Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 5

Equations générales de l'élasticité

COURS 6 **Dimanche 19.04.2020**

1. Généralités

Un problème complet d'élasticité comporte les aspects suivants:

a) Données du problème

- La surface initiale du corps est exprimée par ses dimensions et ses cosinus directeurs.
- La loi de répartition de la charge sur toute la surface extérieure du corps doit être connue.
- La loi de distribution des forces volumiques pout tout le volume du corps doit être connue.

b) Inconnues

- Contraintes:

$$\sigma_x = f_1(x, y, z) \qquad \tau_{xy} = f_4(x, y, z)$$
$$\sigma_y = f_2(x, y, z) \qquad \tau_{xz} = f_5(x, y, z)$$
$$\sigma_z = f_3(x, y, z) \qquad \tau_{yz} = f_6(x, y, z)$$

- Déformations (extensions et distorsions):

$$\varepsilon_x = F_1(x, y, z) \qquad \gamma_{xy} = F_4(x, y, z)$$
$$\varepsilon_y = F_2(x, y, z) \qquad \gamma_{xz} = F_5(x, y, z)$$
$$\varepsilon_z = F_3(x, y, z) \qquad \gamma_{yz} = F_6(x, y, z)$$

1. Généralités

- **Déplacements:**

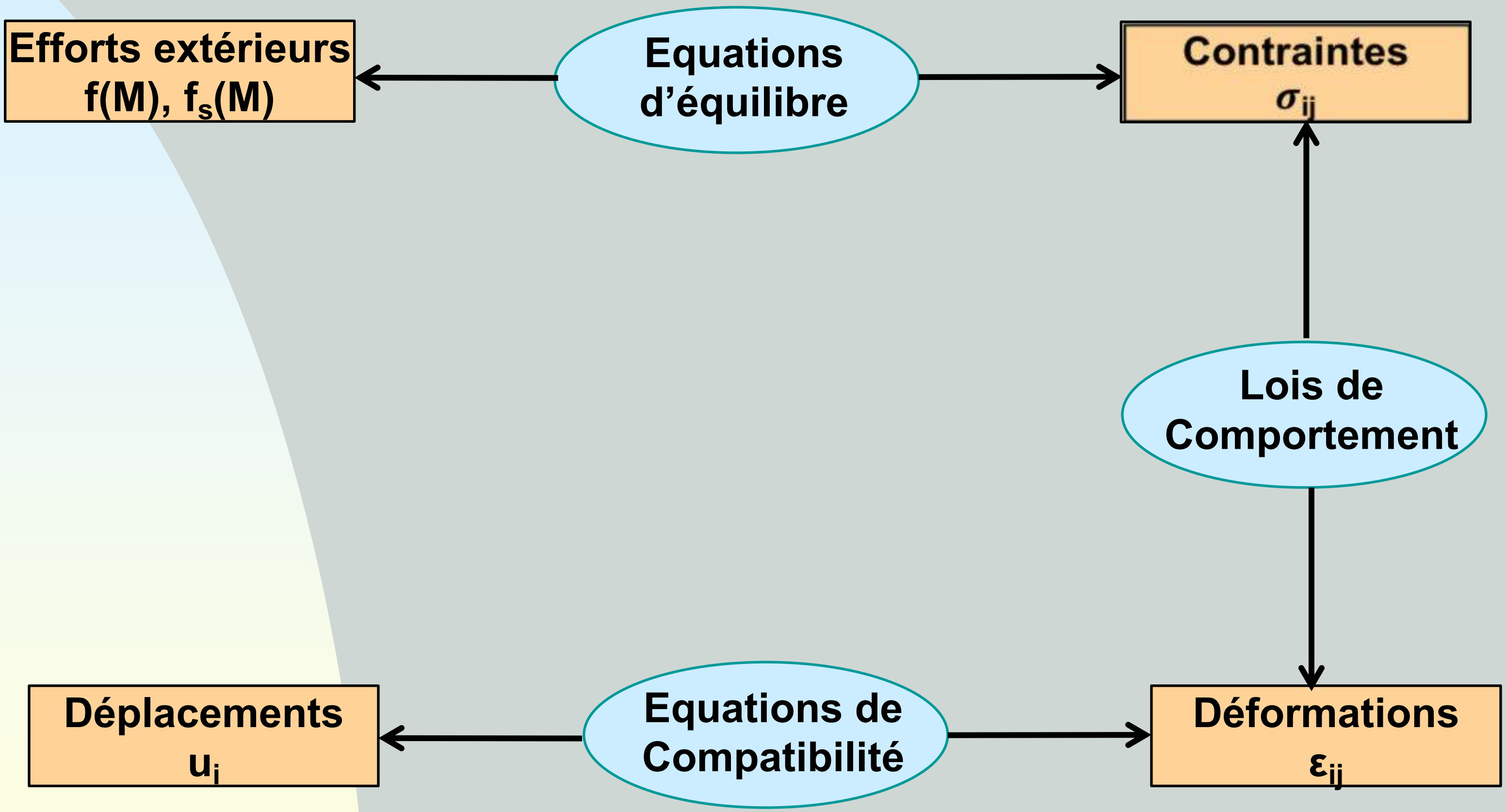
$$u = g_1(x, y, z)$$
$$v = g_2(x, y, z)$$
$$w = g_3(x, y, z)$$

