Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 3

Théorie des Déformations

<u>COURS 5</u> **Lundi 19.02.2020**

1. Description des mouvements d'un M.C

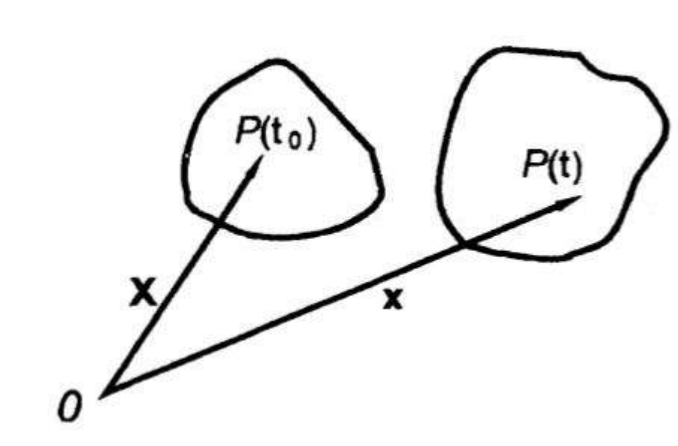
La cinématique des particules permet de définir le chemin d'une particule (ou d'un point) par un vecteur qui peut être en fonction du temps:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ Ou bien $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3$ (3.1)

S'il ya « N » particules, chaque particule aura son chemin, et on a:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t), \quad n = 1,2...N$$

Pour un milieu continu, on identifie les points d'un corps quelconque par leur position qu'ils occupent au temps de référence « t_0 ».



Ex: si une particule d'un milieu continu était à la position (X_1,X_2,X_3) au temps de référence « t_0 » alors on utilise les coordonnées (X_1,X_2,X_3) pour identifier cette particule.

2. Définitions et Notations

i) Déplacements

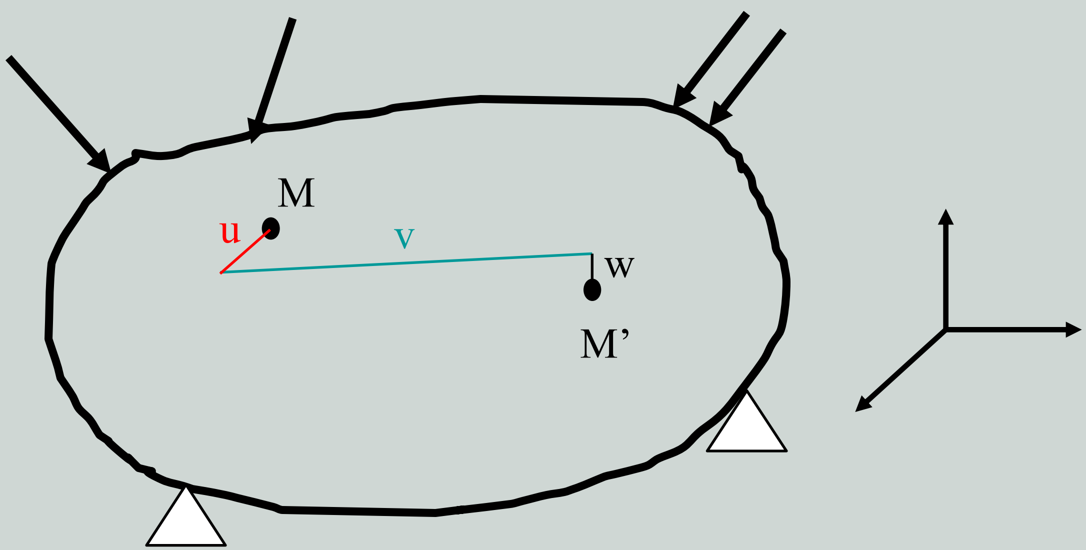
Supposons un corps appuyé de sorte qu'aucun déplacement des ses particules ne sera possible sans déformation du corps lui-même.

Donc, un point quelconque M(x,y,z) subira un déplacement MM' dont les projections sur les axes x,y,z seront notées « u, v et w ».

On admettra que ces composantes sont des infiniment petits, qui varient d'une manière continue dans le volume du corps.

D'où

$$u = F1(x,y,z)$$
$$v = F2(x,y,z)$$
$$w = F3(x,y,z)$$



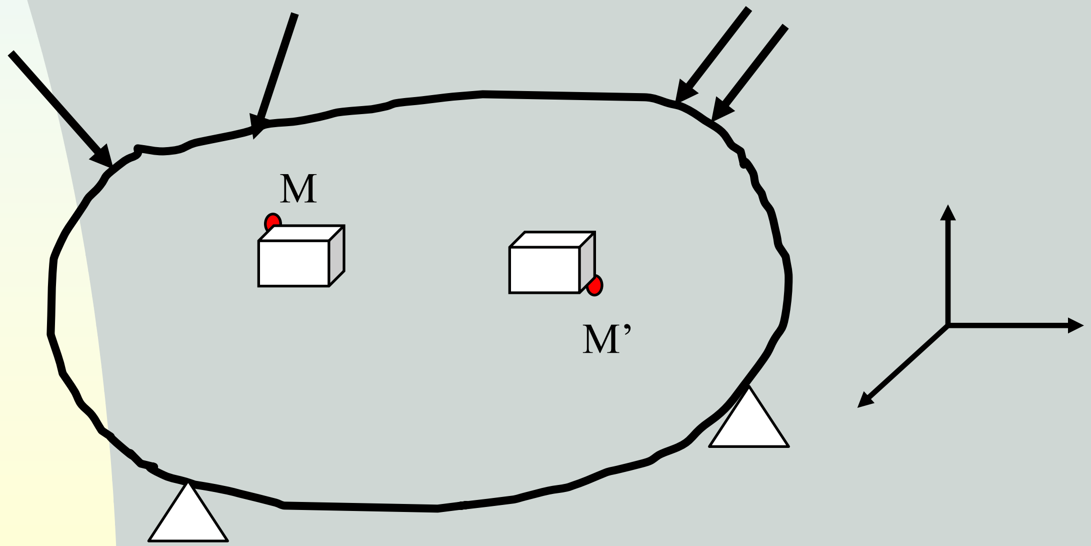
2. Définitions et Notations

ii) Rotations

Supposons un point (parallélépipède) subissant un déplacement MM' sans déformation.

