

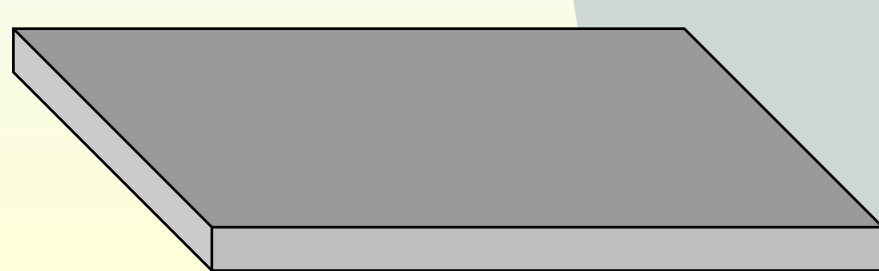
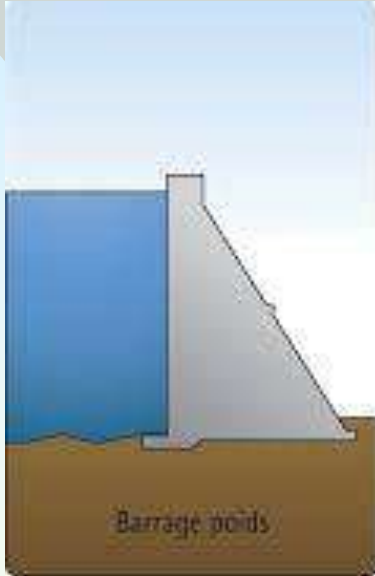
# *Théorie d'Elasticité*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Chap. 6**

## **Elasticité Plane en Coordonnées Cartésiennes**

# 1. Introduction



# Passer de 3D à 2D

**Déformation Plane**

**Contrainte Plane**

## 2. Déformation Plane

Valable généralement pour des structures très étendues suivant une direction (par exemple la direction « z »).

Si une structure est :

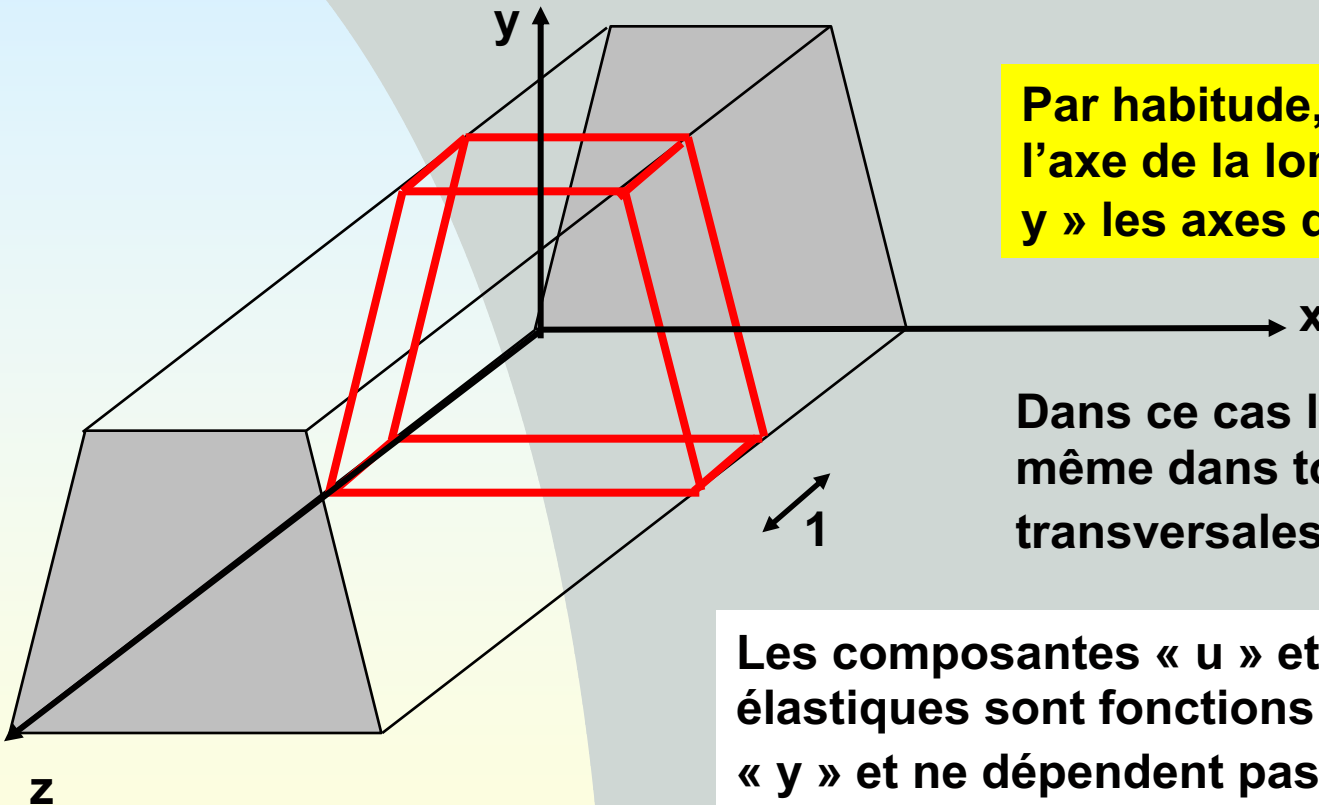
- ❖ De longueur très importante par rapport aux 02 autres dimensions.
- ❖ Sollicitée par des forces perpendiculaires aux éléments longitudinaux et ne changent pas le long de la longueur.
- ❖ De section transversal constante le long de la longueur
- ❖ Le matériau est le même dans toute la structure

Alors on peut parler de

**Déformation  
Plane**

## 2. Déformation Plane

Toute section loin des extrémités subit une déformation plane et les déplacements de tous les points de la structure déformée se trouvent dans des plans perpendiculaires à la longueur de la structure



Par habitude, on prendra l'axe « z » l'axe de la longueur et les axes « x et y » les axes dans le plan