c) Equations disponibles

Ainsi au total, on a 15 inconnues. Il nous faut donc 15 équations en chaque point à l'intérieur du corps et les conditions aux limites pour tous les points situés sur la surface extérieure du corps, donc on a:

- Etude statique : 03 équations différentielles d'équilibre (ou bien 03 équations aux limites)
- Etude Géométrique : 06 équations différentielles de compatibilité.
- Etude Physique : 06 équations de Hooke.

Schématiquement



2. Récapitulatif des principales équations de la théorie de l'élasticité.

a) Equations de l'étude statique (Navier)

- Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+X=0 \qquad (5.1)$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+X=0$$

- Conditions aux limites

$$\bar{X}=\sigma_x l+\tau_{xy} m+\tau_{xz} n$$
$$\bar{Y}=\tau_{xy} l+\sigma_y m+\tau_{yz} n \qquad (5.2)$$
$$\bar{Z}=\tau_{xz} l+\tau_{yz} m+\sigma_z n$$

2. Récapitulatif des principales équations de la théorie de l'élasticité.

Les équations (5.1) doivent être satisfaites dans tous les points à travers tout le volume du corps. Les contraintes, à l'intérieur du corps varient tandis qu'à la surface elles doivent être en équilibre avec les forces extérieures se trouvant sur la surface du corps vérifiant ainsi les équations (5.2).

b) Equations de l'étude Géométrique

- **Equations de Cauchy (Extensions et Distorsions)**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \textbf{(5.3)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

2. Récapitulatif des principales équations de la théorie de l'élasticité.

- **Equations de compatibilité ou St Venant**

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2.\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 2.\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\,\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2.\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} \qquad \textbf{(5.4)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{-\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\,\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{-\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}$$

2. Récapitulatif des principales équations de la théorie de l'élasticité.

c) Equations de l'étude Physique

❖ **Equations de Hooke**

Ainsi les 06 équations de la loi de HOOKE s'écrivent :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \vartheta\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \vartheta\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

2. Récapitulatif des principales équations de la théorie de l'élasticité.

❖ **Equations de Lamé**

Il suffit d'exprimer les contraintes en fonction des déformations en inversant les équations (4.6). On aura

$$\sigma_x = \frac{\vartheta.E}{(1-2.\vartheta)(1+\vartheta)}.\varepsilon_v + \frac{E}{(1+\vartheta)}.\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{\vartheta.E}{(1-2.\vartheta)(1+\vartheta)}.\varepsilon_v + \frac{E}{(1+\vartheta)}.\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{\vartheta.E}{(1-2.\vartheta)(1+\vartheta)}.\varepsilon_v + \frac{E}{(1+\vartheta)}.\varepsilon_z \qquad (5.6)$$

$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G.\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G.\gamma_{yz}$$

