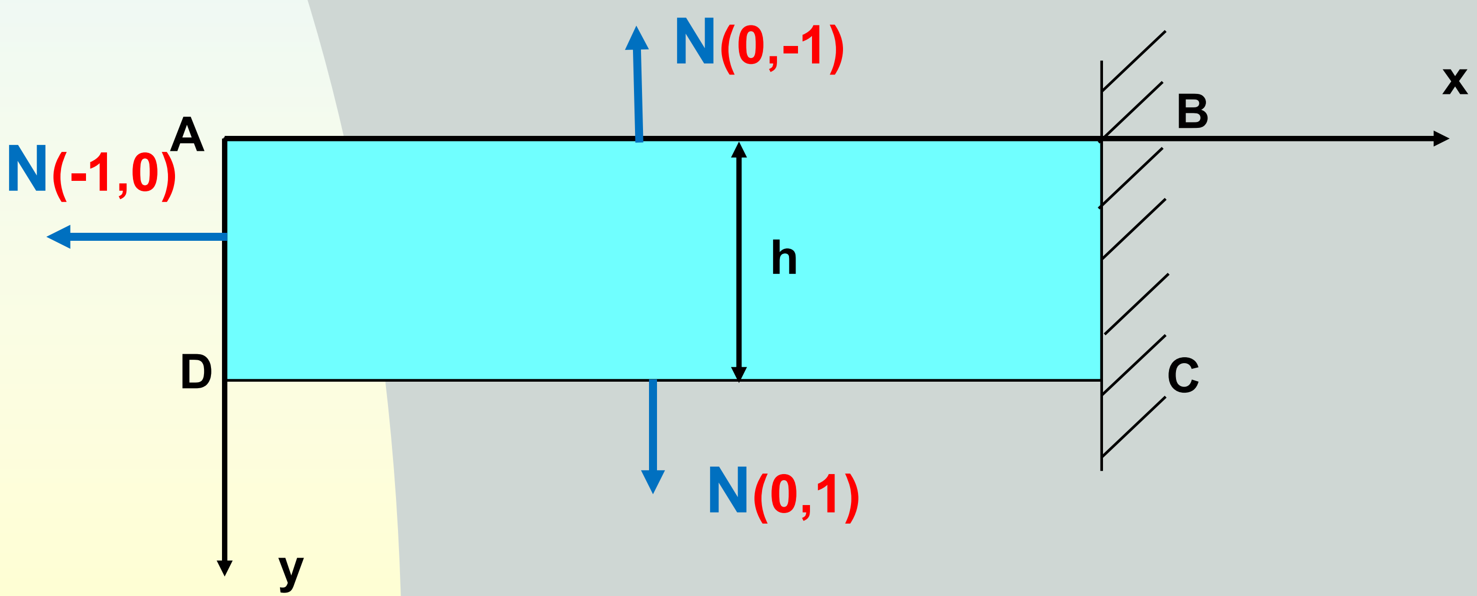
$$\overline{Y} = \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).l$$

Face AD : (l,m)=(-1,0) et x=0

$$\overline{X} = 0$$

$$\overline{Y} = -\frac{6.F.y}{h^2} + \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

Face chargée uniquement suivant « y »



