

Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 4

Relations Physiques entre Contraintes et Déformations

COURS 5 Lundi 09.03.2020

© **Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen**

1. Introduction

La cinématique des MC nous a donné les déformations et la description de l'état de contraintes nous adonné les contraintes.

Aucune mention n'est faite à la nature du matériau avant.

Ces équations sont insuffisantes pour décrire complètement la réponse d'un matériau spécifique due à un certain chargement.

Par expérience, sous les mêmes conditions de chargement, l'acier ne se déforme pas comme le béton, l'eau ne s'écoule pas comme l'huile...

Aussi, en fonction des conditions de chargement, le matériau peut se déformer différemment.

En nombres d'équations, il ya manque pour pouvoir résoudre un problème d'élasticité.

Les équations manquantes doivent être fournies par les lois de comportement ou la relation contraintes-déformations.



1. Introduction

La théorie des contraintes représente surtout l'étude statique et celle des déformations représente l'étude géométrique du problème de l'élasticité.

Pour ces 02 études il n'est pas nécessaire d'introduire les hypothèses physiques. C'est pour cela que les équations obtenues à partir de ces 02 études sont valables pour n'importe quel milieu homogène continu et qui respecte la loi des petites déformations.

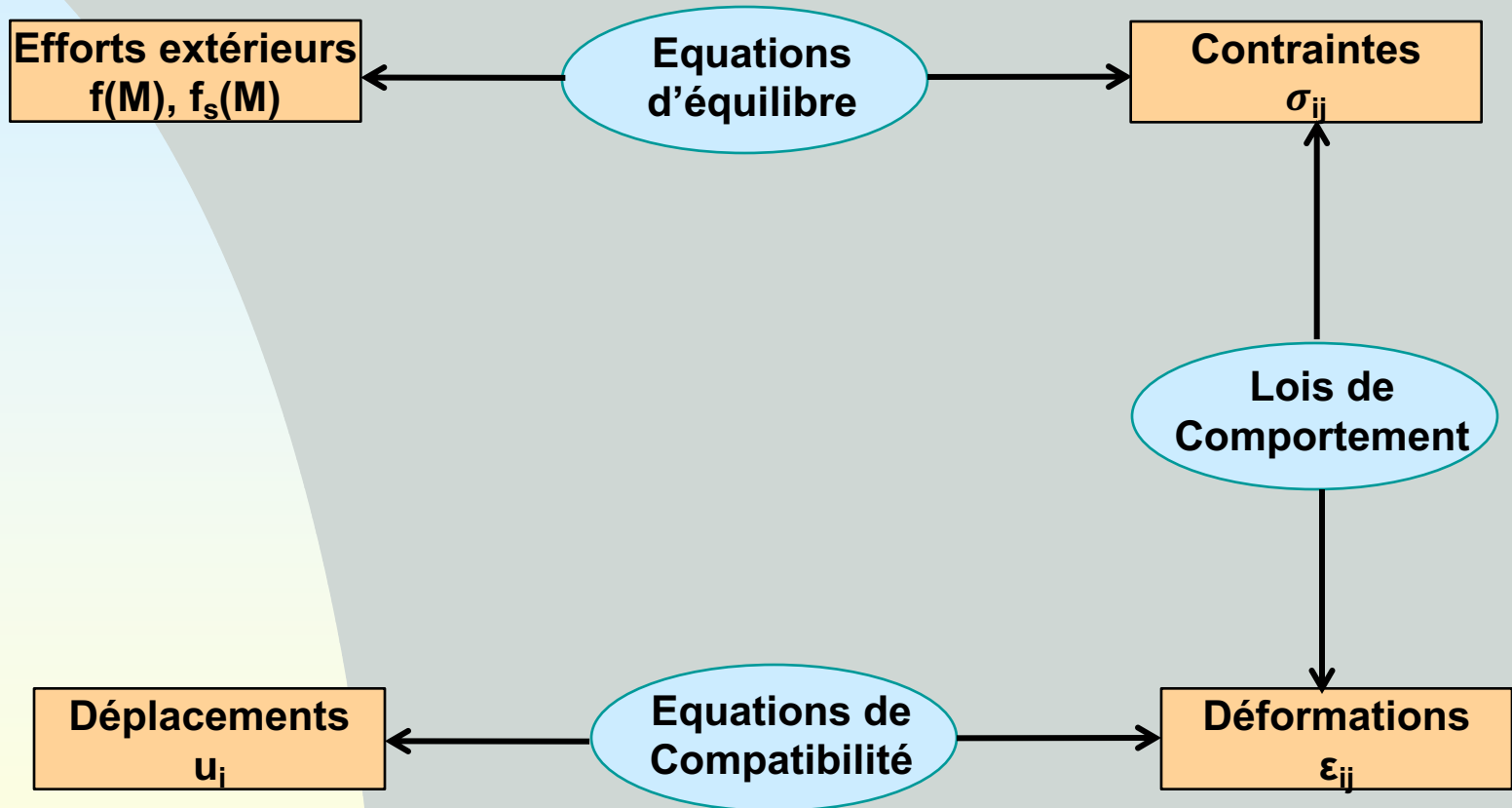
Et c'est grâce à la propriété des matériaux d'être élastique qu'on a pu relier ces 02 aspects (statique et géométrique).

Exemple simple: Le cas de la Traction.

Si on veut établir la loi d'élasticité de Hooke, on a besoin d'un seul paramètre (qui est E) puisqu'on a une déformation et une contrainte./

Introduction (suite)

Schématiquement



Introduction (suite)

Exemple simple: Le cas de la Traction.

Si on veut établir la loi d'élasticité de Hooke, on a besoin d'un seul paramètre (qui est E) puisqu'on a une déformation et une contrainte.