2. Récapitulatif des principales équations de la théorie de l'élasticité.

c) Equations de l'étude Physique

- Equations de Hooke sous forme volumique (5.7)

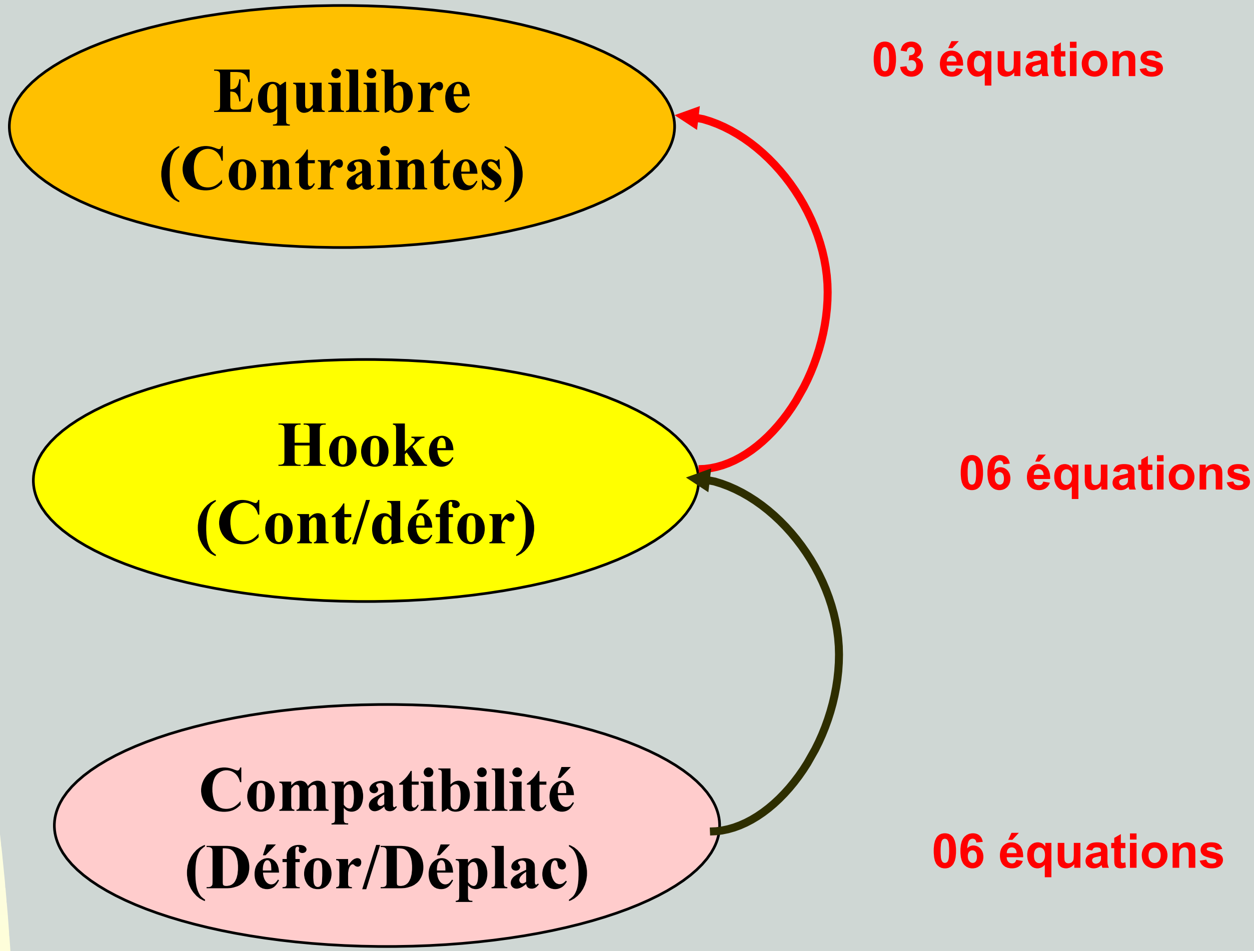
$$\varepsilon_v = \frac{1-2\vartheta}{E}\,\theta$$

- Equations de Hooke sous forme générale (5.8)

$$\theta = (3\lambda + 2G)\varepsilon_v$$

3. Résolution des équations de l’élasticité en déplacements (Solution de Lamé).

Le but exprimer l’équilibre en déplacements



On obtient 03 équations en déplacements

3. Résolution des équations de l'élasticité en déplacements (Solution de Lamé).

Le but de la solution de Lamé (résolution en déplacements) est d'exprimer les équations différentielles d'équilibre en fonction des déplacements u, v et w.