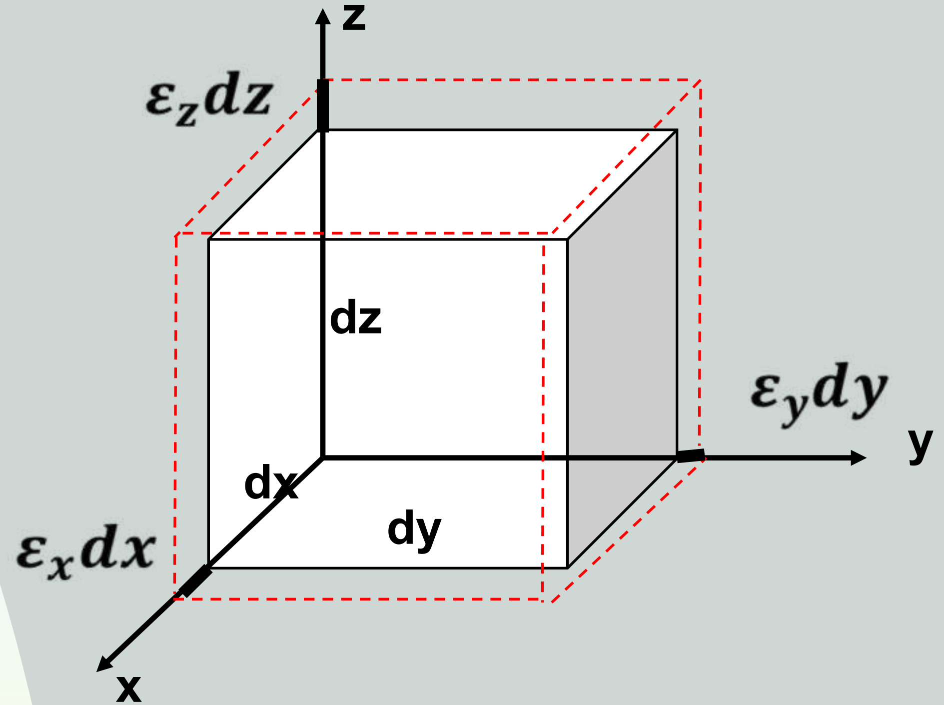
Pour définir la nouvelle position il faut aussi considérer la rotation rigide autour des axes dont les composantes seront notées:

$\omega_x \,;\, \omega_y \,;\, \omega_z$ **Qui sont aussi fonction de « x,y,z »**



2. Définitions et Notations

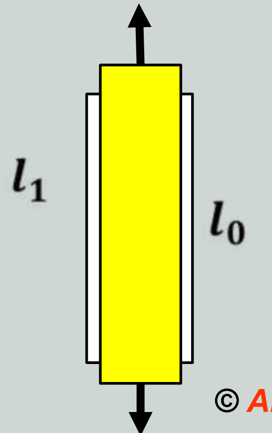
iii) Extensions



Sous l'action de contraintes, il ya généralement un changement de volume exprimé par $\varepsilon_x dx$, $\varepsilon_y dy$ et $\varepsilon_z dz$.

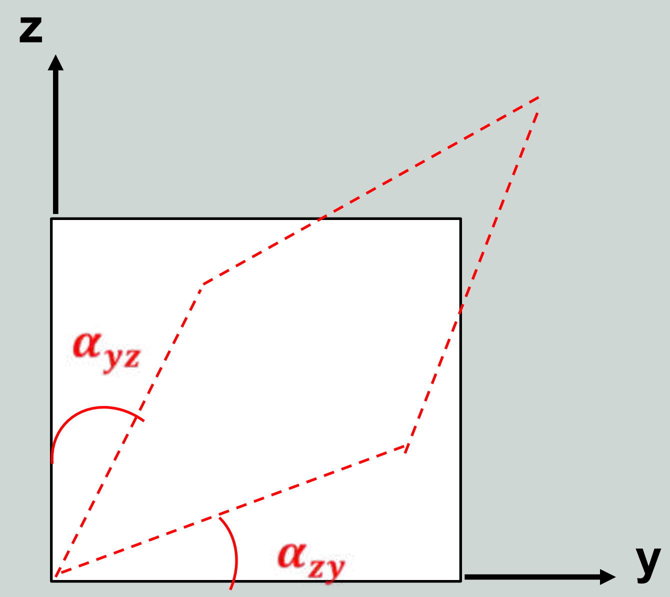
Le cas de la traction simple est le plus connu.

Changement de longueur «l_0 » après chargement.



2. Définitions et Notations

iv) Distorsions



Sous l'effet des contraintes tangentielles les déformations sont de type angulaires appelées distorsions. Elles sont exprimées par:

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx}$$
$$\gamma_{xz} = \alpha_{xz} + \alpha_{zx}$$
$$\gamma_{yz} = \alpha_{yz} + \alpha_{zy}$$

Ainsi, pour exprimer un état de déformation, on peut définir 12 composantes:

03 déplacements, 03 rotations, 03 extensions et 03 distorsions.