Dans le cas général, on a 06 contraintes et 06 déformations, on doit avoir comme relations générales:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= F_1(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{xz} + \gamma_{yz}) \\ \sigma_y &= F_2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{xz} + \gamma_{yz}) \\ \sigma_z &= F_3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{xz} + \gamma_{yz}) \\ \tau_{xy} &= F_4(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{xz} + \gamma_{yz}) \\ \tau_{xz} &= F_4(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{xz} + \gamma_{yz}) \\ \tau_{yz} &= F_4(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{xz} + \gamma_{yz})\end{aligned}\tag{4.1}$$

Introduction (suite)

Dans le cas des petites déformations (notre hypothèse) ces relations sont linéaires et on peut écrire:

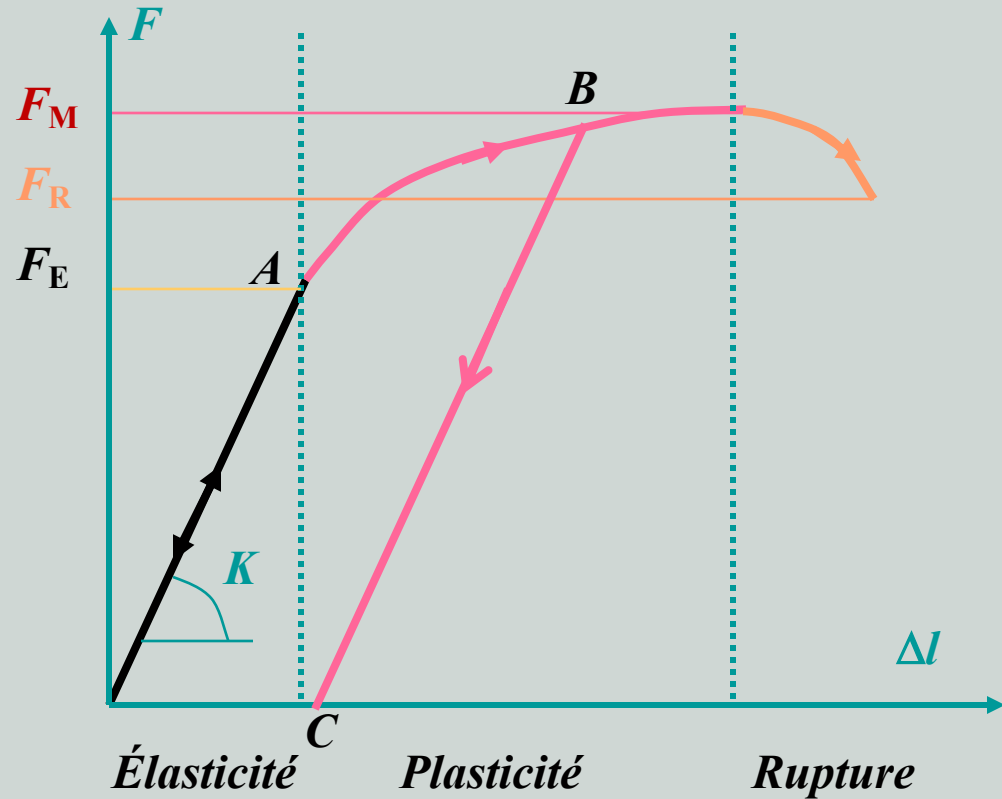
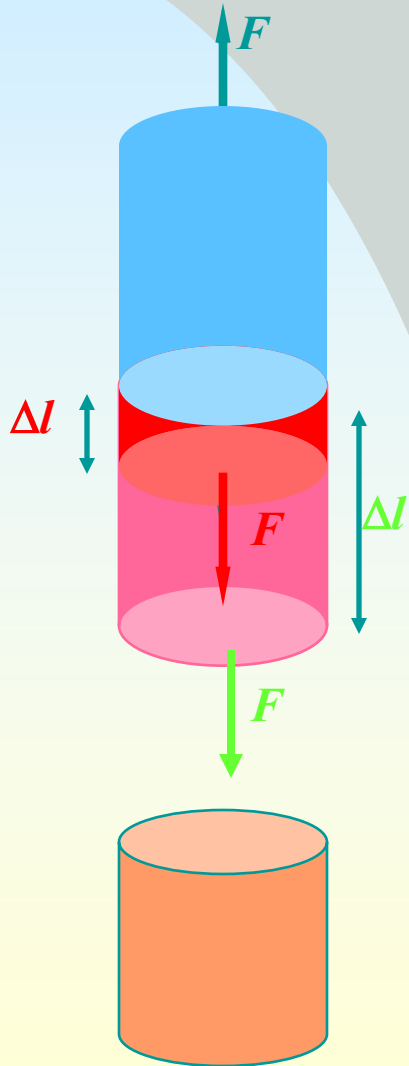
$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_{11} \varepsilon_x + a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \gamma_{xy} + a_{15} \gamma_{xz} + a_{16} \gamma_{yz} \\ \sigma_y &= a_{21} \varepsilon_x + a_{22} \varepsilon_y + a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \gamma_{xy} + a_{25} \gamma_{xz} + a_{26} \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= a_{31} \varepsilon_x + a_{32} \varepsilon_y + a_{33} \varepsilon_z + a_{34} \gamma_{xy} + a_{35} \gamma_{xz} + a_{36} \gamma_{yz} \\ \tau_{xy} &= a_{41} \varepsilon_x + a_{42} \varepsilon_y + a_{43} \varepsilon_z + a_{44} \gamma_{xy} + a_{45} \gamma_{xz} + a_{46} \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= a_{51} \varepsilon_x + a_{52} \varepsilon_y + a_{53} \varepsilon_z + a_{54} \gamma_{xy} + a_{55} \gamma_{xz} + a_{56} \gamma_{yz} \\ \tau_{yz} &= a_{61} \varepsilon_x + a_{62} \varepsilon_y + a_{63} \varepsilon_z + a_{64} \gamma_{xy} + a_{65} \gamma_{xz} + a_{66} \gamma_{yz}\end{aligned} \quad (4.2)$$

Et on obtient 36 constantes élastiques (Cas le plus général) a_{ij} ($i=1$ à 6 ; $j=1$ à 6) qu'on déterminera

2. Comportement d'une Structure

Propriétés mécaniques

Essai de traction



Rigidité de la Structure $F=K\Delta l$



Comportement d'une structure (suite)

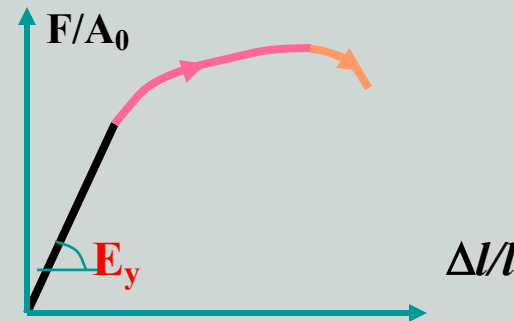
La ligne OA, région de proportionnalité. Si on enlève le chargement, la déformation revient sur son chemin initial. C'est la phase **élastique**.