Pour cela: en utilisant les équations de Lamé (5.6) en les remplaçant dans les équations d'équilibre (5.1), on aura:

$$\frac{\partial(\lambda\varepsilon_v + 2G\varepsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial\left(G\gamma_{xy}\right)}{\partial y} + \frac{\partial(G\gamma_{xz})}{\partial z} + X = 0$$
$$\frac{\partial\left(G\gamma_{xy}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\lambda\varepsilon_v + 2G\varepsilon_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial(G\gamma_{yz})}{\partial z} + X = 0$$
$$\frac{\partial(G\gamma_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(G\gamma_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda\varepsilon_v + 2G\varepsilon_z)}{\partial z} + X = 0$$

Après des opérations mathématiques intermédiaires, on obtient les équations finales de Lamé.

3. Résolution des équations de l'élasticité en déplacements (Solution de Lamé).

Prenons comme exemple la 1ère équation

En réarrangeant les termes, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda.\varepsilon_v + 2.G.\varepsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y}(G.\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(G.\gamma_{xz}) + X = 0$$

ça donne

$$\lambda.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + 2.G.\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + G.\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + G.\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0 \qquad (1)$$

Or: $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \implies \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

Et. $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \implies \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$

Et $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \implies \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

En remplaçant dans (1) on aura:

$$\lambda.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + 2.G.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] + G.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right] + X = 0$$

3. Résolution des équations de l'élasticité en déplacements (Solution de Lamé).

On aura donc par remplacement par (1):

$$\lambda.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + 2.G.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] + G.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right] + X = 0$$

$$\textbf{Soit :}\quad \lambda.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + G.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right] + X = 0$$

$$\textbf{Soit : :}\quad \lambda.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G.\underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]}_{\nabla^2 u} + G.\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]}_{\varepsilon_v} + X = 0$$

$\nabla^2 u$: **Laplacien de « u ». On aura donc:**

$$\lambda.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G.\nabla^2 u + G.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + X = 0$$

Similaire pour les 02 autres équations, on obtient les 03 équations de Lamé

3. Résolution des équations de l'élasticité en déplacements (Solution de Lamé).

Soit:

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0 \qquad \textbf{(5.9)}$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

3. Résolution des équations de l'élasticité en déplacements (Solution de Lamé).

Si on a en plus l'influence de la température, les équations d'élasticité en déplacements s'écrivent:

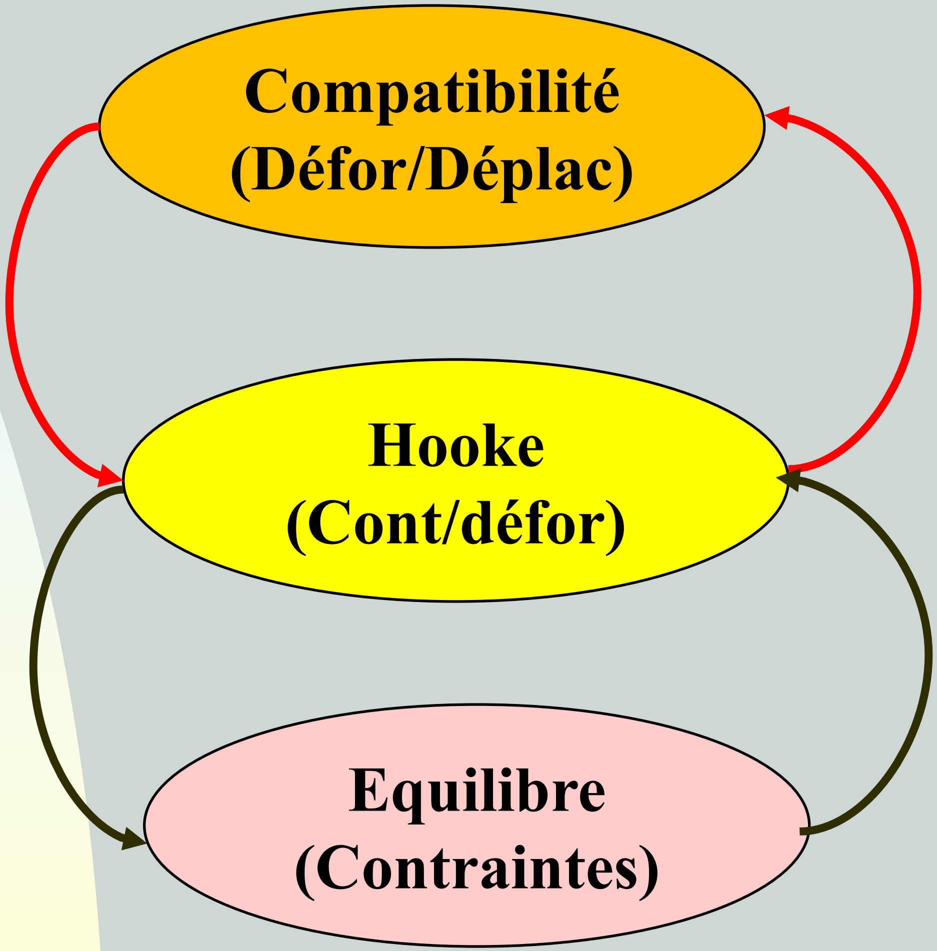
$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G\nabla^2 u - \frac{\alpha E}{(1-2\vartheta)}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} + X = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G\nabla^2 v - \frac{\alpha E}{(1-2\vartheta)}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial y} + Y = 0 \qquad \textbf{(5.10)}$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G\nabla^2 w - \frac{\alpha E}{(1-2\vartheta)}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial z} + Z = 0$$

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

Le but exprimer la combinaison des équations en contraintes



06 équations

06 équations

03 équations

On obtient 06 équations en Contraintes

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

Le but de la solution de Beltrami Michel (résolution en contraintes) est d'exprimer les 15 équations de l'élasticité en contrainte uniquement.

Pour commencer on dérive les équations (5.9) respectivement par rapport à x, y et z et on suppose que les forces de volume sont constantes

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G.\nabla^2 u + X = 0 \quad \% \ x$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G.\nabla^2 v + Y = 0 \quad \% \ y$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G.\nabla^2 w + Z = 0 \quad \% \ z$$

Soit:

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + G.\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 u\right) + \cancelto{0}{\frac{\partial X}{\partial x}} = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + G.\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 v\right) + \cancelto{0}{\frac{\partial Y}{\partial y}} = 0 \qquad (5.11)$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} + G.\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 w\right) + \cancelto{0}{\frac{\partial Z}{\partial z}} = 0$$

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + G.\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u) = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + G.\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v) = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} + G.\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 w) = 0$$

En additionnant les équations (5.11) membre à membre on aura:

$$(\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2}\right) + G.\nabla^2 \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\varepsilon_v} = 0$$

Soit:

$$(\lambda + 2.G)\nabla^2 \varepsilon_v = 0$$

Ou bien

$$\boxed{\nabla^2 \varepsilon_v = 0}$$

Lorsque les forces de volume sont constantes, le Laplacien de la déformation volumique est nul.

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + G.\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u) = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + G.\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v) = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} + G.\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 w) = 0$$

Il faut donc transformer les déformations des équations (5.11) en contraintes.