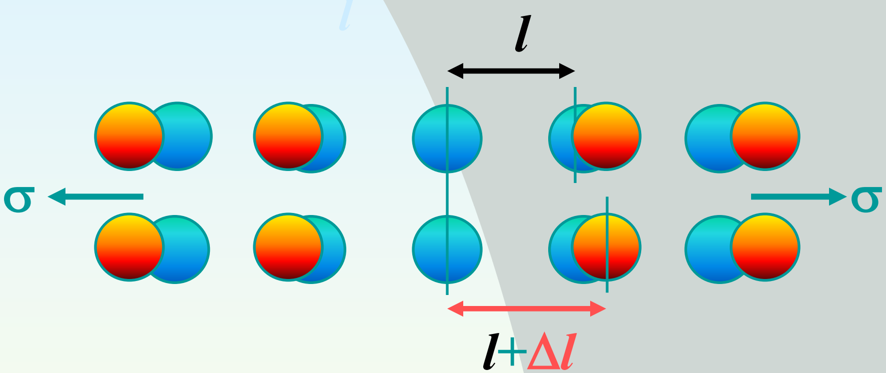
3. Définition de la déformation

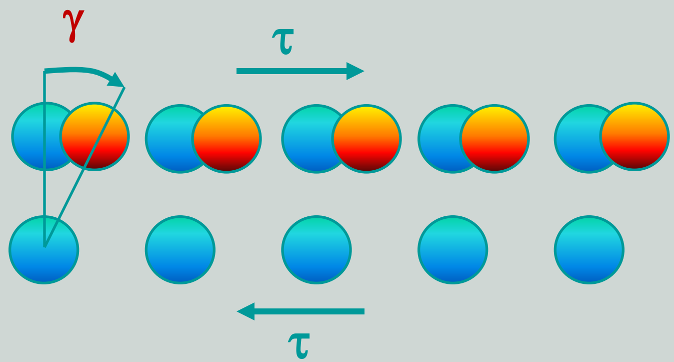
Robert Hooke

Pour supporter un chargement un milieu matériel doit se déformer

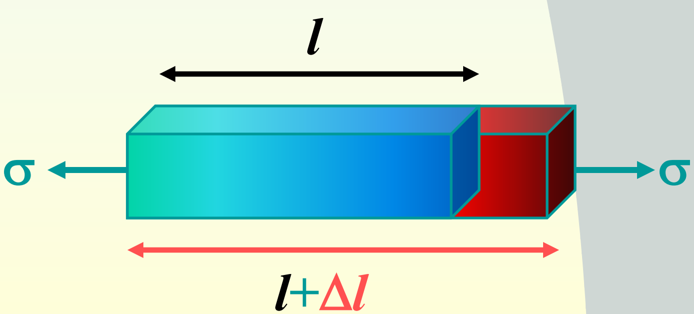
Extension $\frac{\Delta l}{l}$

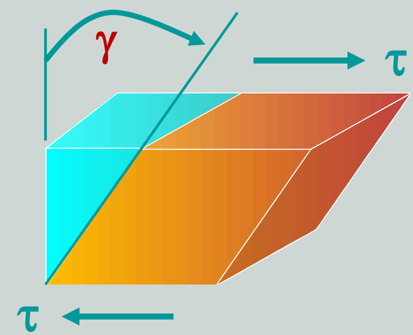
Glissement γ



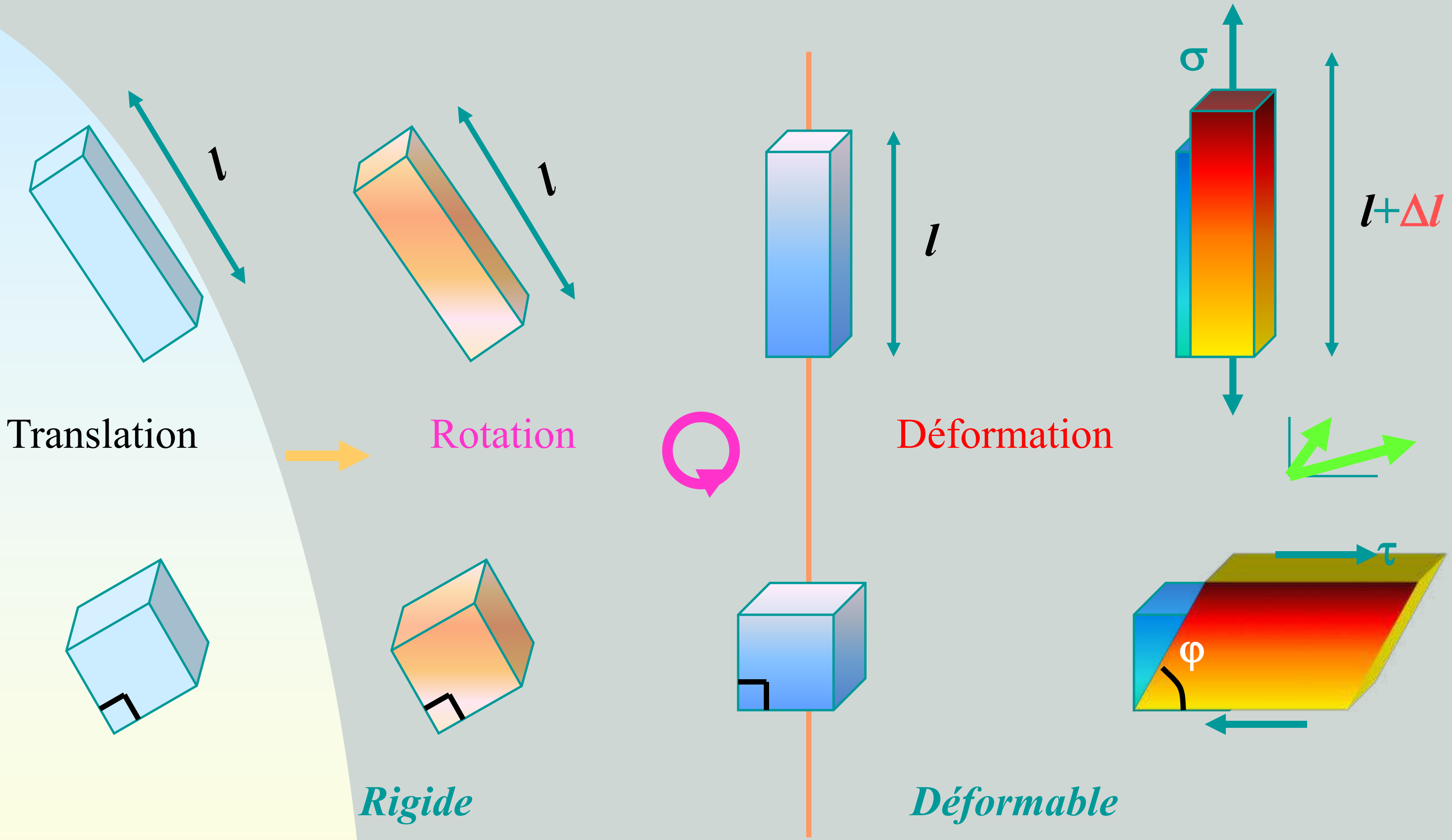


A l'échelle microscopique





A l'échelle macroscopique



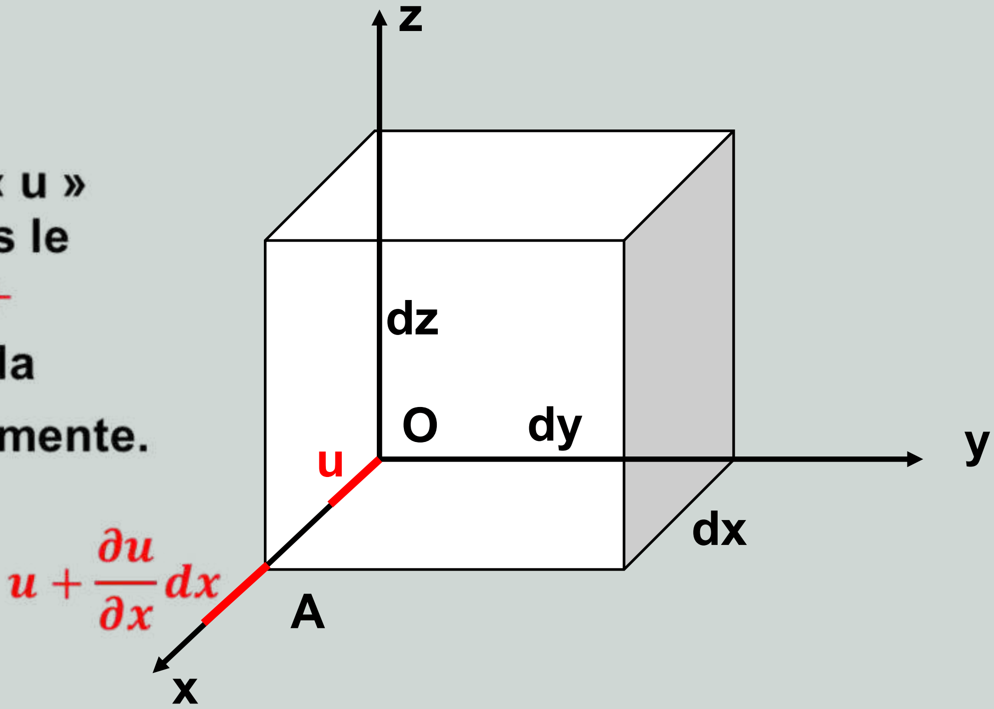
Seule la déformation modifie les longueurs et les angles

4. Composantes de Déformations

i) Extensions

Considérons un petit élément (notre point) de dimensions « dx, dy et dz » très petites.

Si le point « O » se déplace de « u » dans la direction des « x », alors le point « A » se déplacera de «$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ » du à l'accroissement de la fonction « u » lorsque « x » augmente.



D'où la longueur sera augmentée de $\frac{\partial u}{\partial x} dx$

L'allongement unitaire du point « O » suivant « x » sera alors

$$\varepsilon_x = \frac{\left(\partial u /_{\partial x} dx\right)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Représentant la déformation longitudinale ou extension suivant « x »