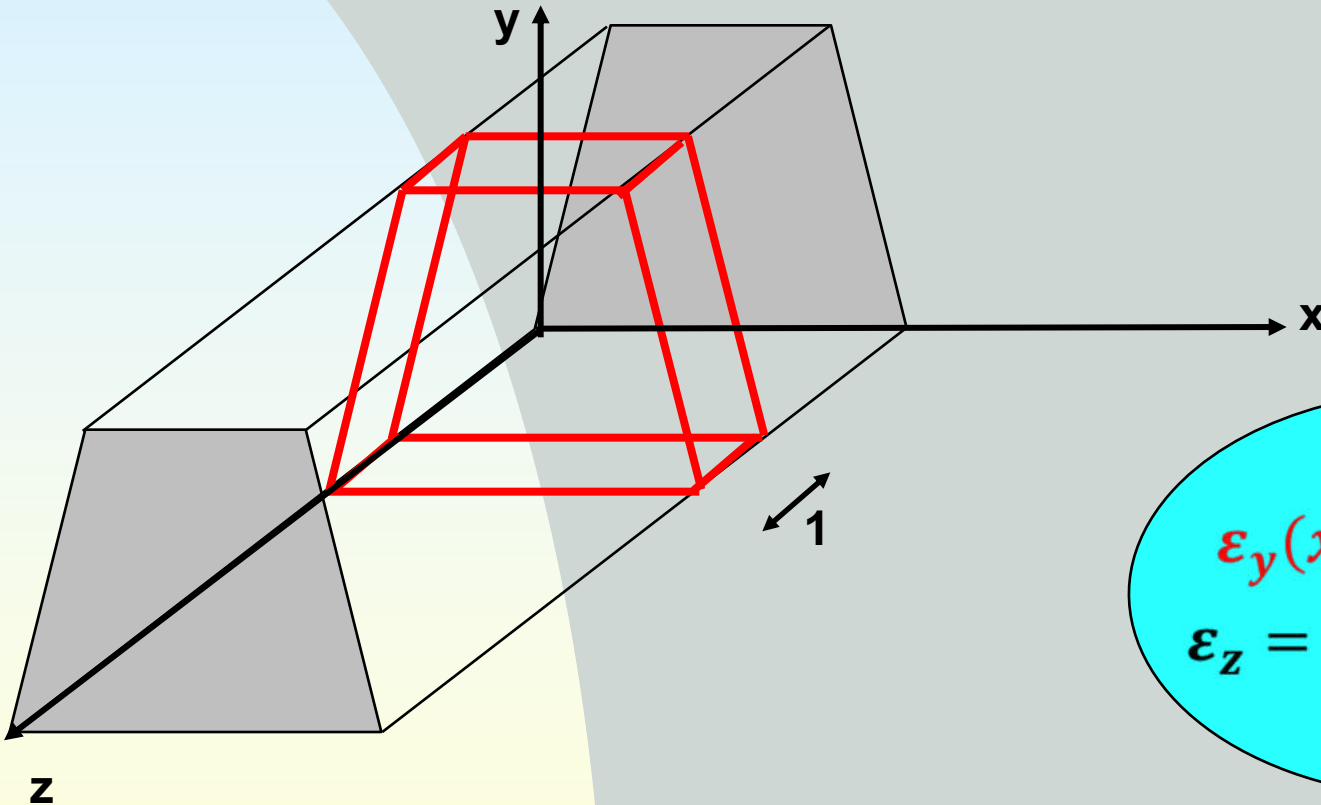
Dans ce cas la déformation est la même dans toutes les sections transversales de la structure

Les composantes « u » et « v » du déplacements élastiques sont fonctions uniquement de « x » et « y » et ne dépendent pas de « z »

$$u(x,y) ; v(x,y)$$
$$w=0$$

## 2. Déformation Plane

Par conséquent pour chaque plan «  $z=Cte$  », le déplacement est le même et localisé dans ce plan

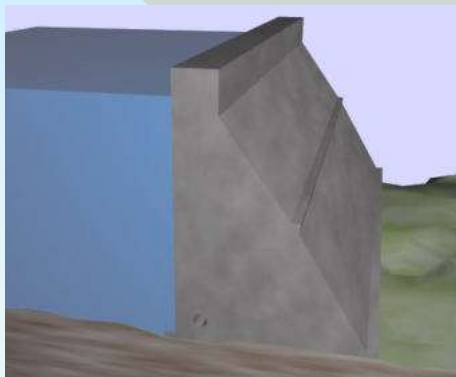


On aura donc

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x(x, y); \\ &\varepsilon_y(x, y); \gamma_{xy}(x, y) \\ &\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \end{aligned}$$

## 2. Déformation Plane

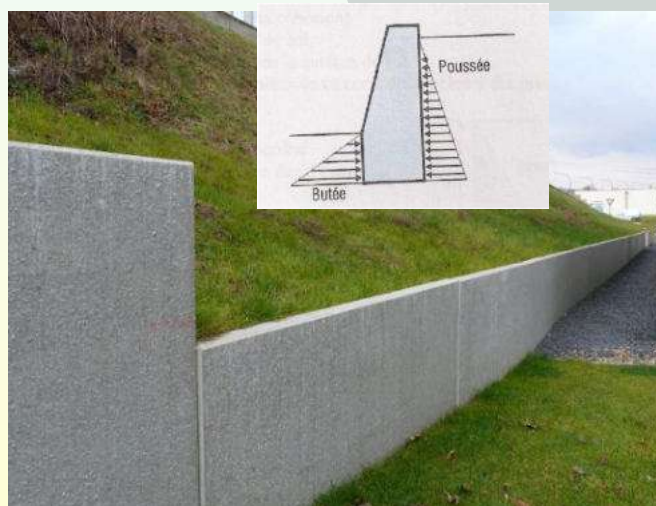
### Exemples



**Barrage droit**



**Conduite sous Pression**



**Mur de Soutènement**



**Tunnel**

## 2. Déformation Plane

A partir des hypothèses prises, on aura

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}\tag{6.1}$$

Or

**Loi de Hooke**

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0\end{aligned}$$

De la 3<sup>ème</sup> on peut tirer

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad ; \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)\tag{6.2}$$





## 2. Déformation Plane

En remplaçant  $\sigma_z$  dans les 02 autres équations, on aura

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y))]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \nu(\sigma_x + \sigma_y))]$$

Après réarrangement des termes, on aura

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ \sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_y \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ \sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_x \right]$$

En posant :

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

alors

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (6.3)$$

On aura:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} [\sigma_x - \nu_1 \cdot \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1} [\sigma_y - \nu_1 \cdot \sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_1} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

(6.4)

## 2. Déformation Plane

### Les inconnues

#### Contraintes

(03)

$$\sigma_x(x, y); \sigma_y(x, y); \\ \tau_{xy}(x, y)$$

#### Déformations

(03)

$$\varepsilon_x(x, y); \varepsilon_y(x, y); \\ \gamma_{xy}(x, y)$$

#### Déplacements

(02)

$$u(x, y); \\ v(x, y)$$

**08 inconnues**

**08 équations**

## 2. Déformation Plane

### a) Equations de l'étude statique (02)

#### i) Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

#### ii) Conditions aux limite

$$\bar{X} = l. \sigma_x + m. \tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l. \tau_{xy} + m. \sigma_y$$

## 2. Déformation Plane

### b) Equations de l'étude géométrique (03)

#### i) Equations de Cauchy (Extensions et distorsions)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

#### ii) Equations de compatibilité (St Venant)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y}$$

## 2. Déformation Plane

### c) Equations de l'étude physique (03)

#### i) Equations de Hooke

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_y \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 + \nu) \sigma_x \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}$$

#### ii) Equations de Lamé

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (2G + \lambda) \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y \\ \sigma_y &= (2G + \lambda) \varepsilon_y + \lambda \varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