Si on charge au-delà de A, la déformation prend un chemin différent que celui du chargement. Il ya une élongation permanente OC.

En appliquant encore un chargement du point C, le comportement est élastique de même pente OA, mais avec une augmentation de la limite de proportionnalité. On dit que le matériau a un travail **d'écrouissage**.

La figure représentée dépend de la section transversale et de la longueur du spécimen. Pour avoir un diagramme indépendant des variables, on trace la variation de la contrainte « $\sigma = F/A_0$ » en fonction de la déformation « $\epsilon = \Delta l/l$ ».

E_y : module d'élasticité = σ/ϵ



2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Pour ce type de matériau, on a:

- ✓ La relation entre la charge appliquée et la quantité mesurant la déformation est linéaire.
- ✓ Le taux de l'application de la charge n'a pas d'effet.
- ✓ Si la charge est retirée complètement, la déformation s'annule.
- ✓ Les déformations sont très petites.

Dans ce cas, les composantes « σ_{ij} » du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires et homogènes des composantes de déformation « ε_{ij} ».

Les relations existantes entre les contraintes et les déformations ont été établies expérimentalement et sont connues sous le nom de

Loi de HOOKE

Si un parallélépipède est soumis à l'action d'une contrainte de traction « σ_x » uniformément répartie sur deux faces opposées, l'expérience prouve que dans le cas où le corps est isotrope, ces contraintes normales ne déterminent aucune distorsion des angles du parallélépipède.

2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Du à « σ_x », on a remarqué qu'on a un allongement (extension) unitaire de valeur :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Cette extension dans le sens des « x » est accompagnée de contractions latérales (dans les sens des « y » et « z ») dont les valeurs sont:

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Avec « ν » coefficient de Poisson dont la valeur maximale est « 0.5 ».

Si l'élément considéré est soumis à l'action des 03 contraintes normales « σ_x , σ_y , et σ_z », on peut déterminer les composantes de déformations en utilisant le principe de superposition.

2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

On a donc par superposition des effets:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Soit:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{4.4}$$

2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

L'emploi de la méthode de superposition est parfaitement légitime, aussi longtemps que les déformations sont faibles et que les déplacements élémentaires correspondants n'affectent pas sensiblement l'action des forces extérieures.

On remarque que les relations (4.3) ou (4.4) sont complètement définies par « E » et « ν ». Les mêmes constantes vont servir pour définir les relations entre les contraintes de cisaillement et les déformations transversales ou distorsions.

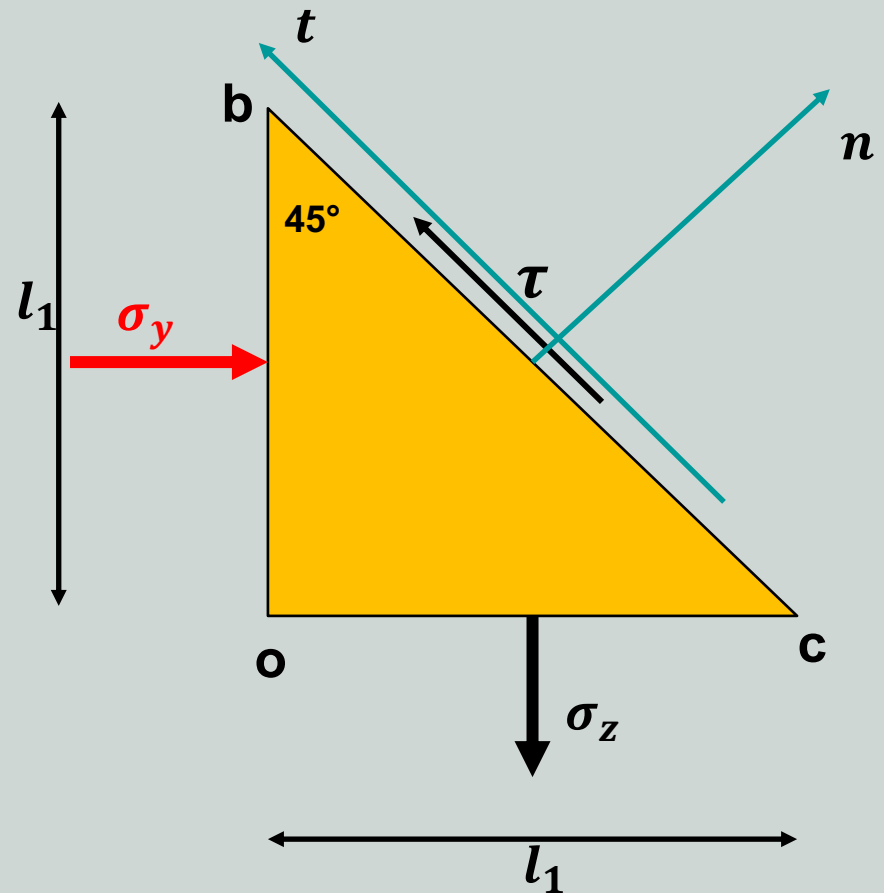
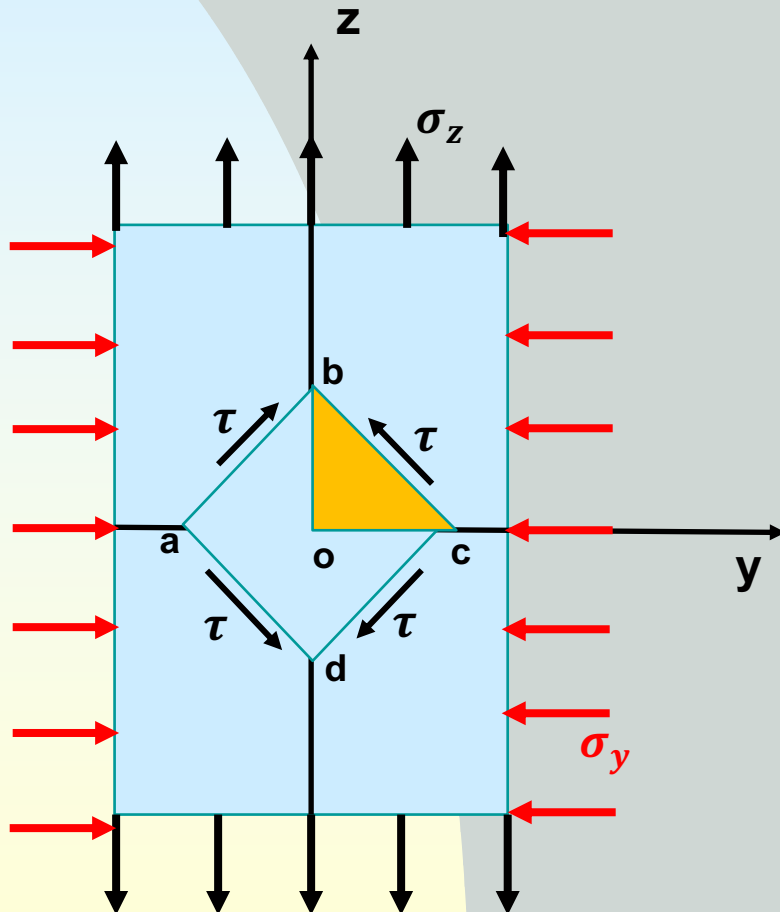