4. Composantes de Déformations

i) Extensions

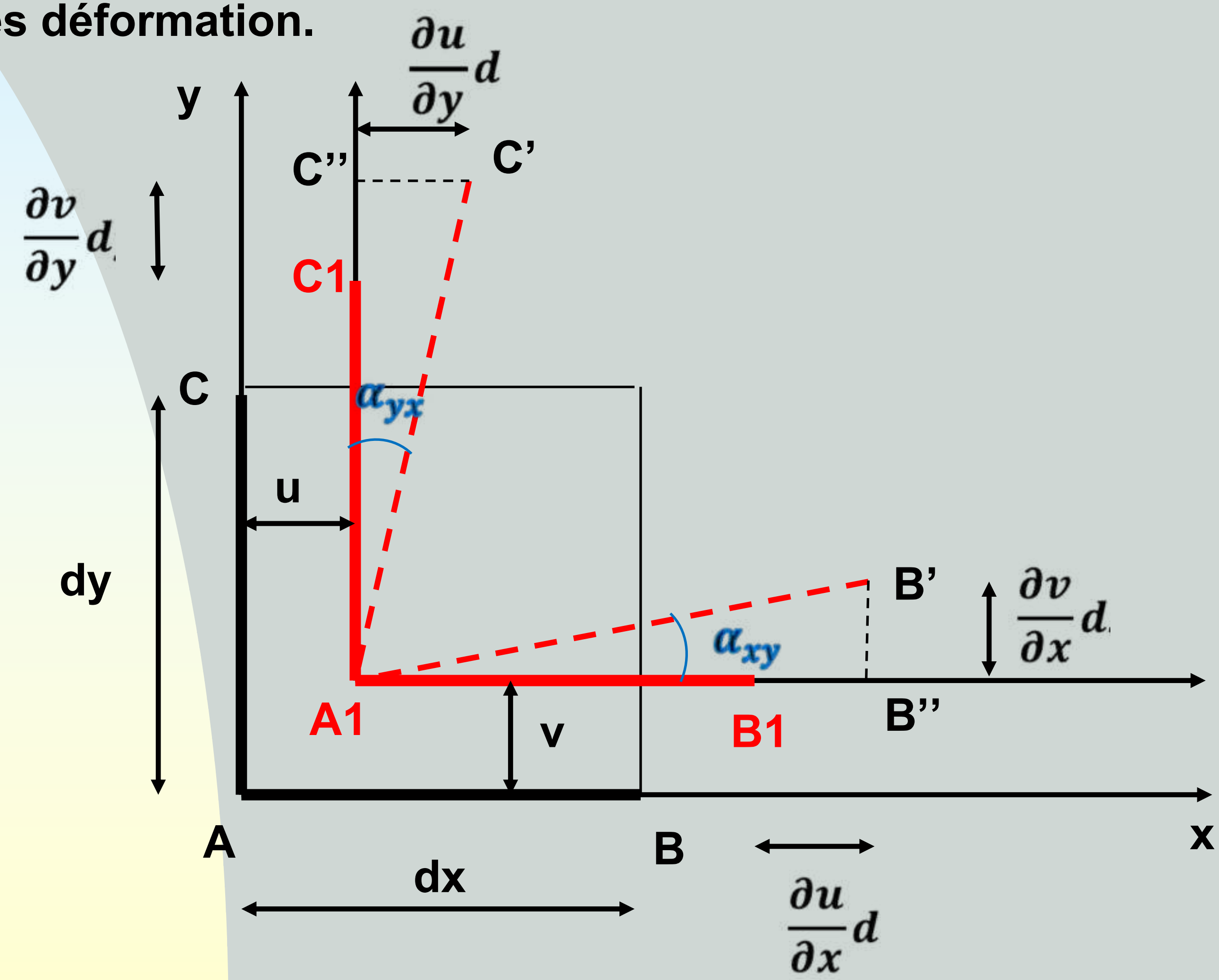
On peut démontrer de la même manière suivant « y » et « z », on aura alors:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3.1)$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

4. Composantes de Déformations

ii) Distorsions

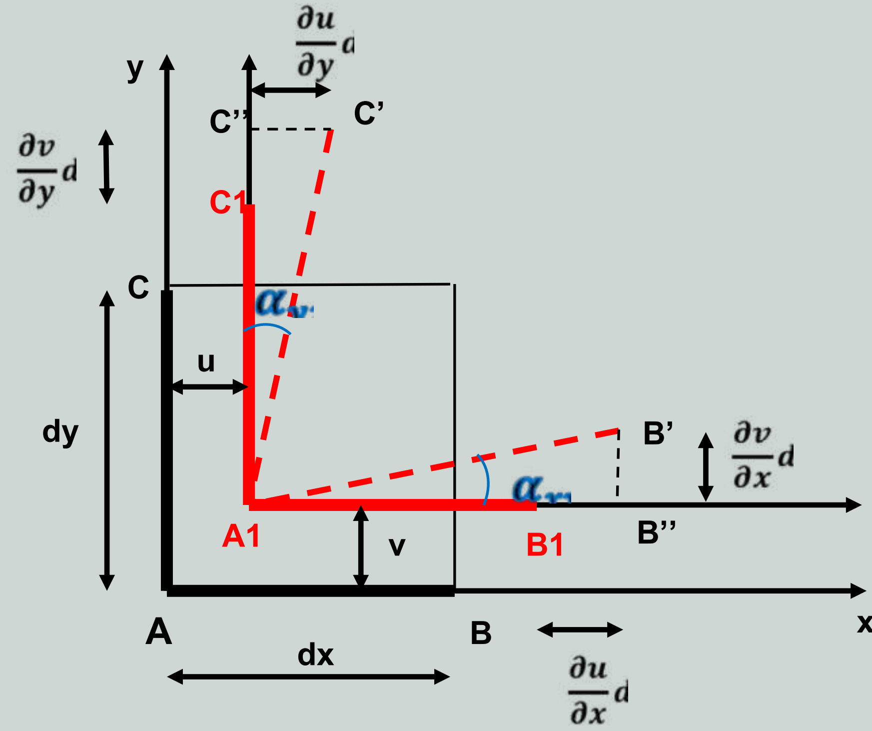
Le calcul des distorsions se fera en considérant les modifications des angles après déformation.



4. Composantes de Déformations

Les angles étant très petits, on aura

$$\alpha_{xy} = tg\alpha_{xy} = \frac{B'B''}{A_1B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$



Or $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$ est très petite devant « 1 », on aura alors

$$\alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

De même, on aura

$$\alpha_{yx} = tg\alpha_{yx} = \frac{C'C''}{A_1C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}$$

Or $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$ est très petite devant « 1 », on aura alors

$$\alpha_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ainsi, l'angle initialement de 90° a été diminué de α_{xy}+ α_{yx}. C'est la déformation angulaire, ou transversale ou bien distorsion

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

4. Composantes de Déformations

En considérant les 02 autres plans (x,z) et (y,z) on aura de la même manière les 02 autres distorsions.

Ainsi

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \textbf{(3.2)}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

5. Tenseur des déformations

Ainsi ces 06 composantes de déformations forment un tenseur

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

Ce tenseur caractérise un changement (longitudinal et transversal) qui subit une déformation petite.

Le tenseur est symétrique

Rem:

La présence du « 1/2 » à coté de la distorsion (qui est définie par 02 quantités) , c'est pour l'uniformiser avec les déformations longitudinales qui sont définies par un seul terme).