## 2. Déformation Plane

### Tenseurs

#### i) Tenseur des Contraintes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix}$$

#### ii) Tenseur des Déformations

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 3. Contrainte Plane

Le cas le plus connu est celui d'une plaque mince soumise à des forces dans le plan uniformément distribuées sur toute l'épaisseur

Si une structure est :

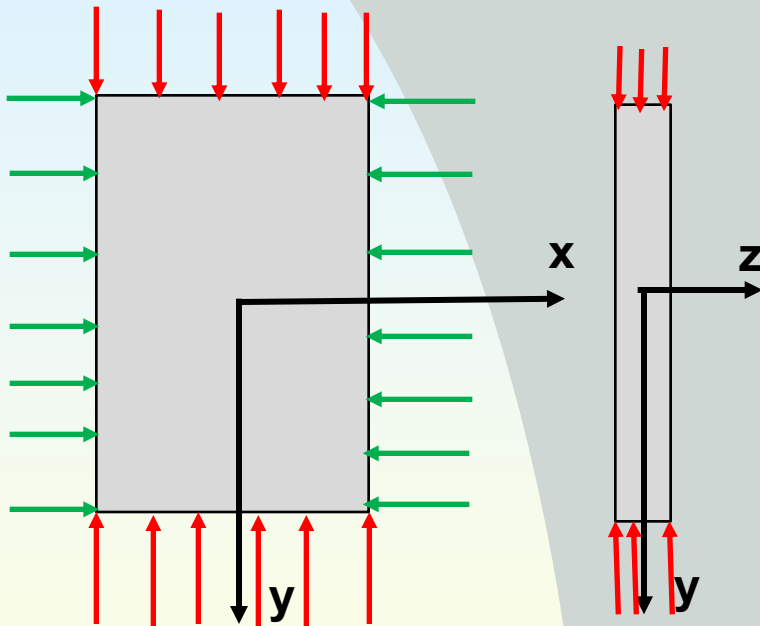
- ❖ Mince (épaisseur très petite devant les 02 autres)
- ❖ Les 02 autres dimensions sont de même grandeur
- ❖ Soumise à une charge dans le plan uniformément répartie sur l'épaisseur
- ❖ Le matériau est le même dans toute la structure

Alors on peut parler de

**Contrainte  
Plane**

### 3. Contrainte Plane

Toute section à l'intérieur de l'épaisseur subit une contrainte plane et les déplacements de tous les points de la structure déformée se trouvent dans des plans appartenant à l'épaisseur de la structure



Par habitude, on prendra l'axe « z » l'axe de l'épaisseur et les axes « x et y » les axes dans le plan

Dans ce cas contrainte est la même dans toutes les sections de l'épaisseur de la structure

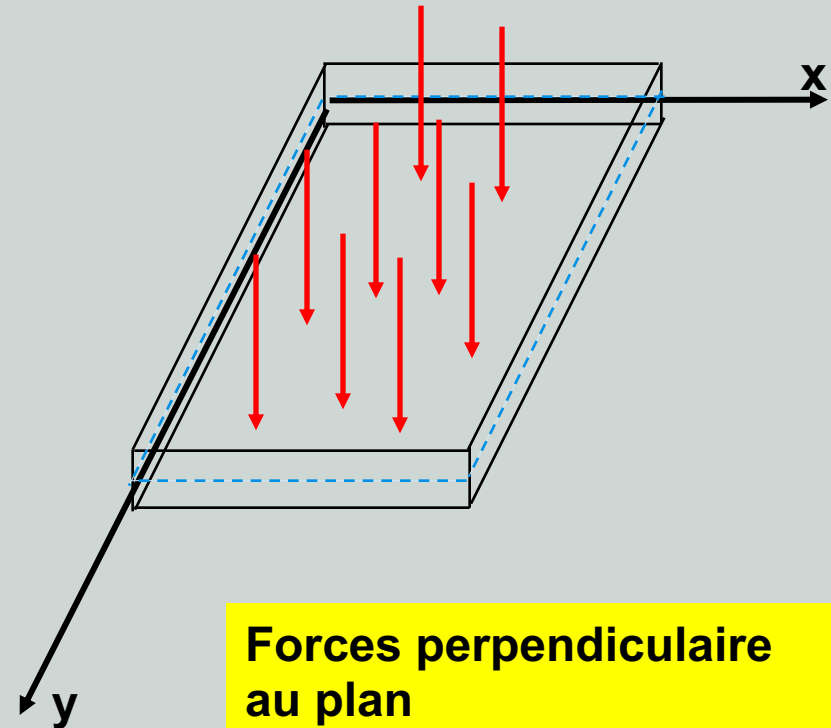
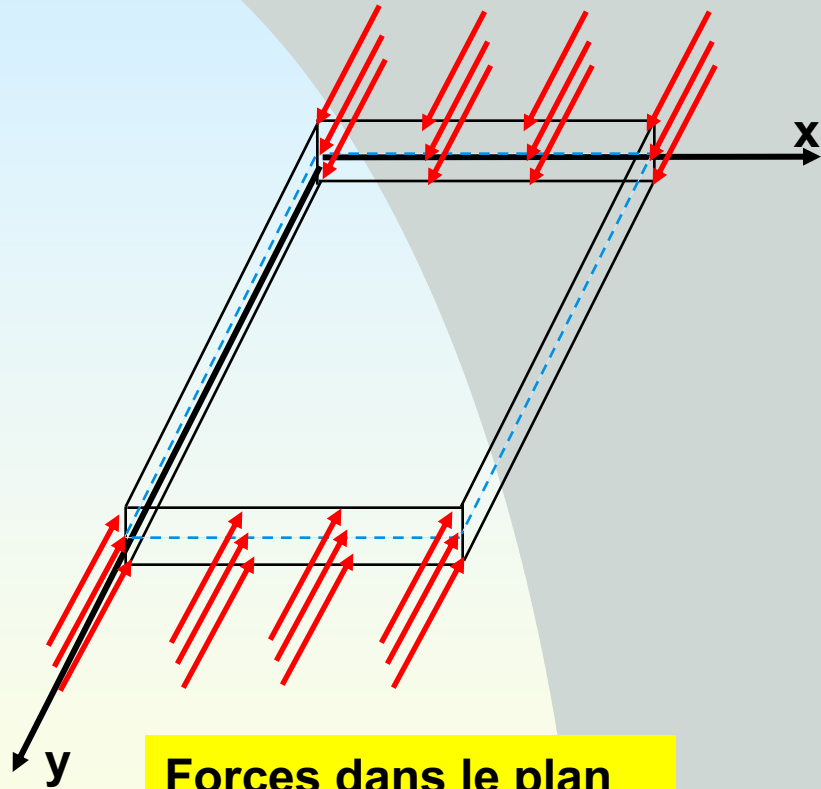
Les composantes « u » et « v » du déplacements élastiques sont fonctions uniquement de « x » et « y » et ne dépendent pas de « z »