Application

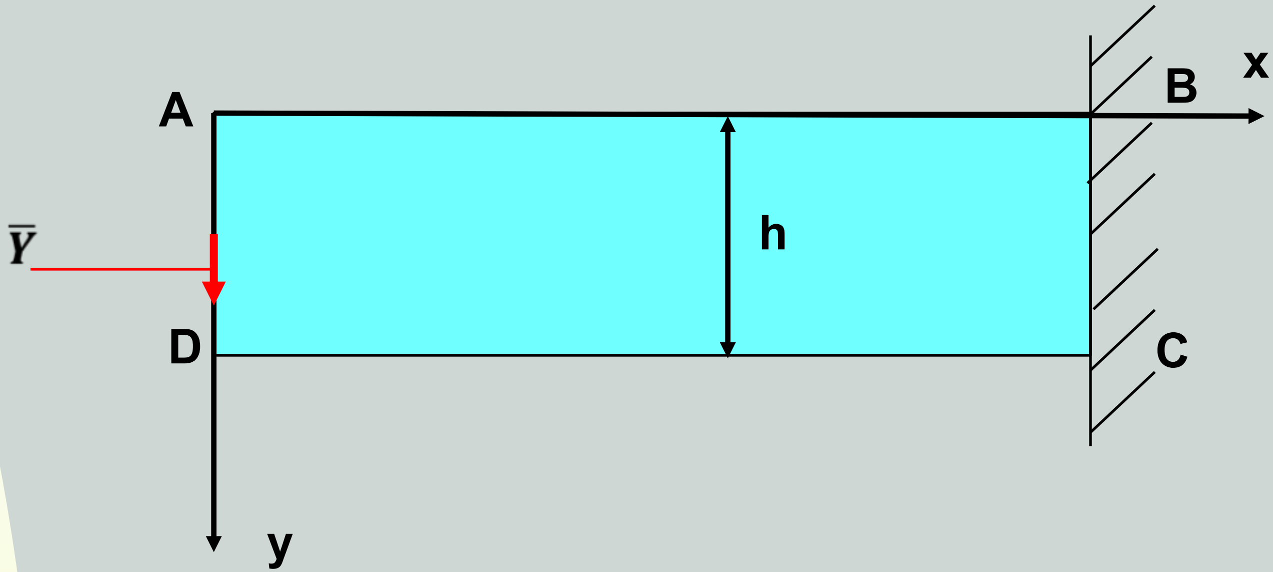
$$\bar{X} = \left(-\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y\right).l + \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).m$$

$$\bar{Y} = \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).l$$

$$\bar{X} = 0$$

$$\bar{Y} = -\frac{6.F.y}{h^2} + \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

Que peut représenter cette distribution de charge extérieure sur la poutre ?



La charge $\bar{Y}$ est appliquée sur une surface élémentaire « dx.dy » avec dx=1

Application

$$\overline{X} = 0$$

$$\overline{Y} = -\frac{6.F.y}{h^2} + \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

On aura donc comme force élémentaire

dF= $\overline{Y}$.dx.dy= $\overline{Y}$.dy

En prenant la résultante (somme) on aura

$$\int_0^h \overline{Y}.dy = \int_0^h \left(-\frac{6.F.y}{h^2} + \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).dy = -\frac{6.F.y^2}{h^2.2}\Bigg|_0^h + \frac{6.F.y^3}{h^3.3}\Bigg|_0^h = -3.F + 2.F$$

$$\boxed{\int_0^h \overline{Y}.dy = -F}$$

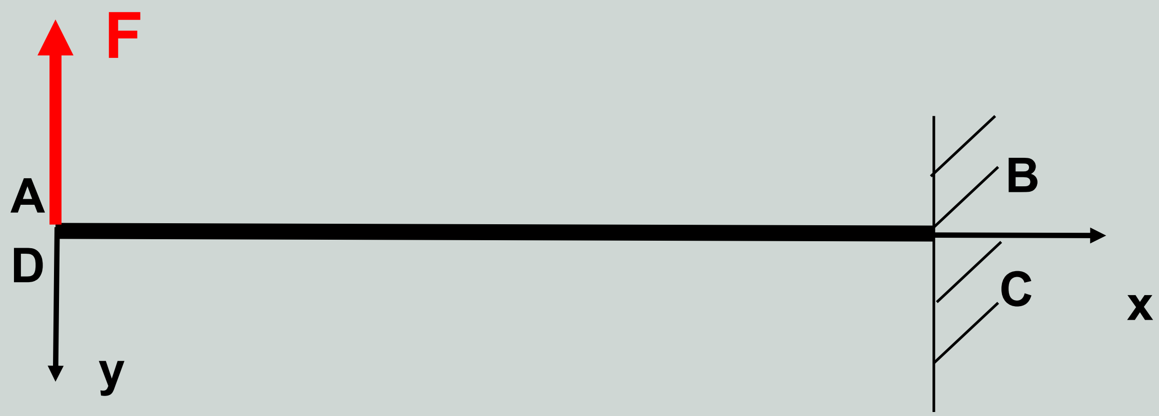


Schéma statique équivalent: Consol soumise à une force concentrée à son extrémité