5. Tenseur de déformations

5.1 Déformations principales

Puisque le tenseur est symétrique, il existe au moins 03 directions mutuellement perpendiculaires, l, m et n où la matrice du tenseur est diagonale

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Donnant lieu à des déformations et directions principales.

Le calcul se fera de la même manière qu'avec le tenseur des contraintes.

Il faut résoudre le système:

$$([\boldsymbol{\varepsilon}] - \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{I}]) \begin{pmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Système qui n'admet de solutions que si le déterminant est nul

$$|[\boldsymbol{\varepsilon}] - \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{I}]| = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.6)}$$

5. Tenseur de déformations

5.1 Déformations principales

$$\left|[\varepsilon] - \varepsilon[I]\right| = 0$$

Le calcul du déterminant nous donnera l'équation caractéristique

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0 \qquad (3.7)$$

Dont la résolution nous donnera les 03 déformations principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2\ et\ \varepsilon_3$

Avec **invariants**

Linéaire

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Quadratique

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_x\,\varepsilon_y + \varepsilon_x\,\varepsilon_y + \varepsilon_x\,\varepsilon_y - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right) \qquad (3.8)$$

$$= \varepsilon_1.\varepsilon_2 + \varepsilon_1.\varepsilon_3 + \varepsilon_2.\varepsilon_3$$

Cubique

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_1.\varepsilon_2.\varepsilon_3$$

5. Tenseur de déformations

5.2 Sphérique et Déviateur

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_s] + [\varepsilon_d] = \begin{vmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{vmatrix}$$

Sphérique $[\varepsilon_s]$: $\mathrm{Tr}([\varepsilon_s]) = \mathrm{Tr}([\varepsilon])$ **Déviateur** $[\varepsilon_d]$: $\mathrm{Tr}([\varepsilon_d]) = 0$

Avec $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3} = \frac{I_1}{3} =$ **: Déformation normale moyenne**

Déformations principales de $[\varepsilon_d]$ égales aux déformations principales de $[\varepsilon]$ + ε_m

Soit $$\varepsilon_{di} = \varepsilon_i + \varepsilon_m$$

Et les directions principales de $[\varepsilon_d]$ sont les mêmes que celles de $[\varepsilon]$

6. Tenseur de rotation

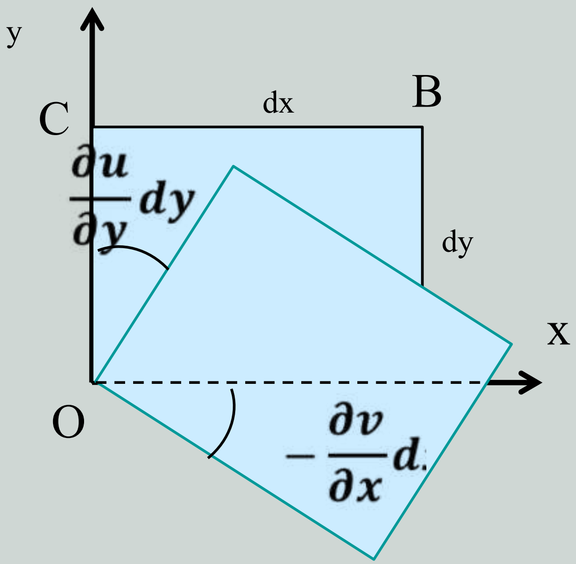
La rotation est définie par les changements d’angle avant et après déformations. Soit par exemple dans le plan (x1, x2) (x,y), on a:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

De même

$$\omega_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(3.9)}$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$



Le tenseur des rotations sera alors

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Le tenseur est anti symétrique

7. Equations de Compatibilité

Connaissant le vecteur de déplacement (u, v, w) on peut définir le vecteur déformation (6 composantes) en n'importe quelle région où les dérivées partielles existent.

Réciproquement, si on connait les déformations, peut-on calculer les déplacements? Généralement non.

Le problème donc est de déterminer les déplacements à partir des déformations.

Dans ce cas pour assurer cette résolution, i.e. pour assurer la **continuité** du milieu, les composantes de déformations doivent satisfaire des conditions dites **conditions de compatibilité**.

Théorème:

Si $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ sont des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans une région, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions fonctions continues uniques de u, v et w (06 équations de déformations) sont les équations de compatibilité suivantes:

Equations de Compatibilité (suite)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2.\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} \qquad \textbf{(a)}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 2.\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\, \partial z} \qquad \textbf{(3.11)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2.\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} \qquad \textbf{(b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{-\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\, \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{-\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial y}$$

Démonstration

Equation (a)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

et

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

or

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Ainsi par identification, on aura

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}}$$

cqfd

Equations de Compatibilité (suite)

Démonstration

Equation (b)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \qquad \text{(i)}$$

et

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \qquad \text{(1)}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \text{(2)}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \text{(3)}$$

En calculant (1) + (2) – (3), on aura

$$\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \qquad \text{(4)}$$

Si on dérive (4), par rapport à « x », on aura

Equations de Compatibilité (suite)