2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Expérience du Cisaillement simple

On considère un rectangle soumis à

$$\sigma_z = -\sigma_y = \sigma \quad \text{et} \quad \sigma_x = 0$$



2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

En découpant dans ce solide un élément abcd par des plans parallèles à l'axe des « x » et inclinés de 45° sur les axes « y » et « z ».

En faisant la somme des forces:

Suivant bc on aura : $\tau = \sigma_z$

Suivant la perpendiculaire à bc on aura : $\sigma_n = 0$

On parle de **cisaillement simple**

L'allongement de ob est égale au raccourcissement des éléments oa et oc et en négligeant une petite quantité du second ordre on peut conclure que les longueurs ab et bc restent invariables pendant la déformation du corps.

2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

L'angle entre ab et bc varie et la valeur correspondante de la déformation de cisaillement « γ » peut être obtenue du triangle obc.

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{OC + OC \cdot \varepsilon_y}{Ob + Ob \cdot \varepsilon_z} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z}$$

Sachant que:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{1}{E} [1 + \nu] \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [1 + \nu] \sigma_z$$

Et que:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Après déduction, on aura:

$$\gamma = \frac{2}{E} [1 + \nu] \sigma_z$$

En posant $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ on aura: $\gamma = \frac{\tau}{G}$

G: Module d'élasticité au cisaillement

Module de Glissement

Module de rigidité.

Lorsque les contraintes tangentielles agissent sur les faces d'un élément, la distorsion de l'angle que fait chaque couple d'axes de coordonnées ne dépend que des composantes de ces contraintes tangentielles parallèles à ces axes et on a:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

(4.5)

2. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Ainsi les 06 équations de la loi de HOOKE s'écrivent :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\tag{4.6}$$

3. Loi de Hooke sous la forme volumique

Les équations (4.6) donnent les composantes des déformations en fonction des composantes de contraintes, si on additionne les équations (4.6) membre à membre on aura:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

En posant $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ trace du tenseur des contraintes

On aura:

$$\epsilon_v = \frac{\theta(1-2\nu)}{E} \quad (4.7)$$

Cas spécial: Cas d'une pression hydrostatique uniforme de valeur « p ».

On a: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ et $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

D'où $\epsilon_v = \frac{-3p(1-2\nu)}{E}$. La quantité $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ est appelée module de dilatation cubique

4. Loi de Hooke sous la forme de Lamé

Il suffit d'exprimer les contraintes en fonction des déformations en inversant les équations (4.6). On aura

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \cdot \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \cdot \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \cdot \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz}\end{aligned} \tag{4.8}$$

4. Loi de Hooke sous la forme de Lamé

En posant :

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{Et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{On aura les équations de Lamé:}$$

$$\sigma_x = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2G \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2G \cdot \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2G \cdot \varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

(4.9)

5. Loi de Hooke sous la forme la plus générale

En faisant la somme membre à membre des équations (4.9) on aura:

$$\theta = (3\lambda + 2G) \varepsilon_v$$

En posant $K = \frac{3\lambda+2G}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ on aura:

$$\theta = 3 K \varepsilon_v \quad (4.10)$$

Ainsi:

Si l'hypothèse fondamentale de l'isotropie est respectée on remarque que les 36 constantes élastiques se réduisent à 02 constantes uniquement; soit « E » et « ν », soit « λ » et « G »

6. Solides élastiques linéaires – loi de Hooke

Notation matricielle

Sous la forme matricielle, la loi de HOOKE s'écrit:

Dans ce cas, les composantes « σ_{ij} » du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires et homogènes des composantes de déformation « ϵ_{ij} ».

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (4.11)$$

C_{ijkl} est un tenseur d'ordre « 4 », appelée **tenseur d'élasticité**.

Pour un corps homogène, C_{ijkl} sont constants.

On peut montrer que pour un matériau élastique, isotrope le tenseur C_{ijkl} est symétrique.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (4.12)$$

Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Soient les tenseurs d'ordre « 4 » suivants:

$$\begin{aligned}A_{ijkl} &\equiv \delta_{ij} \delta_{kl} \\ B_{ijkl} &\equiv \delta_{ik} \delta_{jl} \\ H_{ijkl} &\equiv \delta_{il} \delta_{jk}\end{aligned}\tag{4.13}$$

N'importe quel tenseur isotropique d'ordre « 4 » peut être exprimé par la combinaison des 03 tenseurs. Soit

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}\tag{4.14}$$

λ , α et β sont des constantes.