$$u(x,y) ; v(x,y) \\ w=0$$



# ATTENTION !!!

A ne pas confondre

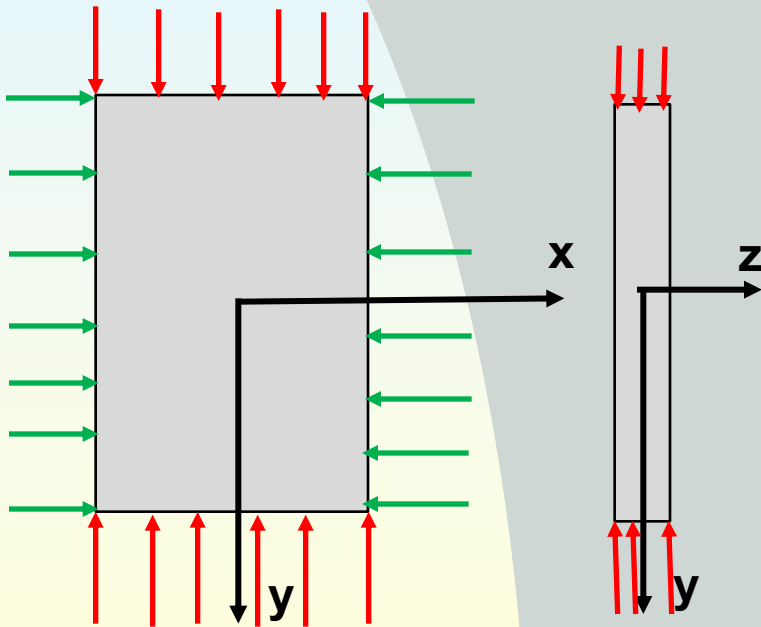


**Contrainte Plane**

**Flexion de Plaque**

### 3. Contrainte Plane

Par conséquent pour chaque plan «  $z=Cte$  », le déplacement est le même et localisé dans ce plan, et que les composantes des contraintes  $\sigma_z$ ;  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont nulles sur tous les plans à travers l'épaisseur et que les composantes  $\sigma_x$ ;  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont indépendantes de «  $z$  » (i.e restent constantes en tout point de l'épaisseur de la plaque).



On aura donc

$$\sigma_x(x, y); \sigma_y(x, y);$$
$$\tau_{xy}(x, y)$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

### 3. Contrainte Plane

Donc puisqu'on a

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Or  $\sigma_z = 0$

Alors

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

**Il faut faire attention:**

**Dans le cas de la contrainte plane,  
la 3<sup>ème</sup> déformation n'est pas nulle**

### 3. Contrainte Plane

#### Les inconnues

#### Contraintes

(03)

$$\sigma_x(x, y); \sigma_y(x, y);$$
$$\tau_{xy}(x, y)$$

#### Déformations

(03)

$$\varepsilon_x(x, y); \varepsilon_y(x, y);$$
$$\gamma_{xy}(x, y)$$

#### Déplacements

(02)

$$u(x, y);$$
$$v(x, y)$$

**08 inconnues**

**08 équations**

### 3. Contrainte Plane

#### a) Equations de l'étude statique (02)

##### i) Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

##### ii) Conditions aux limite

$$\bar{X} = l. \sigma_x + m. \tau_{xy}$$
$$\bar{Y} = l. \tau_{xy} + m. \sigma_y$$

### 3. Contrainte Plane

#### b) Equations de l'étude géométrique (03)

##### i) Equations de Cauchy (Extensions et distorsions)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

##### ii) Equations de compatibilité (St Venant)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

### 3. Contrainte Plane

#### c) Equations de l'étude physique (03)

##### i) Equations de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

##### ii) Equations de Lamé

$$\sigma_x = 2G \cdot \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_v$$

$$\sigma_y = 2G \cdot \varepsilon_y + \lambda \varepsilon_v$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

# Différence entre Contrainte Plane et Déformation

La seule différence réside dans les équations de Hooke

La contrainte plane

$E$  et  $\nu$

La déformation plane

$E_1$  et  $\nu_1$



## 3. Contrainte Plane

### Tenseurs

#### i) Tenseur des Contraintes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### ii) Tenseur des Déformations

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix}$$

# 4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

Le but est de combiner les 08 équations de l'élasticité plane (Contrainte ou déformation plane) et exprimer la combinaison en déplacements uniquement

Alors on peut parler de

**Solution en  
Déplacements**

## 4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

### i) Déformation Plane

On exprime les équations d'équilibre en fonction des déplacements.

Soit

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Or d'après les équations de Lamé

$$\sigma_x = (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y$$

$$\sigma_y = (2G + \lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

En remplaçant, on aura

$$(2G + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + G \cdot \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$G \cdot \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + (2G + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + Y = 0$$

## 4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

### i) Déformation Plane

$$(2G + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + X = 0$$
$$G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + (2G + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + Y = 0$$

Or, par compatibilité, on a

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

En remplaçant on aura

$$(2G + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X = 0$$
$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2G + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Y = 0$$

## 4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

### i) Déformation Plane

$$(2G + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X = 0$$
$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2G + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Y = 0$$

En réarrangeant les termes on trouvera les équations d'élasticité plane en déplacements dans le cas de la déformation plane

$$G \cdot \nabla^2 u + (G + \lambda) \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + X = 0$$
$$G \cdot \nabla^2 v + (G + \lambda) \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + Y = 0$$

Avec:

$\nabla$ : Laplacien  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Et  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

## 4. Equations fondamentales exprimées en déplacements

### ii) Contrainte Plane

On refait la même chose pour le cas de la contrainte plane, en utilisant les équations correspondantes, on obtient

$$G \cdot \nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + X = 0$$
$$G \cdot \nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + Y = 0$$

Avec:

$\nabla$ : Laplacien  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Et  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

# 5. Equations fondamentales exprimées en Contraintes

Le but est de combiner les 08 équations de l'élasticité plane (Contrainte ou déformation plane) et exprimer la combinaison en contraintes uniquement

Alors on peut parler de

**Solution en Forces**

## 5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

### i) Contrainte en Plane

On exprime les équations de contrainte plane en contrainte.

Soit

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

En remplaçant, on aura

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1)$$



## 5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

### i) Contrainte en Plane

Or d'après les équations d'équilibre on aura:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \% \text{ x}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad \% \text{ y}$$

On dérive la 1<sup>ère</sup> par rapport à « x » et la 2<sup>ème</sup> par rapport à « y », on aura

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Les forces de volume sont quelconques

## 5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

### i) Contrainte en Plane

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

En faisant la somme membre à membre des équations (2) on aura :

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (3)$$

On remplace (3) dans (1),  
on aura

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

## 5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

### i) Contrainte en Plane

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Sachant que :

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

On aura l'équation de la contrainte plane exprimée en contrainte. Soit

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ces équations sont appelées  
Equations de LEVY

## 5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

### ii) Déformation en Plane

Pour la cas de la déformation plane, on fera la même démonstration, on aura l'équation de déformation plane exprimée en contrainte. Soit

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \nu} \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Qui peut s'écrire sous la forme

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu_1) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Avec 
$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Ces équations sont appelées  
Equations de LEVY

# 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

La solution d'un problème plan se réduit à l'intégration des équations différentielles (équilibre, compatibilité et Hooke) ainsi que les équations de conditions aux limites

En pratique, les forces de volume sont le poids propre, dont les composantes peuvent être:

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= \rho \cdot g \end{aligned}$$

Et comme la combinaison des équations nous a donné:

Contrainte Plane  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$

Déformation Plane  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu_1) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$

On aura pour les 02 cas:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4)$$

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4)$$

Ainsi si on trouve une solution  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  de l'équation (4) ça sera la solution exacte

Pour cela, on revient aux équations d'équilibre, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho \cdot g = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

C'est un système de 02 équations différentielles à 02 inconnues.