Démonstration

Equation (4)

$$\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \qquad (4)$$

Si on dérive (4), par rapport à « x », on aura

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2.\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z} \qquad (ii)$$

cqfd

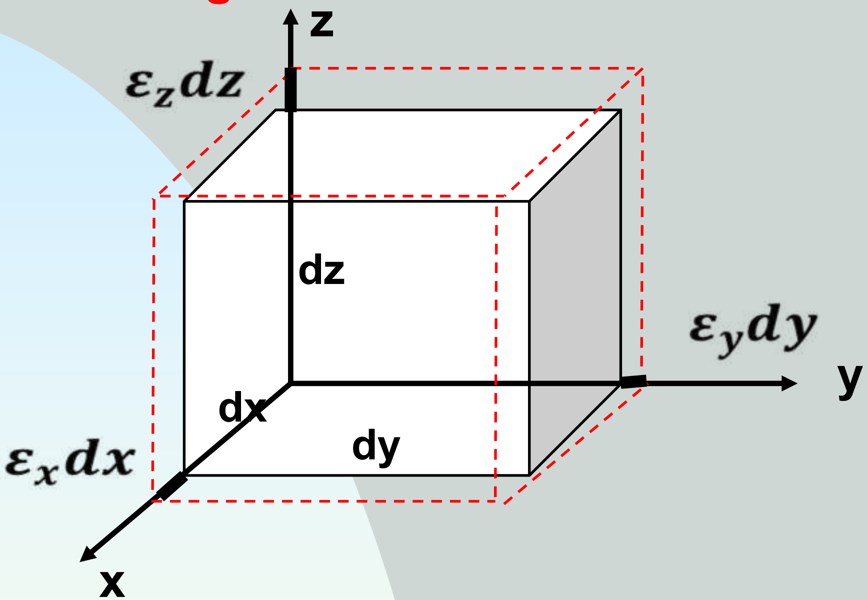
Les 02 autres équations sont similaires

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2.\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y\partial z}=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2.\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\partial y}$$

8. Dilatation Volumique

8.1 Changement de volume et de forme



$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

dVi = Volume initiale = dx.dy.dz

dVf = Volume final =

$$(dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)(dz + \varepsilon_z dz)$$

La différence entre la forme initiale et la forme finale nous donne une déformation (de type volume). Soit

$$\varepsilon_v = \frac{dV_f - dV_i}{dV_i} = \frac{dxdydz(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - dxdydz}{dxdydz}$$

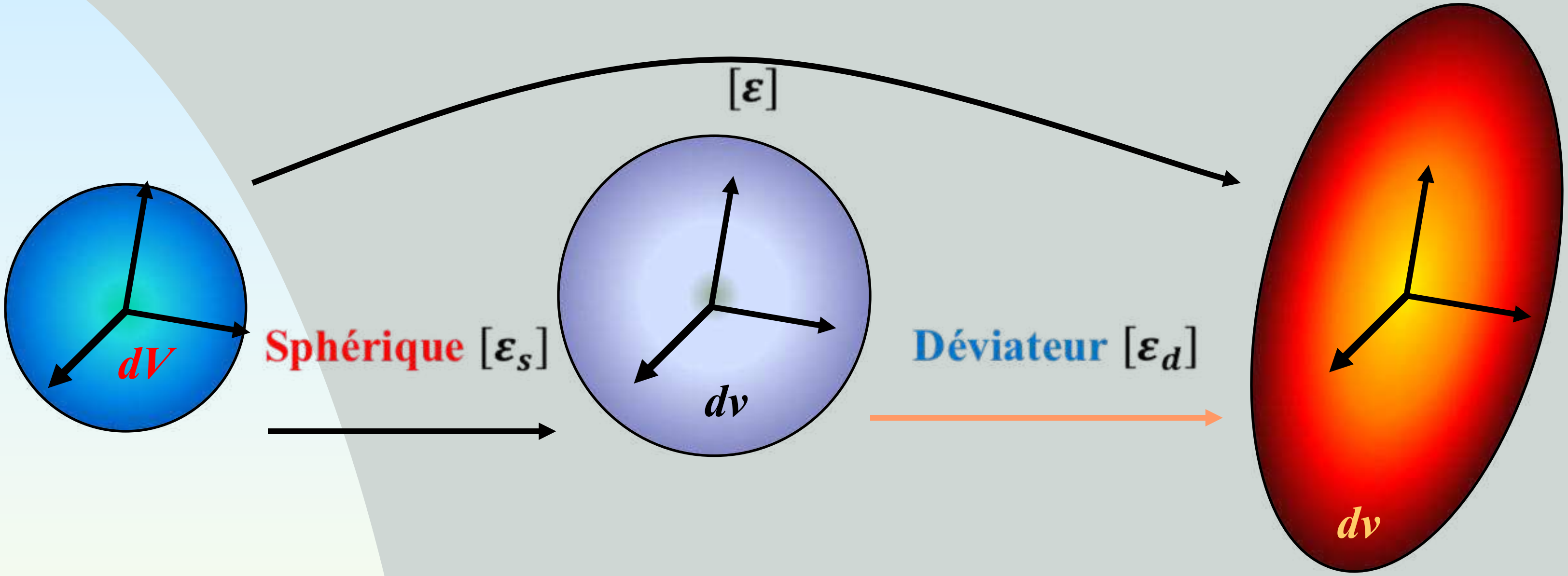
$$\simeq \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_1$$