Application

$$\bar{X} = \left(-\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y\right).l + \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).m$$

$$\bar{Y} = \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).l$$

On peut calculer les réactions au niveau de l'encastrement

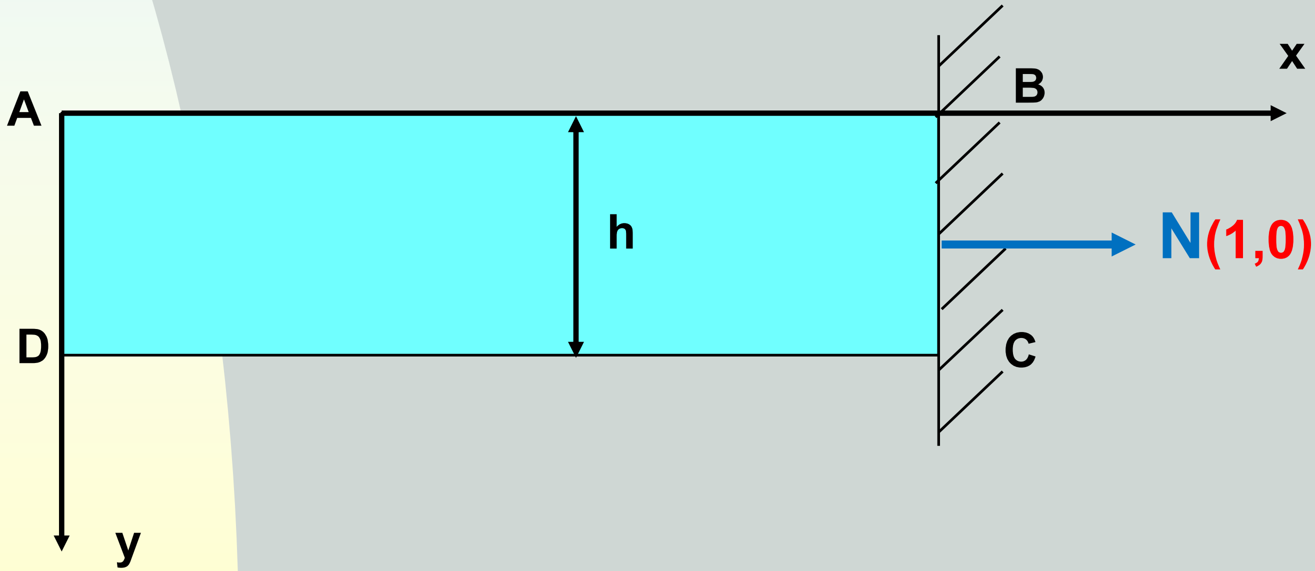
Face BC : (l,m)=(1,0) et x=l et $0 \le y \le h$

$$\bar{X} = -\frac{6.F}{h^2}.x + \frac{12.F}{h^3}.x.y$$

$$\bar{Y} = \frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

$$\bar{X} = -\frac{6.F}{h^2}.l + \frac{12.F}{h^3}.l.y$$

$$\bar{Y} = \frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}$$



$$\bar{X} = -\frac{6.F}{h^2}.l + \frac{12.F}{h^3}.l.y$$
$$\bar{Y} = \frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

