Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 7

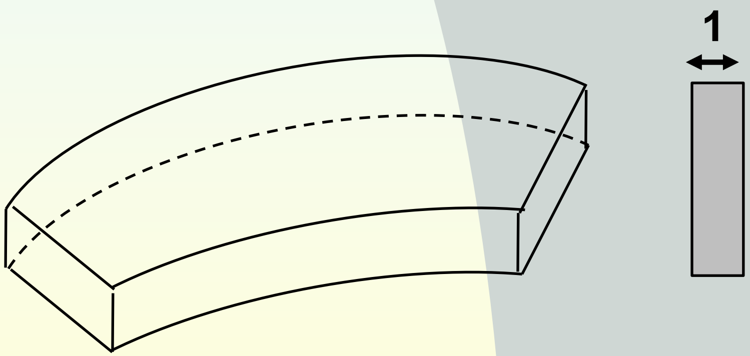
Elasticité Plane en Coordonnées Polaires

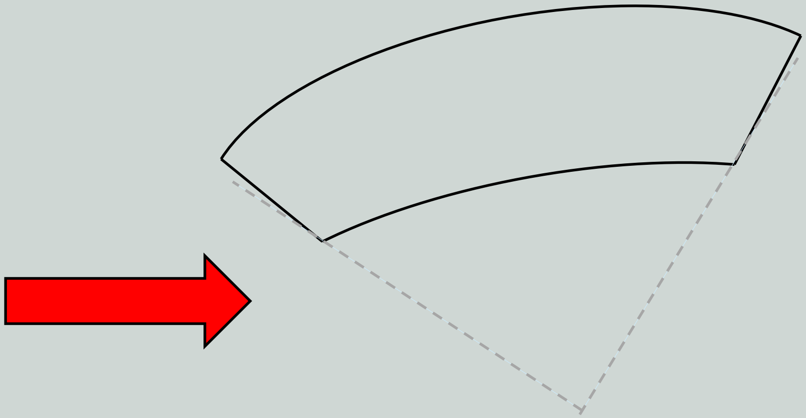
COURS 9 **Dimanche 25.08.2024**

1. Introduction

?

3D





3D

2D

1. Introduction

Exemples

Anneaux pour Puits

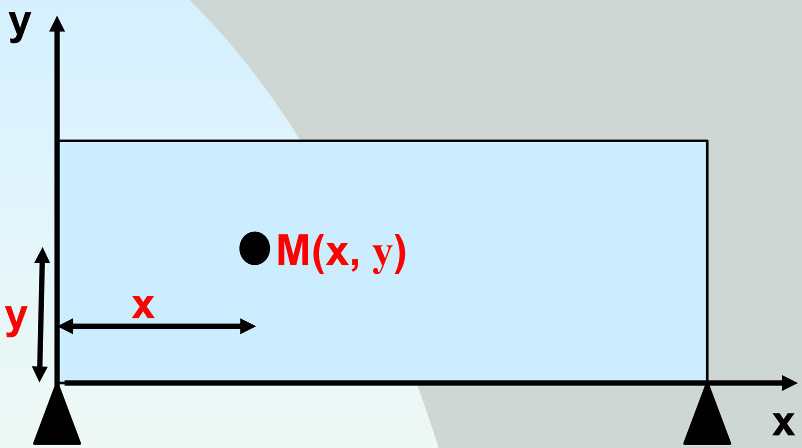
Conduite sous Pression

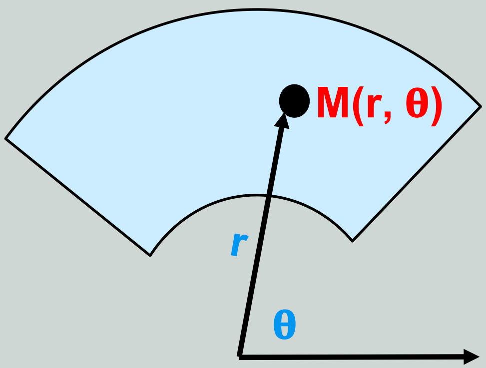
Poutres courbes

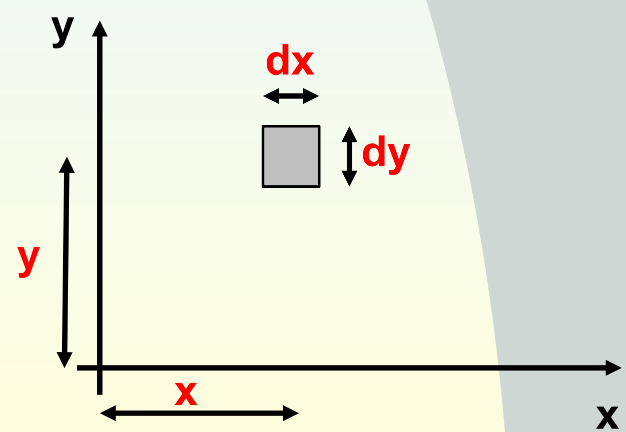
Tunnel

2. Equations d’équilibre en coordonnées polaires

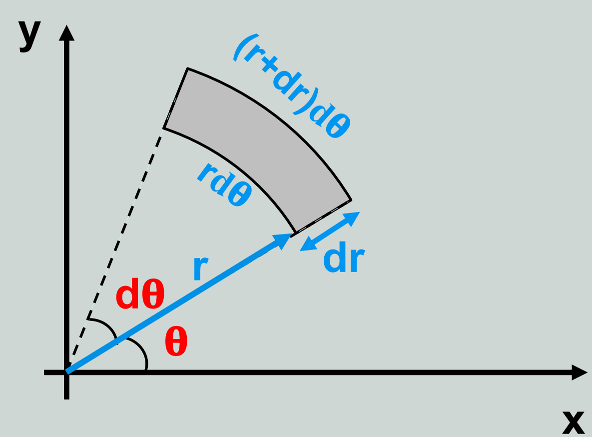
Choix du point ?