Avec ceci, on aura (éq. 4.3):

$$T_{ij} = (\lambda.A_{ijkl} + \alpha.B_{ijkl} + \beta.H_{ijkl}).\varepsilon_{kl}$$

Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Or:

$$\begin{aligned}A_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} \cdot \varepsilon_{kl} = \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} = \delta_{ij} \cdot e \\B_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} &= \delta_{ik} \delta_{jl} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij} \\H_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} &= \delta_{il} \delta_{jk} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}\end{aligned} \tag{4.15}$$

Alors:

$$T_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} = \lambda \cdot e \cdot \delta_{ij} + (\alpha + \beta) \cdot \varepsilon_{ij} \tag{4.16}$$

Ou bien

$$T_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} = \lambda \cdot e \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} \tag{4.17}$$

$$T = \lambda \cdot e \cdot I + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \tag{4.18}$$

e: est la dilatation volumique $= \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

λ et **μ** sont appelées les constantes de Lamé.

Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Sous la forme matricielle, on aura:

Alors:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

En inversant l'équation (4.19), on aura:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} T_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \delta_{ij} T_{kk} \quad (4.20)$$

Avec $T_{kk} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$.

Solides élastiques linéaires – loi de Hooke (Suite)

Equation qui peut s'écrire encore sous la forme:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} T_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} T_{kk} \quad (4.21)$$

7. Interprétation des Coefficients d'élasticité

7.1 Tenseur des contraintes purement normales.

Par notation on pose $\sigma_{ij} = T_{ij}$

Un tenseur est sphérique si les $T_{ij}=0$ sauf pour $i=j$.

Or pour $i \neq j$, $T_{ij}=2.\mu.\varepsilon_{ij}$ avec $T_{ij}=0$ on aura $\varepsilon_{ij}=0$.

Ainsi si le tenseur des contraintes est sphérique, le tenseur des déformations est aussi sphérique.

D'où: $T_{11} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{11}$

$$T_{22} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{22}$$

$$T_{33} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{33}$$

$$T_{ii} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{ii}$$

Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

En faisant la somme, on aura:

$$T_{kk} = (3.\lambda + 2.\mu).\varepsilon_{kk} \quad (4.22)$$

Le coefficient de compression $k = \frac{(3.\lambda + 2.\mu)}{3}$ est appelé module de rigidité à la (Bulk modulus)

7.2 Tenseur de cisaillement simple.

Un tenseur de cisaillement simple est un tenseur qui a toutes les composantes $T_{ij}=0$ sauf lorsque (i,j) désigne une permutation des indices du plan de glissement considéré.

Exemple plan x_1x_2 , on a $T_{12} \neq 0$ et $T_{21} \neq 0$.

Pour $i=j$, on a

$$T_{ii} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{ii}$$

Pour $i \neq j$, on a

$$T_{ij} = 2.\mu.\varepsilon_{ij}$$

Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

Ainsi
$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = (3.\lambda + 2.\mu).\varepsilon_{kk} = 0 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_{kk} = 0$$

D'où
$$T_{11} = 2.\mu.\varepsilon_{11} = 0 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_{11} = 0$$

De même pour T_{22} et T_{33} .

Seul $T_{12} = 2.\mu.\varepsilon_{12} \neq 0$ d'où $\varepsilon_{12} \neq 0$.

Si le tenseur des contraintes est un **cisaillement simple**, le tenseur des déformations est aussi un tenseur de **glissement simple**.

7.3 Tenseur des contraintes uniaxiales.

Un tenseur est uniaxial si toutes les composantes sont nulles, sauf une seul qui sera normale. (Ex suivant Ox_1 , il n'y a que T_{11}) (σ_x)

D'où:
$$T_{11} = \lambda.\varepsilon_{kk} + 2.\mu.\varepsilon_{11}$$

Or:
$$T_{kk} = T_{11} = (3.\lambda + 2.\mu).\varepsilon_{kk}$$

D'où, en inversant

$$\varepsilon_{kk} = \frac{T_{11}}{(3.\lambda + 2.\mu)}$$

Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

D'où

$$T_{11} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{11} = \lambda \cdot \left(\frac{T_{11}}{3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{11}$$

En inversant, on aura:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} \cdot T_{11}$$

De même, on aura:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)} \cdot T_{11}$$

Ainsi, un tenseur de contrainte uniaxial ne donne pas forcément un tenseur de déformation uniaxial.

7.4 Relations entre E, ν et λ, μ .

On a vu que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} T_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} T_{kk} \quad \text{et}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} T_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \delta_{ij} T_{kk}$$

Par identification

Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

Par identification

$$\frac{1 + \nu}{E_y} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{E_y} = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}$$

Ou bien

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E_y}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E_y}{(1 + \nu)(1 - 2 \cdot \nu)} \\ E_y &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les constantes de Lamé, le module de Young, le module de cisaillement, le coefficient de Poisson et le module de rigidité à la compression sont tous interreliés. Seulement 02 d'entre eux sont indépendants pour un solide isotrope élastique linéaire.

Le tableau suivant résume ces différentes relations.

Interprétation des Coefficients d'élasticité (Suite)

Conversion des constantes pour un matériau élastique isotrope.

	λ, μ	E_Y, ν	μ, ν	E_Y, μ	k, ν
λ	λ	$\frac{\nu E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\mu(E_Y-2\mu)}{3\mu-E_Y}$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$
μ	μ	$\frac{E_Y}{2(1+\nu)}$	μ	μ	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$
k	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E_Y}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu E_Y}{3(3\mu-E_Y)}$	k
E_Y	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E_Y	$2\mu(1+\nu)$	E_Y	$3k(1-2\nu)$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	ν	$\frac{E_Y}{2\mu} - 1$	ν

8. Relation entre tenseurs déviatoriques de contrainte et de déformation

On a

$$\mathbf{T} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon$$

Or chaque tenseur peut être décomposé en:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_D \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_D$$