Pour cela on utilise les équations de lamé

On a:

$$\sigma_x = \lambda.\varepsilon_v + 2.G.\varepsilon_x$$
$$\sigma_y = \lambda.\varepsilon_v + 2.G.\varepsilon_y$$
$$\sigma_z = \lambda.\varepsilon_v + 2.G.\varepsilon_z$$

En appliquant le Laplacien à ces équations on aura:

$$\nabla^2(\sigma_x) = \lambda.\nabla^2(\varepsilon_v) + 2.G.\nabla^2(\varepsilon_x)$$
$$\nabla^2(\sigma_y) = \lambda.\nabla^2(\varepsilon_v) + 2.G.\nabla^2(\varepsilon_y)$$
$$\nabla^2(\sigma_z) = \lambda.\nabla^2(\varepsilon_v) + 2.G.\nabla^2(\varepsilon_z)$$

Or $\nabla^2\varepsilon_v = 0$

D'où

$$\nabla^2(\sigma_x) = 2.G.\nabla^2(\varepsilon_x)$$
$$\nabla^2(\sigma_y) = 2.G.\nabla^2(\varepsilon_y)$$
$$\nabla^2(\sigma_z) = 2.G.\nabla^2(\varepsilon_z) \quad (5.12)$$

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

Or d'après la loi de Hooke générale, on a:

$$\theta = (3\lambda + 2G).\,\varepsilon_v \quad \text{et} \quad \varepsilon_v = \frac{1}{(3\lambda + 2G).}\theta$$

Si je dérive cette équation 2 fois par rapport à x, y et z, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G).}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G).}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G).}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}
\end{aligned} \qquad (5.13)$$

Il faut maintenant remplacer (5.12) et (5.13) dans (5.11)

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

Il faut maintenant remplacer (5.12) et (5.13) dans (5.11). On aura :

Exemple: 1ère équation

$$(\lambda + G)\frac{1}{(3\lambda + 2G)}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + G.\frac{\nabla^2(\sigma_x)}{2.G} = 0$$

En réarrangeant les termes et en remplaçant les constantes de Lamé, on aura

$$\boxed{(1 + \vartheta).\nabla^2(\sigma_x) + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0}$$

On suit le même cheminement pour obtenir les autres équations de Beltrami-michel.

(5.11)

$$\begin{aligned}
(\lambda + G)\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial x^2} + G.\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u) &= 0\\
(\lambda + G)\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial y^2} + G.\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v) &= 0\\
(\lambda + G)\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial z^2} + G.\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 w) &= 0
\end{aligned}$$

(5.12)

$$\begin{aligned}
\nabla^2(\sigma_x) &= 2.G.\nabla^2(\varepsilon_x)\\
\nabla^2(\sigma_y) &= 2.G.\nabla^2(\varepsilon_y)\\
\nabla^2(\sigma_z) &= 2.G.\nabla^2(\varepsilon_z)
\end{aligned}$$

(5.13)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial x^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)}.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial y^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)}.\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial z^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)}.\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

4. Résolution des équations de l'élasticité en Contraintes (Solution de Beltrami-Michel).

On suit le même cheminement pour obtenir les autres équations de Beltrami-michel.

$$
\begin{aligned}
(1+\vartheta).\nabla^2(\sigma_x) + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= 0 \\
(1+\vartheta).\nabla^2(\sigma_y) + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= 0 \\
(1+\vartheta).\nabla^2(\sigma_z) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= 0 \\
(1+\vartheta).\nabla^2(\tau_{xy}) + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= 0 \\
(1+\vartheta).\nabla^2(\tau_{xz}) + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} &= 0 \\
(1+\vartheta).\nabla^2(\tau_{yz}) + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} &= 0
\end{aligned}
\qquad (5.14)
$$

Equations de Lamé et les équations de Beltrami Michel sous la notation indicielle

5. Equations d'élasticité en déplacements.

Equation de Lamé Clapeyron.

C'est une méthode de résolution directe valable principalement pour les problèmes de type I. On résout le problème isostatique en termes de déplacements. Il est donc utile de faire appel à des équations ne faisant intervenir que les déplacements.

Les équations de Lamé Clapeyron sont obtenues par exprimer les équations d'équilibre en déplacements, en faisant intervenir les équations de compatibilité et de Hooke.