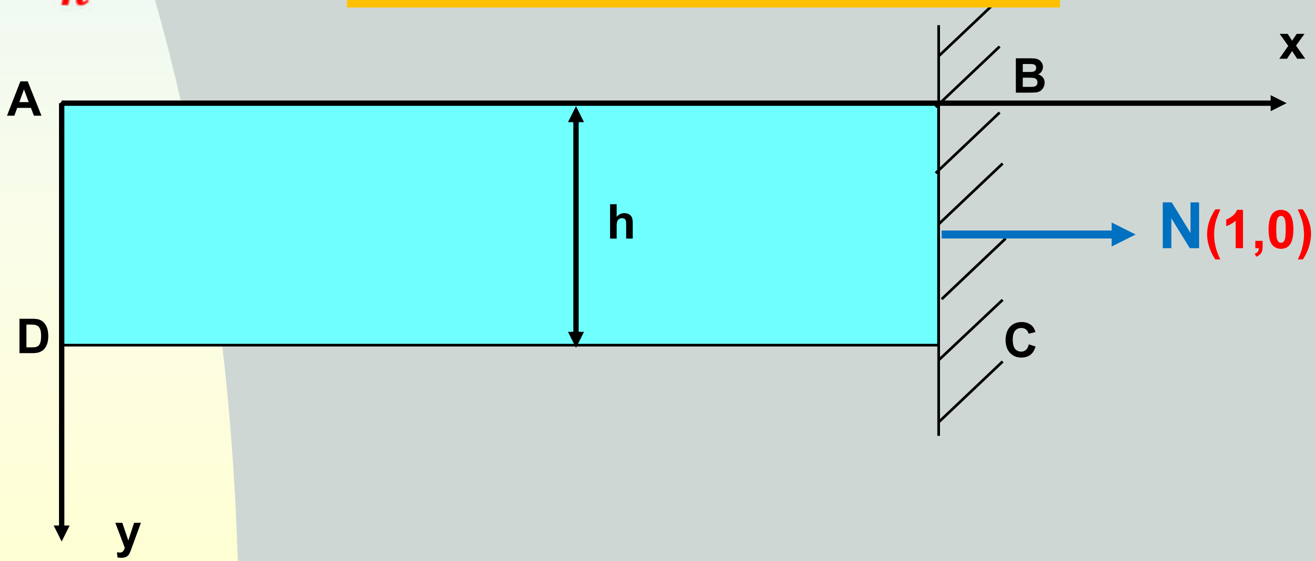
Application

On calcule les réactions d'encastrement suivant « x », suivant « y » et le moment d'encastrement

Réaction suivant « x »

$$\int_0^h \bar{X}.dy = \int_0^h \left(-\frac{6.F.l}{h^2} + \frac{12.F.l.y}{h^3}\right).dy = -\frac{6.F.l.y}{h^2}\Bigg|_0^h + \frac{12.F.l.y^2}{h^3.2}\Bigg|_0^h$$
$$= -\frac{6.F.l}{h} + \frac{6.F.l}{h} = 0$$

Réaction suivant « x » nulle



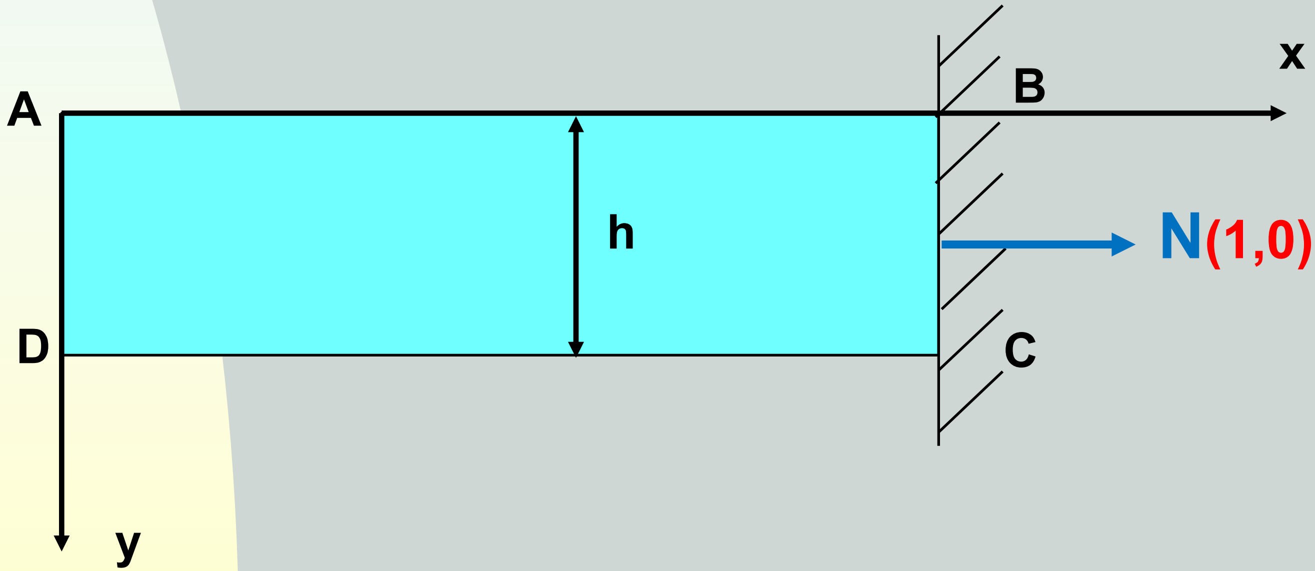
$$\bar{X} = -\frac{6.F}{h^2}.l + \frac{12.F}{h^3}.l.y$$
$$\bar{Y} = \frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