**Solution Particulière**

**+**

**Solution Homogène**

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\rho \cdot g$$

### Solution Particulière

Plusieurs possibilités

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = -\rho \cdot g \cdot y \\ \text{ii)} & \sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = -\rho \cdot g \cdot x \end{array} \quad (6)$$

### Solution Homogène

Trouver la solution sans second membre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

**Solution Homogène**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Pour trouver la solution de ce système, Mr Airy a proposé des fonctions de contraintes

Ainsi, pour satisfaire la 1<sup>ère</sup> équation du système (7), On choisit une fonction  $\psi(x, y)$  telle que

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

et, pour satisfaire la 2<sup>ème</sup> équation du système (7), On choisit aussi une fonction  $\chi(x, y)$  telle que

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \sigma_y = -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$



## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \sigma_x = -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$

Comme il s'agit du même  $\tau_{xy}$  dans les équations (8) et (9), on aura:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

On trouvera une équation similaire aux 02 autres

Pour satisfaire cette équation (10), On choisit aussi une autre fonction  $\varphi(x, y)$  telle que

$$\psi(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \chi(x, y) = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad (11)$$

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$(8) \quad \sigma_x = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$$

$$(9) \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \sigma_y = -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x}$$

$$\psi(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \chi(x, y) = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad (11)$$

En remplaçant (11) dans (8) et (9), on obtient toutes les contraintes inconnues

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

Ainsi la solution générale

Solution Particulière

+

Solution Homogène

On associera une des équations (6) avec les équations (12). On aura

Solution Générale

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x$$

(13)

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}$$

Or pour que la solution soit exacte, il faut qu'elle vérifie l'équation générale en contraintes (4)

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x$$

En remplaçant, on aura

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (14)$$

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x$$

En final, on aura

$$\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^4(\varphi(x, y)) = 0 \quad (15)$$

### En résumé

Tout le problème de l'élasticité plane, lorsque le poids propre est la seule force de volume (contrainte et déformation plane) revient à trouver une fonction  $\varphi(x, y)$  qui satisfait les équations (14) ou (15).

Avec  $\varphi(x, y)$ , on calcule les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  (Eqs 13) puis on doit vérifier toutes les conditions aux limites.

$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y$$

## 6. Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

### Procédure

i) Trouver  $\varphi(x, y)$  solution de l'équation (14) ou (15)

$$\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (14)$$

$$\nabla^4(\varphi(x, y)) = 0 \quad (15)$$

ii) Calculer les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  en utilisant les équations (13)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x$$

iii) Vérifier toutes les conditions aux limites (de toutes les faces).

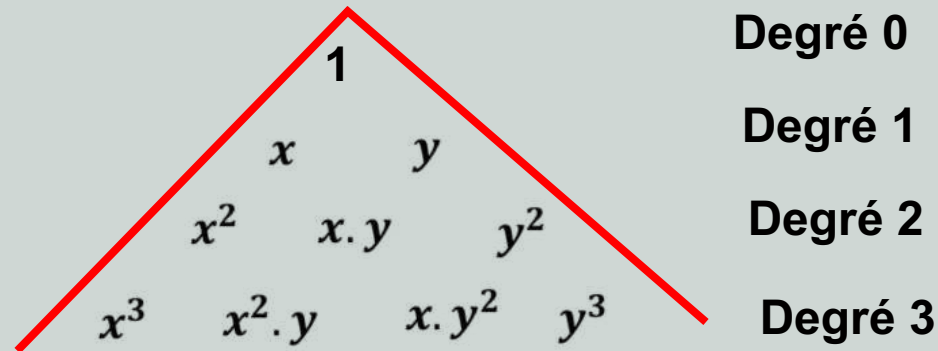
$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y$$

# 7. Solution du problème plan par les polynômes

Un nombre important de problème a été résolu en utilisant des fonctions  $\varphi(x, y)$  de type polynôme.

Comment construire un polynôme ? En utilisant le triangle de Pascal



Exemple Polynôme de degré « 2 »

$$\varphi_2(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$$

Exemple Polynôme de degré « 3 »

$$\varphi_3(x, y) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 \cdot y + c \cdot x \cdot y^2 + d \cdot y^3$$



## 7. Solution du problème plan par les polynômes

### i) Solution par polynôme du 2<sup>ème</sup> degré

Soit le polynôme

$$\varphi_2(x, y) = \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + b_2 \cdot x \cdot y + \frac{c_2}{2} \cdot y^2$$

On négligera le poids propre

∀ les constantes  $a_2$  ;  $b_2$  et  $c_2$  l'équation

$$\nabla^4(\varphi_2(x, y)) = \frac{\partial^4 \varphi_2(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi_2(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_2(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

Est toujours vérifiée

On dit que la fonction  $\varphi_2(x, y)$  est **Bi-harmonique**



## 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\varphi_2(x, y) = \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + b_2 \cdot x \cdot y + \frac{c_2}{2} \cdot y^2$$

Avec cette fonction, on peut déterminer la distribution des contraintes

On négligera le poids propre

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = c_2$$

Traction/compression

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = a_2$$

Traction/compression

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x = -b_2$$

Cisaillement simple

On remarque que la fonction représente la combinaison d'une traction/compression suivant « x » et « y » et un cisaillement dans le plan « xy »

## 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\begin{aligned}\sigma_x &= c_2 \\ \sigma_y &= a_2 \\ \tau_{xy} &= -b_2\end{aligned}$$

iii) Vérification de toutes les conditions aux limites

$$\bar{X} = l. \sigma_x + m. \tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = l. \tau_{xy} + m. \sigma_y$$