D'où:

$$\mathbf{T} = \lambda \cdot [(\varepsilon_{kk})_s + (\varepsilon_{kk})_D] + 2 \cdot \mu \cdot [(\varepsilon)_s + (\varepsilon)_D]$$

$$\mathbf{T}_s + \mathbf{T}_D = [\lambda \cdot (\varepsilon_{kk})_s + 2 \cdot \mu \cdot (\varepsilon)_s] + 2 \cdot \mu \cdot [(\varepsilon)_D]$$

Or, un tenseur sphérique de contraintes donne un tenseur sphérique de déformation. D'où

$$\mathbf{T}_s = [\lambda \cdot (\varepsilon_{kk})_s + 2 \cdot \mu \cdot (\varepsilon)_s]$$

Par identification, on aura:

$$\mathbf{T}_D = 2 \cdot \mu \cdot [(\varepsilon)_D]$$

$$(\varepsilon)_D = \frac{1}{2\mu} \mathbf{T}_D = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{T}_D$$

(4.24)

9. Influence de la Température

Sous l'effet de la température, les éléments d'un corps se dilatent. Supposons un petit élément découpé dans un corps soumis à des changements de température. Si la variation de température est continue à travers le volume du corps, la température du petit élément peut être considérée comme uniforme.

Si on désigne par « ΔT » le changement de température et par « α » le coefficient de dilatation thermique linéaire du solide, les composantes de la déformation produite par le changement de température seront:

$$\varepsilon_x^T = \varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T = \alpha \cdot \Delta T. \quad \text{Et} \quad \gamma_{xy}^T = \gamma_{xz}^T = \gamma_{yz}^T = 0 \quad (4.25)$$

Ces équations de déformations ont été trouvées par Duhamel et Newman.

9. Influence de la Température

Ainsi, si un corps quelconque est soumis en même temps aux charges extérieures et au changement de température, on peut superposer les effets et écrire que:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T$$

(4.26)

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

9. Influence de la Température

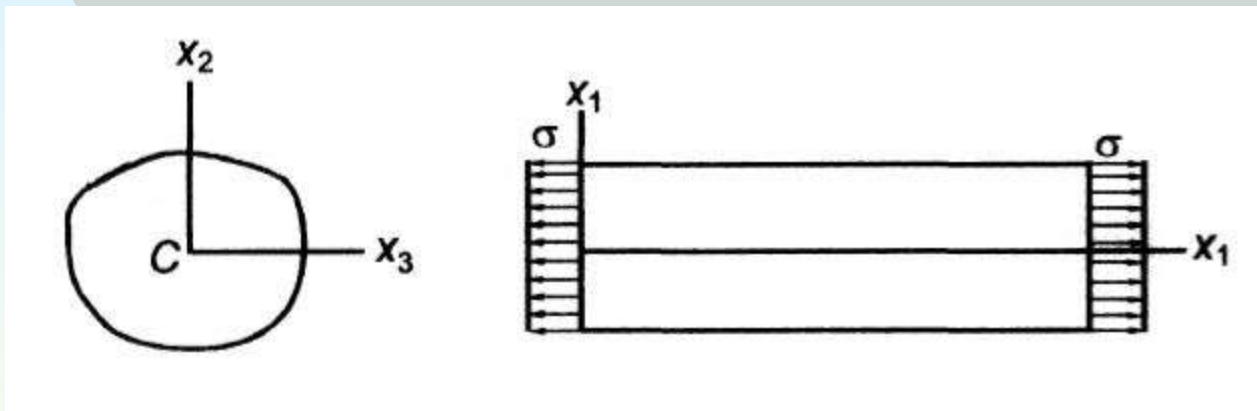
En inversant les équations (4.26) on trouve les contraintes en fonction des déformations dans le cas des charges extérieures et de la température. Soit:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda.\varepsilon_v + 2G.\varepsilon_x - (3\lambda + 2G)\alpha.\Delta T \\ \sigma_y &= \lambda.\varepsilon_v + 2G.\varepsilon_y - (3\lambda + 2G)\alpha.\Delta T \\ \sigma_z &= \lambda.\varepsilon_v + 2G.\varepsilon_z - (3\lambda + 2G)\alpha.\Delta T \\ \tau_{xy} &= G.\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G.\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G.\gamma_{yz}\end{aligned}\tag{4.27}$$

10. Applications.

10.1 Extension simple

On considère une barre cylindrique de section transversale quelconque soumise à une traction normale « σ » uniformément distribuée sur les faces extrêmes. Sa surface latérale n'est pas chargée (forces de surface et de volume).



Par expérience, la distribution des contraintes est la même quelque soit la section choisie suivant « x_1 ».

Sachant que sur les faces $x_1=0$ et $x_1=l$, les conditions aux limites sont: $T_{11}=\sigma$, $T_{21}=T_{31}=0$ et sur les plans $x_2=a$, $T_{12}=T_{22}=T_{32}=0$, la distribution la plus probable le long de la barre sera:

$$T_{11} = \sigma, \quad T_{22} = T_{23} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$$

Applications. (Suite) Extension simple

On doit montrer que:

- i) Les équations d'équilibre sont satisfaites
- ii) Toutes les conditions aux limites sont satisfaites
- iii) Il existe un champ de déplacement qui correspond au champ de contraintes supposé.

i) Toutes les composantes de contraintes sont constantes et les forces de volume sont négligées, d'où les équations d'équilibre sont satisfaites.

ii) Les conditions aux limites sur

La surface latérale

$$\mathbf{n} = 0\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$$

Et

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} = n_2(\mathbf{T}\mathbf{e}_2) + n_3(\mathbf{T}\mathbf{e}_3) = n_2(\mathbf{0}) + n_3(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

La condition de non chargement de la surface latérale est vérifiée.



Applications. (Suite) Extension simple

D'après la loi de Hooke, on a:

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} [T_{11} - \nu (T_{22} + T_{33})] = \frac{\sigma}{E_Y}$$

$$E_{22} = \frac{1}{E_Y} [T_{22} - \nu (T_{33} + T_{11})] = -\nu \frac{\sigma}{E_Y}$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_Y} [T_{33} - \nu (T_{11} + T_{22})] = -\nu \frac{\sigma}{E_Y}$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Les composantes de déformation sont constantes, d'où les équations de compatibilité sont vérifiées.