En négligeant les produits des déformations

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_1 \qquad (3.12)$$

Dilatation Volumique

8. Dilatation Volumique



Changement de Volume
à Forme Constante

Changement de Forme
à Volume Constant

9. Ellipsoïde des Déformations

Si on considère un repère principal, on aura

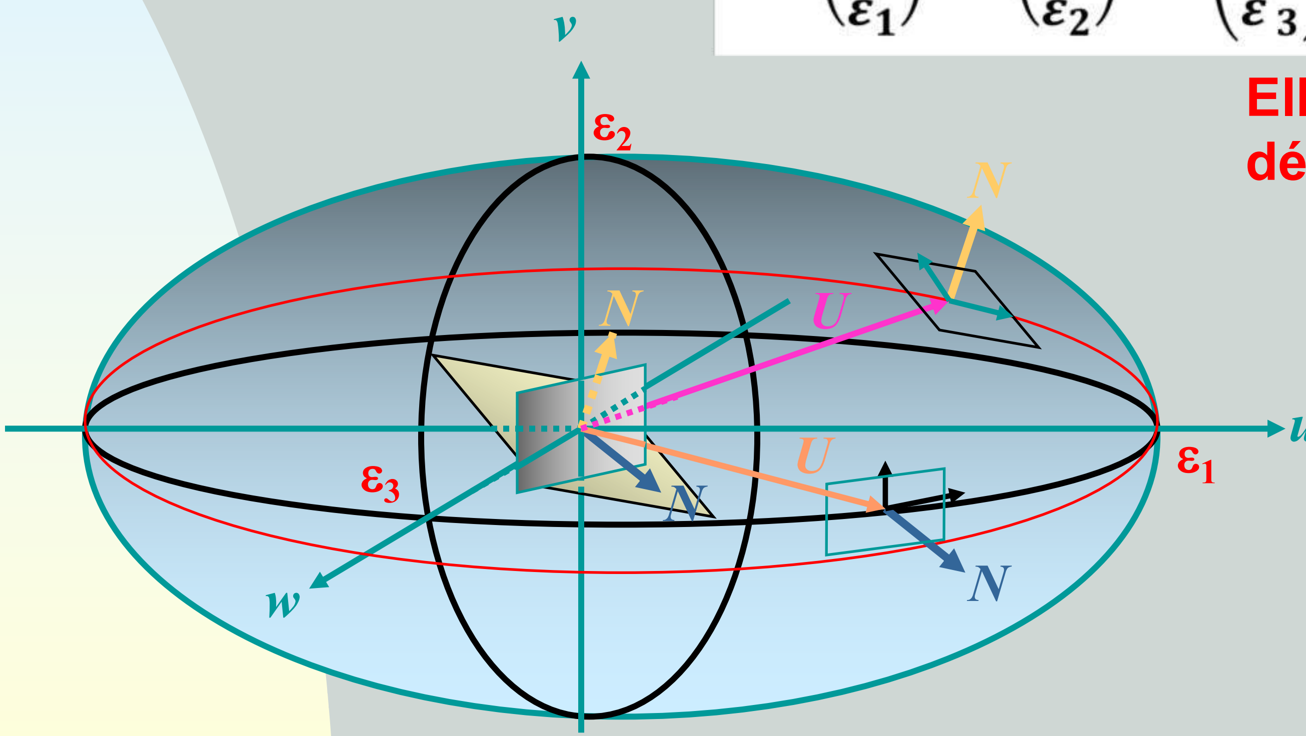
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{»} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

En tirant l, m et n et sachant que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

on aura

$$\left(\frac{u}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{\varepsilon_2}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varepsilon_3}\right)^2 = 1$$

Ellipsoïde de déformations



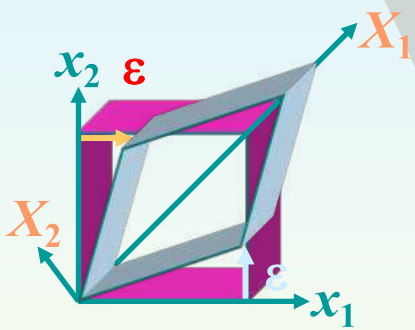
Lorsque « *N* » appartient à un plan principal, « *U* » appartient au même plan

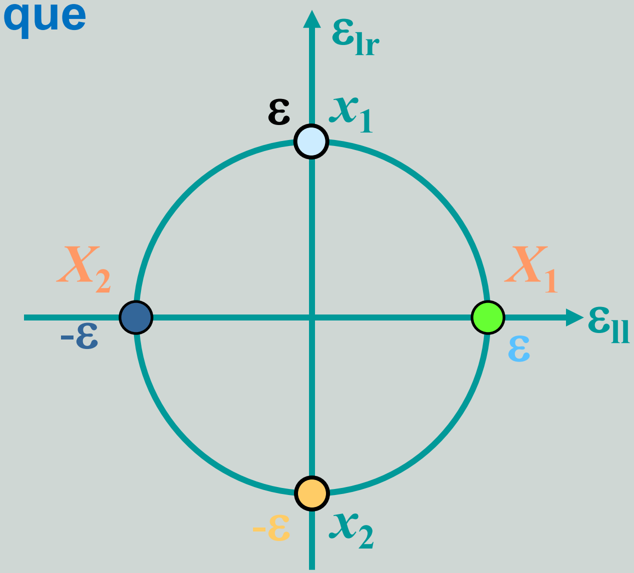
10. Applications

Glissement pur et glissement simple

Dans un repère quelconque

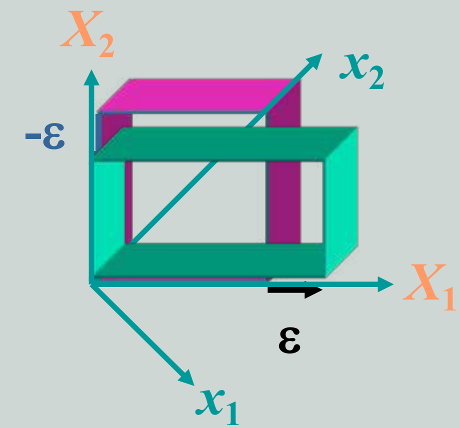
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

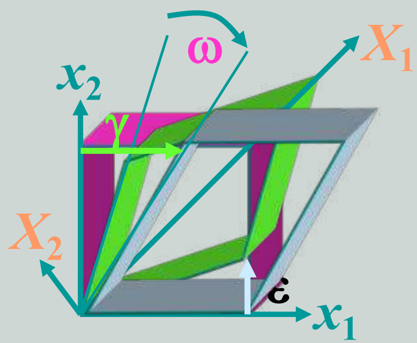




Dans un repère principal

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{G}} = \begin{vmatrix} 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La distorsion est maximale sur les directions orientées à 45° des directions principales

La rotation $\omega = -\varepsilon$

Le glissement est le double de la distorsion $\gamma = 2\varepsilon$

Merci. **Fin du chapitre 3**

Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 4

Relations Physiques entre contraintes et Déformations

COURS 5 **Dimanche 28.02.2020**