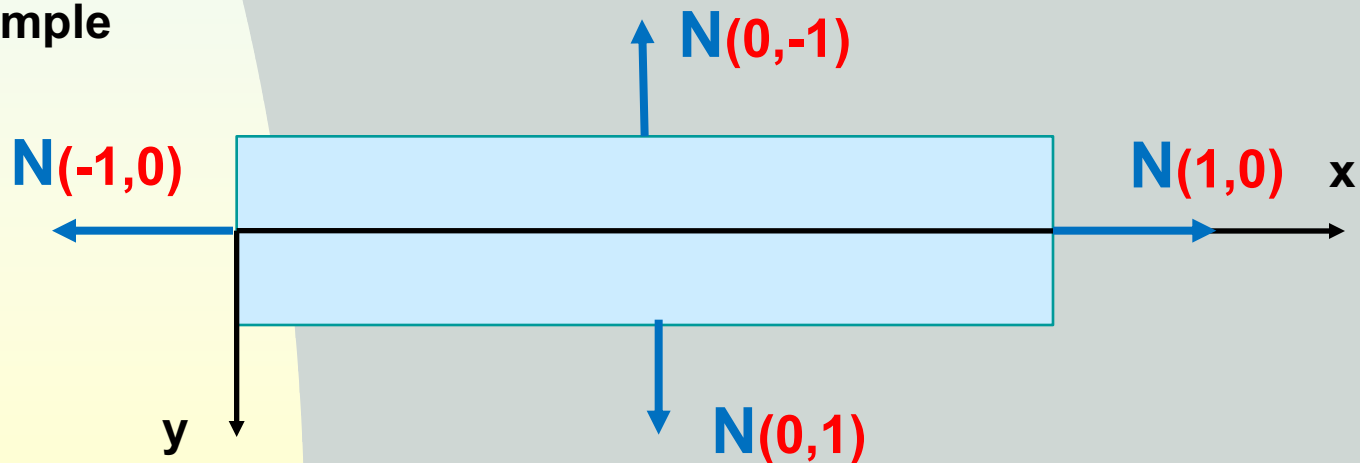
Avec nos contraintes, on aura

$$\bar{X} = l. c_2 - m. b_2$$

$$\bar{Y} = -l. b_2 + m. a_2$$

Il suffit maintenant considérer toutes les faces

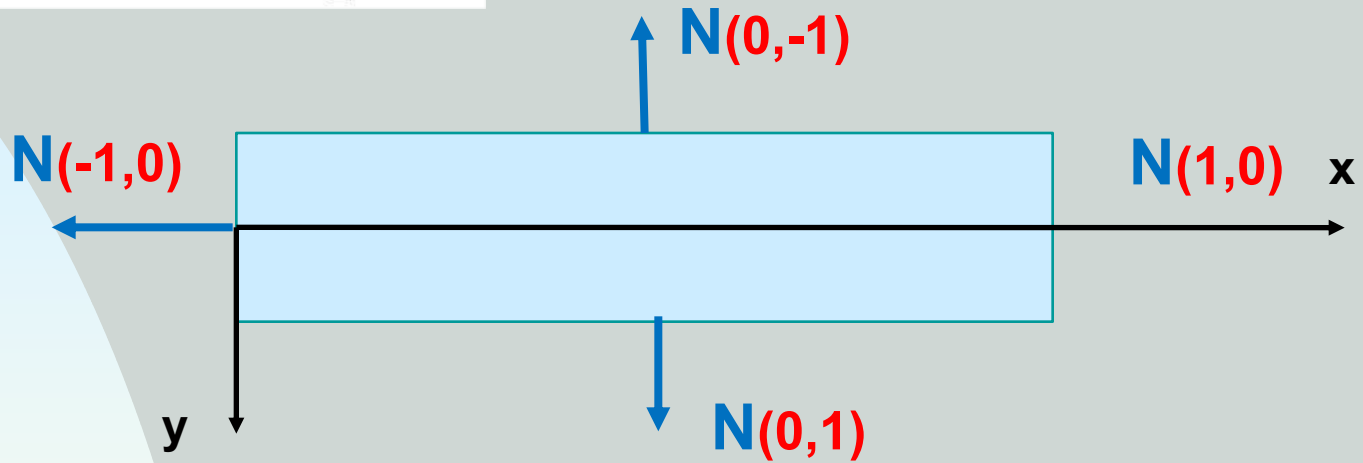
exemple



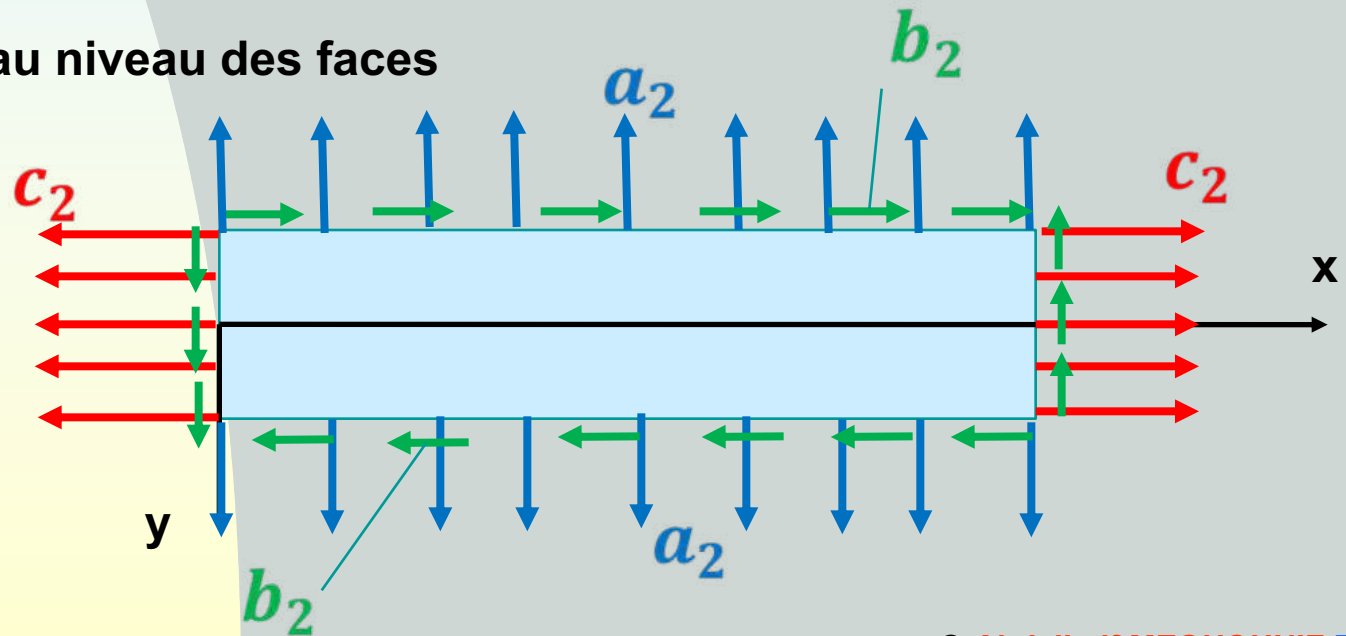
## 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\varphi_2(x, y) = \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + b_2 \cdot x \cdot y + \frac{c_2}{2} \cdot y^2$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l \cdot c_2 - m \cdot b_2 \\ \bar{Y} &= -l \cdot b_2 + m \cdot a_2 \end{aligned}$$



On aura au niveau des faces



## 7. Solution du problème plan par les polynômes

### ii) Solution par polynôme du 3<sup>ème</sup> degré

Soit le polynôme

$$\varphi_3(x, y) = \frac{a_3}{6} \cdot x^3 + \frac{b_3}{2} \cdot x^2 \cdot y + \frac{c_3}{2} \cdot x \cdot y^2 + \frac{d_3}{6} \cdot y^3$$