Application

Réaction suivant « y »

$$\int_0^h \bar{Y}.dy = \int_0^h \left(\frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}\right).dy = \left.\frac{6.F.y^2}{h^2.2}\right|_0^h - \left.\frac{6.F.y^3}{h^3.3}\right|_0^h$$
$$= \frac{6.F}{2} - \frac{6.F}{3} = F$$

Réaction suivant « y » = F



$$\bar{X} = -\frac{6.F}{h^2}.l + \frac{12.F}{h^3}.l.y$$
$$\bar{Y} = \frac{6.F.y}{h^2} - \frac{6.F.y^2}{h^3}$$

Application

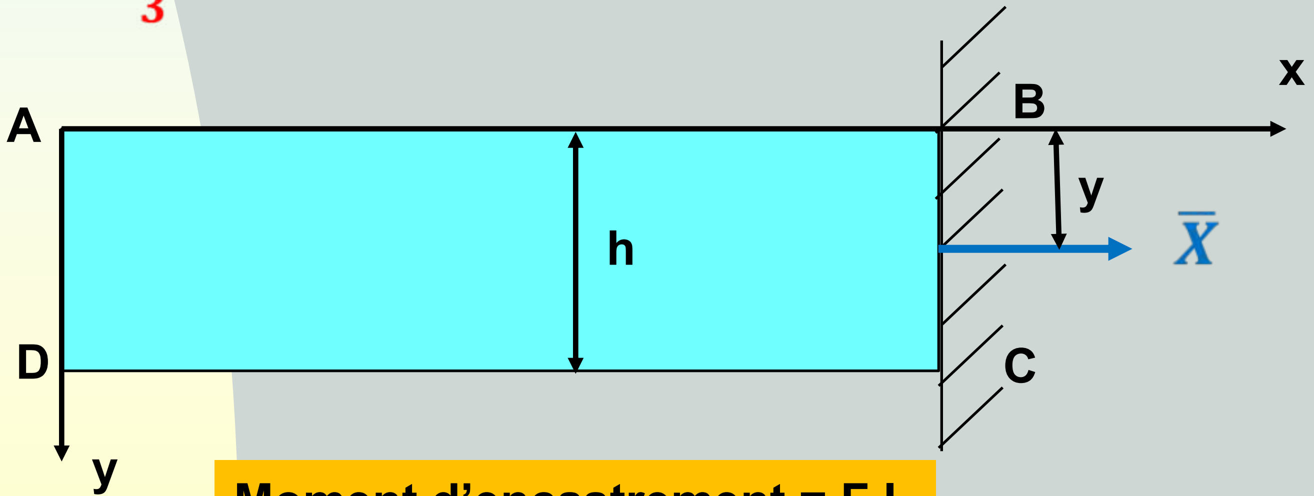
Moment d'encastrement

Moment d'encastrement = Bras de levier x force

Le bras de levier est suivant « y » seule la force $\bar{X}$ provoque un moment, (elle est à 90° par rapport au bras de levier), la force $\bar{Y}$ ne provoque pas de moment (bras de levier dans le sens de la force)

$$\int_0^h \bar{X}.y\,dy = \int_0^h \left(-\frac{6.F}{h^2}.l + \frac{12.F}{h^3}.l.y\right).y.dy = -\frac{6.F.y^2}{h^2.2}\Bigg|_0^h + \frac{12.F.l.y^3}{h^3.3}\Bigg|_0^h$$