On a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

avec $\gamma_{ij} = 2.\varepsilon_{ij}$

Or

$$\sigma_{ij} = \lambda.\delta_{ij}.\varepsilon_v + 2.G.\varepsilon_{ij} = \lambda.\delta_{ij}.\varepsilon_v + G.\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (5.15)$$

Avec $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ $\qquad u_{j,i} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$

i,j = 1, 2 et 3 Soit x, y et z

D'où en dérivant (5.15

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda.\delta_{ij}.\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_j} + G.\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) \qquad (5.16)$$

Equations d'élasticité en déplacements. Equation de Lamé Clapeyron. (Suite)

Or on a:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_j}.\delta_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

Or d'après les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho.X_i = \rho.a_i$$

$$div(\sigma) + f_v = \rho.a$$

a: accélération

f_v: force de volume

σ: Tenseur des contraintes

Devient, en remplaçant dans (5.16)

$$\rho_0.\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0.X_i + (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i} + \mathrm{G}.\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \qquad (5.17))$$

Equations d'élasticité en déplacements. Equation de Lamé Clapeyron. (Suite)

Pour i=&, 2 et 3 (c'est-à-dire x, y et z), on aura:

$$\rho_0 . \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 . X + (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \text{G}.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
$$\rho_0 . \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho_0 . Y + (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + \text{G}.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (5.18)$$
$$\rho_0 . \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_0 . Z + (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + \text{G}.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

avec

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\,(U)$$

Finalement, en forme invariant, on a les équations de Lamé Clapeyron

$$\rho_0 . \frac{\partial^2 (U)}{\partial t^2} = \rho_0 . (X) + (\lambda + G)\nabla\varepsilon_v + \text{G}.\,div\,\nabla(U) \quad (5.19)$$

6. Equations d'élasticité en déplacements.

Coordonnées Cylindriques.

La loi de Hooke en coordonnées cylindriques sera:

$$T_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$T_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)$$

$$T_{zz} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$T_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) = T_{\theta r} \qquad (5.20)$$

et

$$T_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) = T_{z\theta}$$

$$T_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = T_{rz}$$

avec

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (5.21)$$

Coordonnées Cylindriques.

Les équations de Navier en coordonnées cylindriques seront:

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_o B_r + (\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right]$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_o B_\theta + \frac{(\lambda + \mu)}{r}\frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right]$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho_0 B_z + (\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right] \qquad (5.22)$$

7. Equations d'élasticité en déplacements.

Coordonnées Sphériques.

La loi de Hooke en coordonnées sphériques sera:

$$T_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$T_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$T_{\phi\phi} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \right)$$

$$T_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \qquad (5.23)$$

et

$$T_{\theta\phi} = \mu \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right)$$

$$T_{\phi r} = \mu \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right)$$

avec

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \qquad (5.24)$$

Coordonnées Sphériques.

Les équations de Navier en coordonnées sphériques seront:

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_o B_r + (\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_o B_\theta + \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial e}{\partial\theta} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right] \quad \textbf{(5.25)}$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial t^2} = \rho_o B_\phi + \frac{\lambda+\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial e}{\partial\phi} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\phi\sin\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right]$$

8. Equations d'élasticité en contraintes.

Equations de Beltrami-Michell.

C'est une méthode de résolution directe valable surtout pour les problèmes de type II. Il est indiqué de faire appel à des équations ne faisant intervenir que les composantes T_{ij} du tenseur de contraintes.

Les équations de mouvement sont généralement insuffisantes. Une fois les contraintes connues, il faut que ça donne des déformations par le biais des équations de Hooke et que ces déformations puissent donner des déplacements par compatibilité.

Dans ce cas, il faut exprimer la combinaison des 03 types d'équations en contraintes.

$$\nabla T_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\theta_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}.\left[f_{k,k}.\delta_{ij} + \left(f_{i,j} + f_{j,i}\right)\right] = \frac{\nu}{1-\nu}.\left[a_{k,k}.\delta_{ij} + \left(a_{i,j} + a_{j,i}\right)\right]$$

(5.26)

Avec: $\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ et: $T_{ij} = \sigma_{ij}$

Si les forces de volume sont constantes ou négligées, et qu'on est en état statique l'équation devient

$$\nabla T_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\theta_{,ij} = 0$$