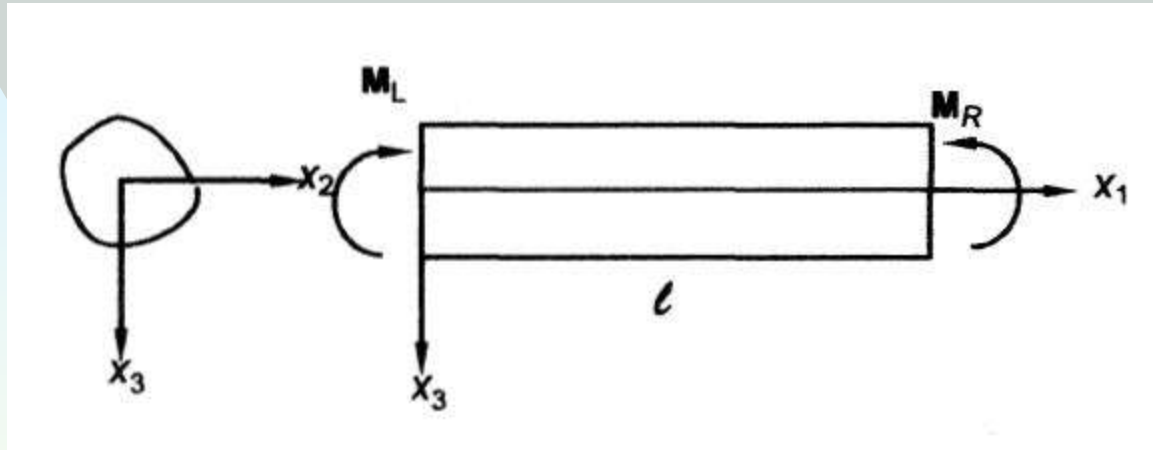
Par intégration, le champ de déplacement sera:

$$u_1 = \left(\frac{\sigma}{E_Y} \right) x_1, \quad u_2 = -\left(\nu \frac{\sigma}{E_Y} \right) x_2, \quad u_3 = -\left(\nu \frac{\sigma}{E_Y} \right) x_3$$

Applications. (Suite)

10.2 Flexion pure d'une poutre

On considère une barre cylindrique de section transversale quelconque en flexion simple ou pure.



On cherche un état de contrainte qui correspond à une surface latérale non soumise à la traction et une certaine distribution de traction normale sur les faces extrémités qui seront statiquement équivalents aux couples de flexion $M_R = M_2 e_2 + M_3 e_3$ et $M_L = -M_R$.

En s'appuyant sur le cas de l'extension simple, on peut supposer que seule T_{11} est différent de zéro et qu'elle est fonction de « x_1 ».

Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Pour satisfaire l'équilibre, on a:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{D'où} \quad T_{11} = T_{11}(x_2, x_3).$$

Par la loi de Hooke, on aura les déformations

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} T_{11}, \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{\nu}{E_Y} T_{11},$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Il faut vérifier les équations de compatibilité (les contraintes ont été supposées)

$$\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Ces équations sont vérifiées uniquement pour

$$T_{11} = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_3$$

Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Vérifions les conditions aux limites.

Sur la surface latérale pas de chargement.

Sur la face « $x_1=l$ », on aura:

$$\mathbf{t} = T\mathbf{e}_1 = T_{11} \mathbf{e}_1$$

Qui donnera le système de force résultant suivant

$$R_1 = \int T_{11} dA = \alpha \int dA + \beta \int x_2 dA + \gamma \int x_3 dA = \alpha A$$

$$R_2 = R_3 = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int x_3 T_{11} dA = \alpha \int x_3 dA + \beta \int x_2 x_3 dA + \gamma \int x_3^2 dA \\ &= \beta I_{23} + \gamma I_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\int x_2 T_{11} dA = -\alpha \int x_2 dA - \beta \int x_2^2 dA - \gamma \int x_2 x_3 dA \\ &= -\beta I_{33} - \gamma I_{23} \end{aligned}$$

Avec « A » section transversale et I_{22} , I_{33} et I_{23} sont des moments d'inertie.

Sur la face « $x_1=0$ », on aura un système de force opposé.

Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Par conditions aux limites, il n'ya pas de charge axiale aux extrémités, d'où: $R_1=0$, ce qui donne $\alpha=0$.

De plus, on suppose que les axes x_2 et x_3 coïncident avec les axes principaux, d'où $I_{23}=0$. Dans ce cas, on aura:

$$\beta = -\frac{M_3}{I_{33}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{M_2}{I_{22}}$$

Ainsi, la distribution de la contrainte pour la barre cylindrique sera:

$$T_{11} = \frac{M_2}{I_{22}} x_3 - \frac{M_3}{I_{33}} x_2$$

Et les autres $T_{ij}=0$.

Supposons que $M_3=0$ (simplicité) et considérons les déformations.

$$E_{11} = \frac{M_2}{I_{22} E_Y} x_3, \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{\nu M_2}{I_{22} E_Y} x_3$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Applications. (Suite) Flexion pure d'une poutre

Puisque les déformations vérifient les équations de compatibilité, on peut les intégrer pour trouver les déplacements:

$$u_1 = \frac{M_2}{E_Y I_{22}} x_1 x_3 - \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_4$$