On négligera le poids propre

∀ les constantes  $a_3, b_3, c_3, d_3$  l'équation

$$\nabla^4 \varphi_3(x, y) = \frac{\partial^4 \varphi_3(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi_3(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_3(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

Est toujours vérifiée

On dit que la fonction  $\varphi_2(x, y)$  est **Bi-harmonique**

## 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\varphi_3(x, y) = \frac{a_3}{6} \cdot x^3 + \frac{b_3}{2} \cdot x^2 \cdot y + \frac{c_3}{2} \cdot x \cdot y^2 + \frac{d_3}{6} \cdot y^3$$

Avec cette fonction, on peut déterminer la distribution des contraintes

On négligera le poids propre

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3(x, y)}{\partial y^2} = c_3 \cdot x + d_3 \cdot y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_3(x, y)}{\partial x^2} = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_3(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x = -b_3 \cdot x - c_3 \cdot y$$

0

## 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\sigma_x = c_3 \cdot x + d_3 \cdot y$$

$$\sigma_y = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y$$

$$\tau_{xy} = -b_3 \cdot x - c_3 \cdot y$$

iii) Vérification de toutes les conditions aux limites

$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy}$$

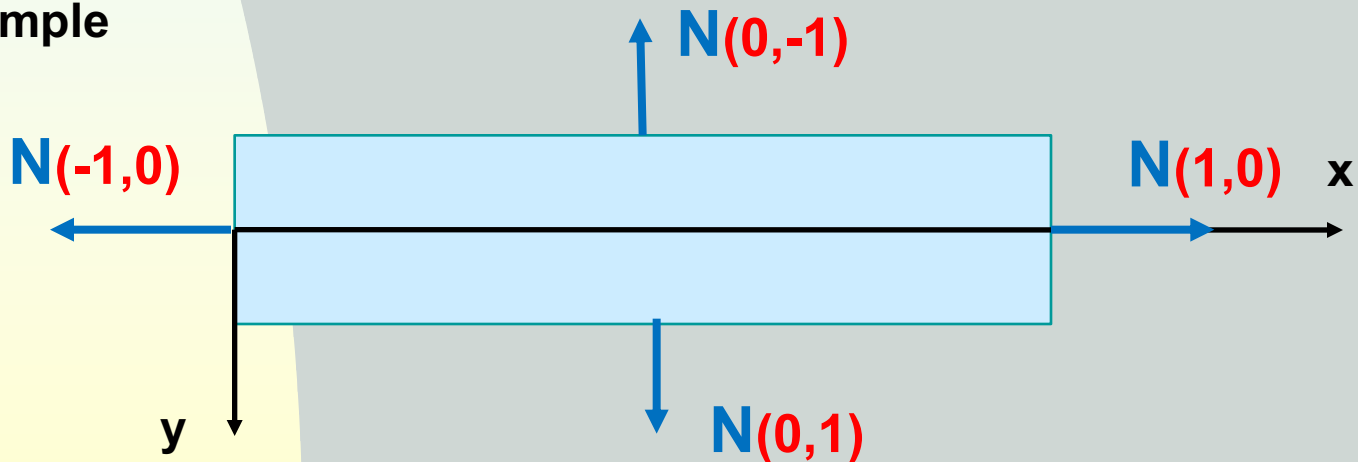
$$\bar{Y} = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y$$

Avec nos contraintes, on aura

$$\bar{X} = (c_3 \cdot x + d_3 \cdot y) \cdot l - (b_3 \cdot x + c_3) \cdot m$$
$$\bar{Y} = -(b_3 \cdot x + c_3) \cdot l + (a_3 \cdot x + b_3 \cdot y) \cdot m$$

Il suffit maintenant considérer toutes les faces

exemple



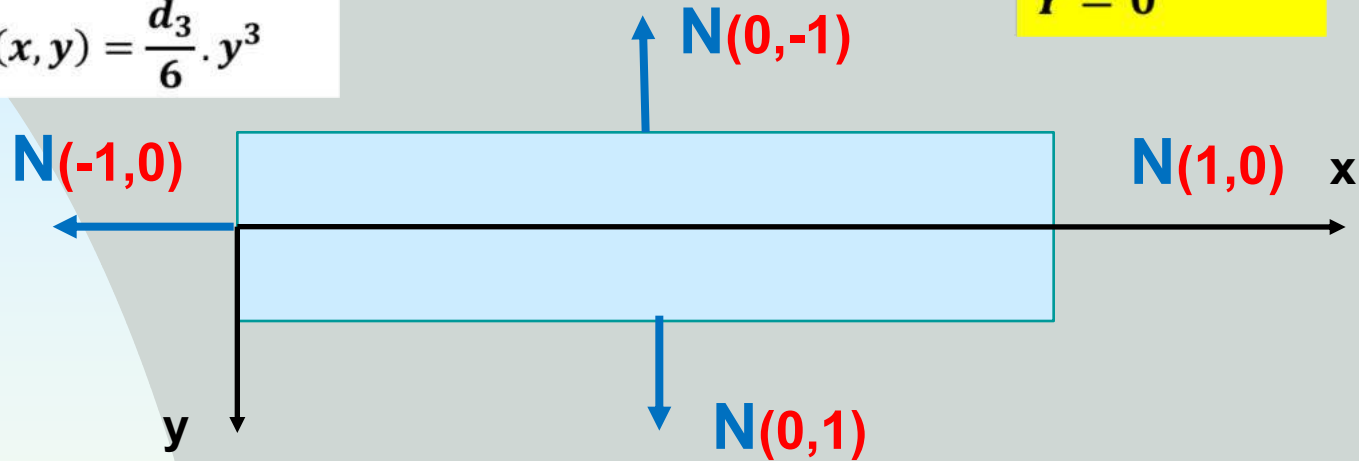
# 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\bar{X} = (c_3 \cdot x + d_3 \cdot y) \cdot l - (b_3 \cdot x + c_3) \cdot m$$
$$\bar{Y} = -(b_3 \cdot x + c_3) \cdot l + (a_3 \cdot x + b_3 \cdot y) \cdot m$$