$$= -\frac{6.F.l}{2} + \frac{12.F.l}{3} = F.l$$

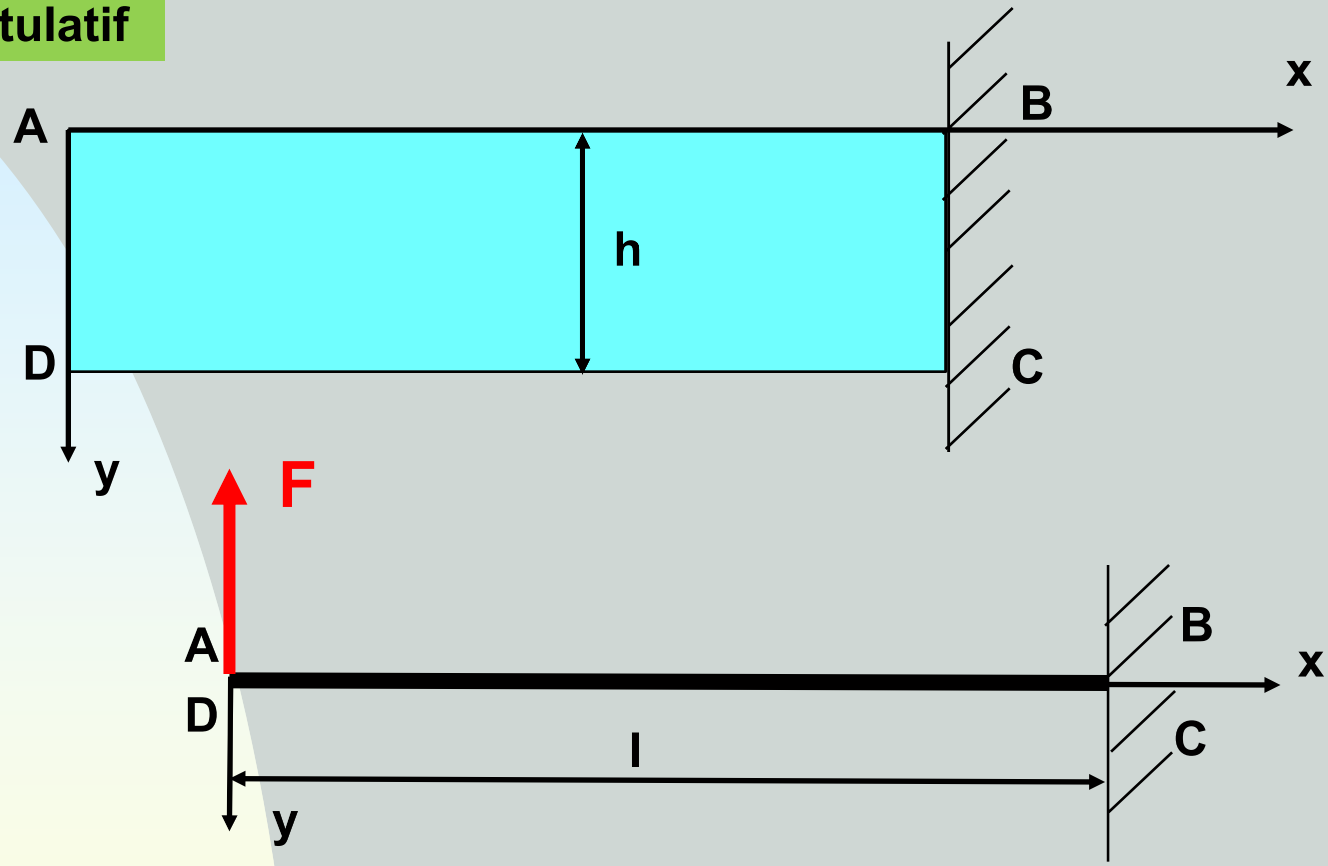


Moment d'encastrement = F.l

Application

$$\varphi(x, y) = -\frac{F}{h^3} . x . y^2 (3. h - 2. y)$$

récapitulatif



Par l'élasticité on a trouvé:

$$R_x = 0; \quad R_y = F \quad et \quad M_{enc} = F. l$$

Résultat similaire à celui de la théorie des poutres

Merci. **Fin de l'application 7**