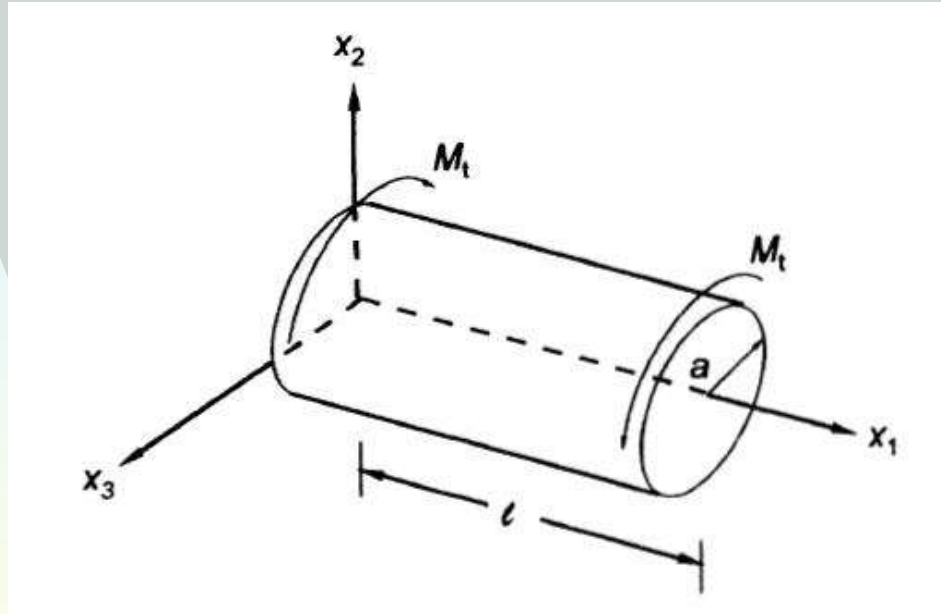
$$u_2 = -\nu \frac{M_2}{E_Y I_{22}} x_2 x_3 + \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 + \alpha_5$$

$$u_3 = -\frac{M_2}{2E_Y I_{22}} [x_1^2 - \nu (x_2^2 - x_3^2)] - \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_6$$

Les « α_i » sont des constantes d'intégration obtenues par les conditions aux limites sur le déplacement.

10.3 Torsion d'un cylindre à section circulaire

On considère un cylindre à section circulaire de rayon « a » et de longueur « l » soumis à des moments de torsion aux extrémités.



Par symétrie du problème, le mouvement de chaque plan de section transversale est une rotation de corps rigide autour de l'axe « x_1 ».

Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Si on considère « θ » un angle de rotation petit, le champ de déplacement associé sera:

$$\mathbf{u} = (\theta \mathbf{e}_1) \times \mathbf{r} = (\theta \mathbf{e}_1) \times (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) = \theta (x_2 \mathbf{e}_3 - x_3 \mathbf{e}_2)$$

Ou bien:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\theta x_3, \quad u_3 = \theta x_2$$

Avec: $\theta = \theta(x_1)$

En intégrant le vecteur déplacement, on obtient les déformations:

$$E_{12} = E_{21} = -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

Et les contraintes seront:

$$T_{12} = T_{21} = -\mu x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

$$T_{13} = T_{31} = \mu x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Avec cette distribution de contraintes, il reste à vérifier les équations d'équilibre. Soit (en négligeant les forces de volume)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Qui donne:

$$-\mu x_3 \left(\frac{d^2 \theta}{d x_1^2} \right) = 0$$

$$+\mu x_2 \left(\frac{d^2 \theta}{d x_1^2} \right) = 0$$

Par intégration, on a:

$$\frac{d \theta}{d x_1} \equiv \theta' = \text{constant.}$$



Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

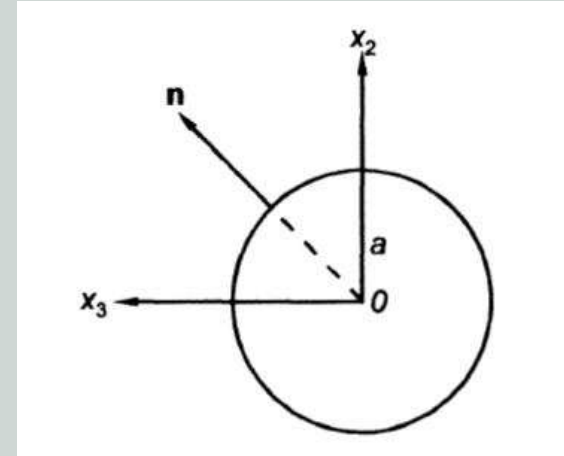
Vérifions maintenant les conditions aux limites.

Sur la surface latérale, on aura le vecteur normal:

$$\mathbf{n} = (1/a)(x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3).$$

Donc sur la surface latérale, on aura:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{n}] = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ T_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} x_2 T_{12} + x_3 T_{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



En remplaçant les composantes de contraintes trouvées, on aura:

$$\mathbf{t} = \frac{\mu}{a} (-x_2 x_3 \theta' + x_2 x_3 \theta') \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Résultat vrai, puisqu'il n'y a que des moments de torsion, pas de force de traction aux extrémités.

Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Sur la face « $x_1=l$ », on aura le vecteur normal

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$$

D'où

$$\mathbf{t} = T\mathbf{e}_1 = T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3$$

La distribution de la traction de surface sur l'extrémité donne:

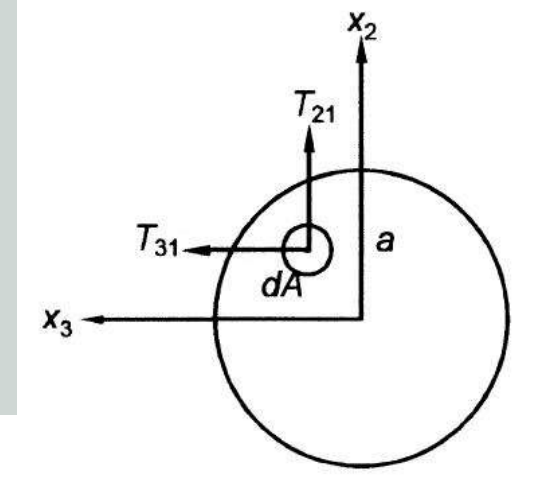
$$R_1 = \int T_{11} dA = 0$$

$$R_2 = \int T_{21} dA = -\mu \theta' \int x_3 dA = 0$$

$$R_3 = \int T_{31} dA = \mu \theta' \int x_2 dA = 0$$

$$M_1 = \int (x_2 T_{31} - x_3 T_{21}) dA = \mu \theta' \int (x_2^2 + x_3^2) dA = \mu \theta' I_p$$

$$M_2 = M_3 = 0$$



Avec $I_p = \pi \cdot a^4 / 2$ le moment d'inertie polaire.

De plus, $\int x_2 dA = \int x_3 dA = 0$ puisque la surface est symétrique % aux axes.

Merci. Fin du chapitre 4

Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 5

Equations Générales de l'Elasticité