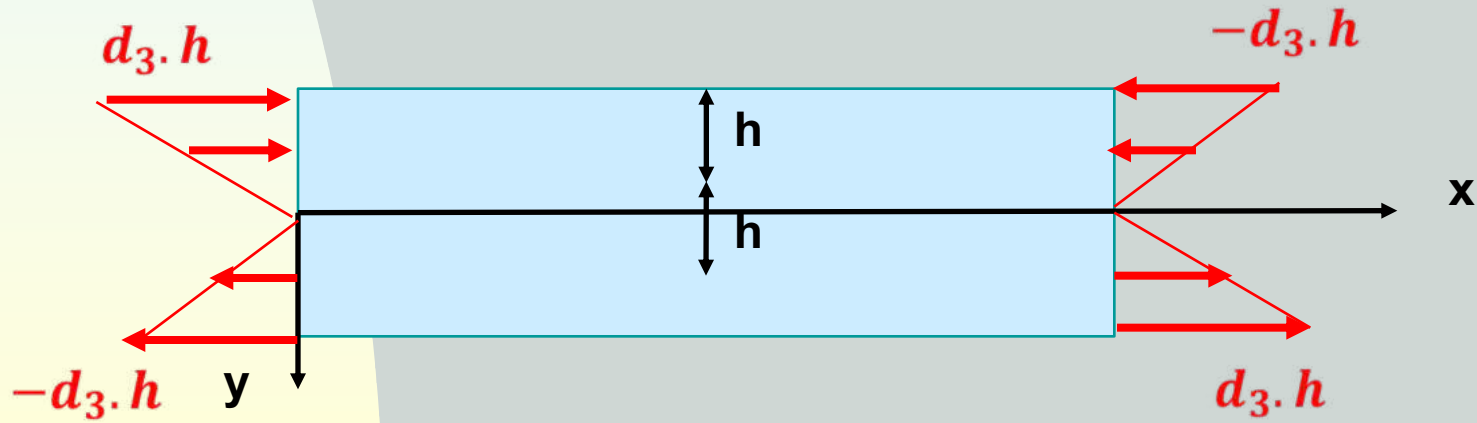
Cas 1: Cas particulier  $a_3, b_3, c_3 = 0$  ;  $d_3 \neq 0$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{d_3}{6} \cdot y^3$$

$$\bar{X} = (d_3 \cdot y) \cdot l$$
$$\bar{Y} = 0$$



On aura au niveau des faces



**Flexion Suivant « x »**

# 7. Solution du problème plan par les polynômes

$$\bar{X} = (c_3 \cdot x + d_3 \cdot y) \cdot l - (b_3 \cdot x + c_3) \cdot m$$

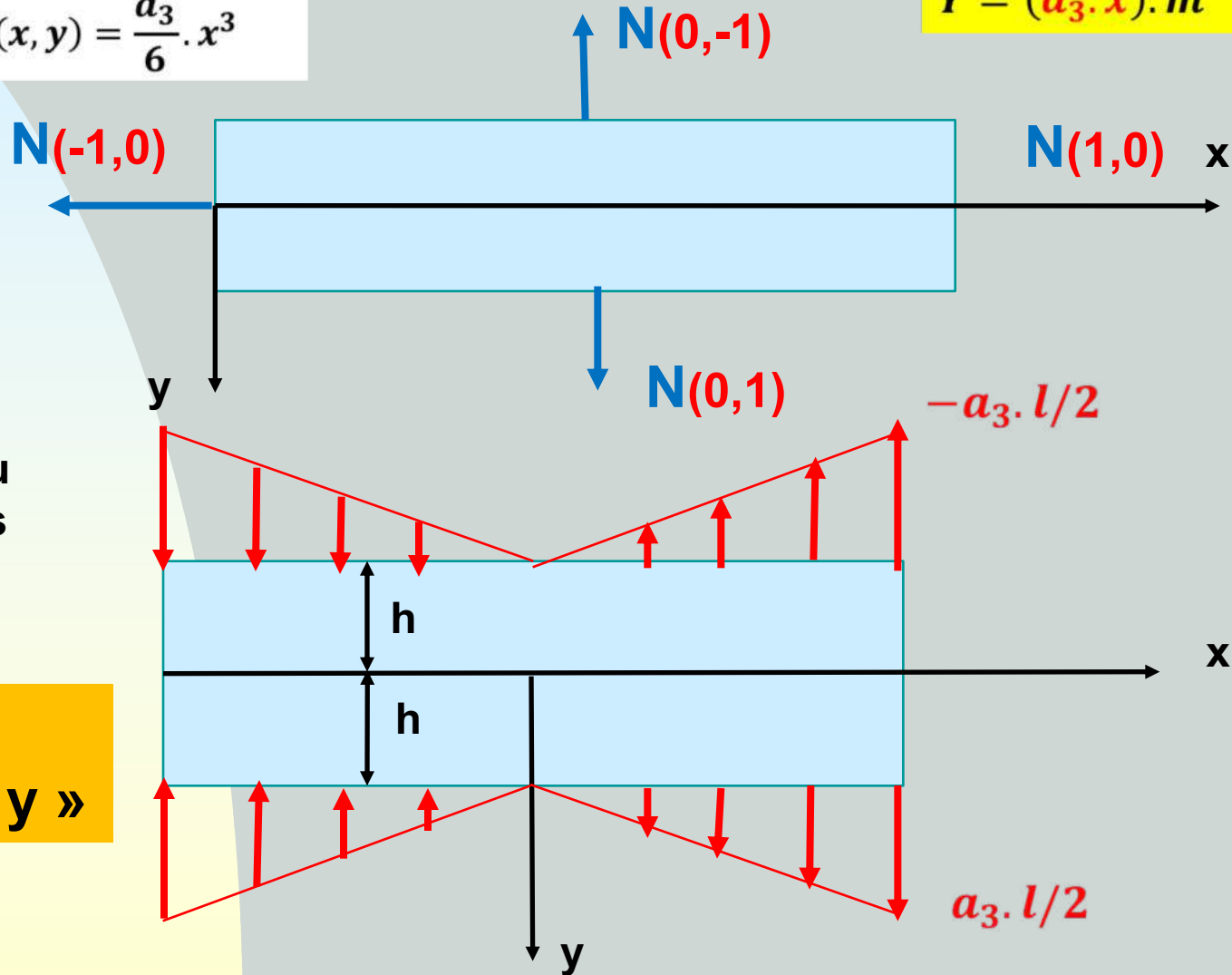
$$\bar{Y} = -(b_3 \cdot x + c_3) \cdot l + (a_3 \cdot x + b_3 \cdot y) \cdot m$$

Cas 2: Cas particulier  $b_3, c_3, d_3 = 0$  ;  $a_3 \neq 0$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{a_3}{6} \cdot x^3$$

$$\bar{X} = 0$$

$$\bar{Y} = (a_3 \cdot x) \cdot m$$



On aura au niveau des faces

**Flexion**  
Suivant «  $y$  »



## 7. Solution du problème plan par les polynômes

### Récapitulatif

$$\varphi(x, y) = a \cdot x^2$$

Traction/compression  
suivant « y »

$$\varphi(x, y) = a \cdot y^2$$

Traction/compression  
suivant « x »

$$\varphi(x, y) = a \cdot x \cdot y$$

Cisaillement Simple

$$\varphi(x, y) = a \cdot x^3$$

Flexion suivant « y »

$$\varphi(x, y) = a \cdot y^3$$

Flexion suivant « x »

On peut combiner les fonctions pour avoir les autres états, flexion composée, flexion déviée, flexion + cisaillement, ....

**Merci. Fin du chapitre 6**

# *Mécanique des Milieux Continus*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Semaine Prochaine**

**Applications**