(5.27)

Equations d'élasticité en contraintes. (Suite)

Démonstration

On a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\vartheta}{E}\sigma_{ij} - \frac{\vartheta}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

En considérant, l'équation de compatibilité, on a:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

La 1ère s'écrira $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2.\varepsilon_{12,12}$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

En remplaçant, on aura:

$$(1+\nu).\left[T_{11,22} + T_{22,11}\right] - \nu\left(\theta_{,11} + \theta_{,22}\right) = 2(1+\nu).T_{12,12} \qquad \textbf{(5.28)}$$

Il faut calculer $\sigma_{12,12}$ à partir des équations d'équilibre.

$$\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho . a_i$$

Equations d'élasticité en contraintes. (Suite)

Démonstration

On dérive la 1ère % à x_1, la 2ème % à x_2 et la 3ème % à x_3, on aura:

$$T_{11,11} + T_{12,12} + T_{13,13} + f_{v1,1} = \rho a_{1,1} \qquad \textbf{(i)}$$

$$T_{12,12} + T_{22,22} + T_{23,23} + f_{v2,2} = \rho a_{2,2} \qquad \textbf{(ii)}$$

$$T_{13,13} + T_{23,23} + T_{33,33} + f_{v3,3} = \rho a_{3,3} \qquad \textbf{(iii)}$$

En faisant (i) + (ii) - (iii) on aura:

$$2.T_{12,12} = \left(\rho_0.a_{1,1} + \rho_0.a_{2,2} - \rho_0.a_{3,3}\right) - \left[T_{11,11} + T_{22,22} - T_{33,33}\right] - \left(f_{v1,1} + f_{v2,2} - f_{v3,3}\right)$$

En remplaçant dans (6.27), on aura:

(5.29)

$$(1+\nu)\left[\nabla\theta - \theta_{,33} - \nabla T_{33}\right] - \nu\left[\nabla\theta - \theta_{,33}\right] = (1+\nu)\left(\rho_0.a_{1,1} + \rho_0.a_{2,2} - \rho_0.a_{3,3}\right) - (1+\nu)\left(f_{v1,1} + f_{v2,2} - f_{v3,3}\right)$$

Equations d'élasticité en contraintes. (Suite)

Démonstration

De façon similaire pour les 02 autres équations, on aura:

$$(1+\nu)\left[\nabla\theta-\theta_{,11}-\nabla T_{,11}\right]-\nu\left[\nabla\theta-\theta_{,11}\right]=$$
$$(1+\nu)\left(-\rho_0.a_{1,1}+\rho_0.a_{2,2}+\rho_0.a_{3,3}\right)-(1+\nu)\left(-f_{v1,1}+f_{v2,2}+f_{v3,3}\right)$$
$$(1+\nu)\left[\nabla\theta-\theta_{,22}-\nabla T_{,22}\right]-\nu\left[\nabla\theta-\theta_{,22}\right]=$$
$$(1+\nu)\left(\rho_0.a_{1,1}-\rho_0.a_{2,2}+\rho_0.a_{3,3}\right)-(1+\nu)\left(f_{v1,1}-f_{v2,2}+f_{v3,3}\right)$$

(5.30)

En faisant la somme des 03 équations, on aura::

$$\nabla\theta=\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left[\left(\rho_0.a_{1,1}+\rho_0.a_{2,2}+\rho_0.a_{3,3}\right)-\left(f_{v1,1}+f_{v2,2}+f_{v3,3}\right)\right]$$

En remplaçant dans (6.28) et (6.29) on aura:

(5.31)

$$\nabla T_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\theta_{,ij}+\frac{\nu}{1-\nu}.\left[f_{k,k}.\delta_{ij}+\left(f_{i,j}+f_{j,i}\right)\right]=\frac{\nu}{1-\nu}.\left[a_{k,k}.\delta_{ij}+\left(a_{i,j}+a_{j,i}\right)\right]$$

Merci. Fin du chapitre 5

Théorie de l’élasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 6

Elasticité Plane en Coordonnées Cartésiennes

COURS 8 **Dimanche 26.04.2020**