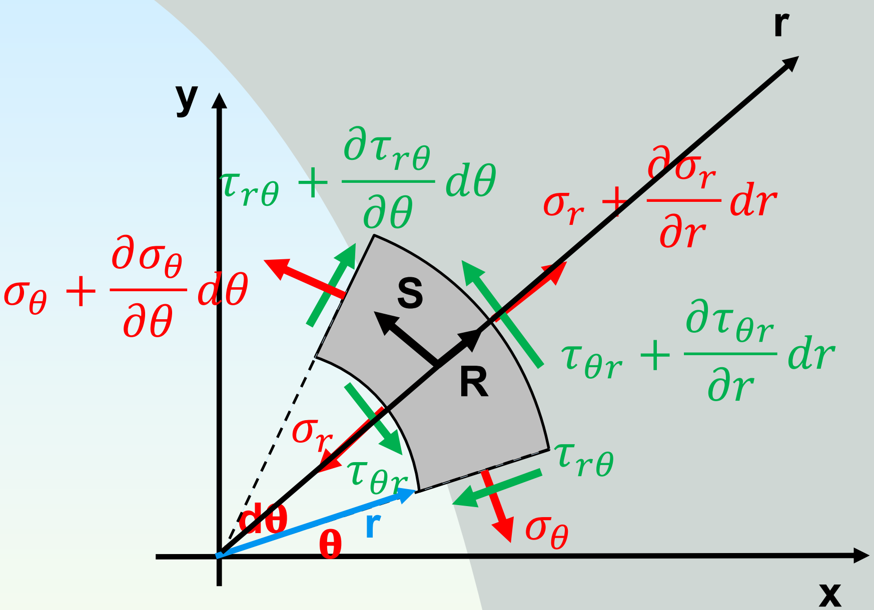
Cartésiens



Polaires

2. Equations d'équilibre en coordonnées polaires

Equilibre du point ?



Posons la force de volume (R, S)).

« σ_r » contrainte normale suivant le rayon (r).

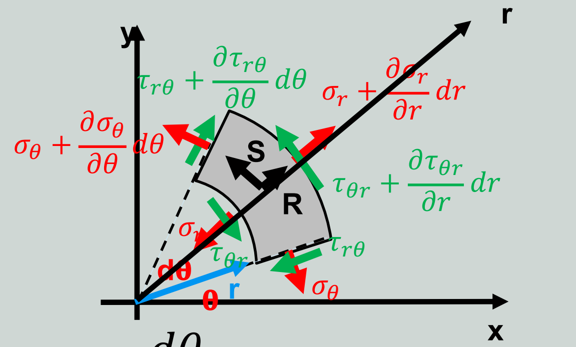
« σ_θ » contrainte normale suivant la direction perpendiculaire au rayon (r).

« $\tau_{r\theta}$ » = « $\tau_{\theta r}$ » contraintes tangentielles.

Pour un petit élément plan, d'épaisseur « 1 », on considère l'équilibre des forces suivant les 02 directions (r et θ).

La force est obtenue en multipliant la contrainte avec la surface correspondante

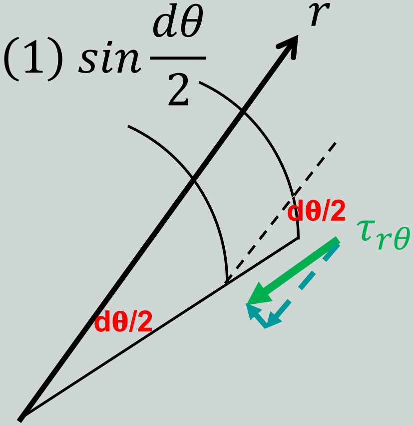
2. Equations d'équilibre en coordonnées polaires



Equilibre du point ?

Considérons comme exemple, l'équilibre suivant l'axe « r ». On aura:

$$-\sigma_r r d\theta(1)+\left(\sigma_r+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta(1)\ -\tau_{r\theta}dr(1)cos\frac{d\theta}{2}$$
$$+\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)dr(1)cos\frac{d\theta}{2}\ -\sigma_\theta dr(1)\,sin\frac{d\theta}{2}-\left(\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)dr(1)\,sin\frac{d\theta}{2}$$
$$+Rr\,dr\,d\theta=0$$



« $d\theta$ **» très petit, d'où :** $sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$ **et** $cos\frac{d\theta}{2}\approx 1$

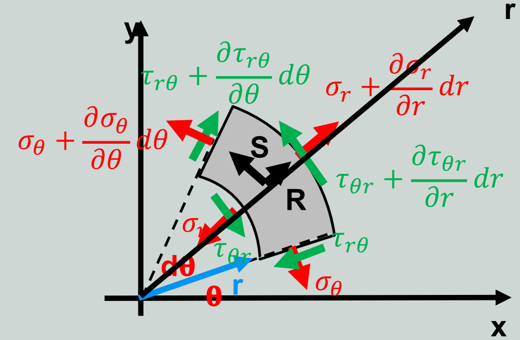
d'où :

$$-\cancel{\sigma_r r d\theta}+\cancel{\sigma_r r d\theta}+\sigma_r dr d\theta+r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}drd\theta+\cancelto{0}{\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}(dr)^2d\theta}-\cancel{\tau_{r\theta}dr}+$$
$$\cancel{\tau_{r\theta}dr}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}drd\theta-\frac{1}{2}\sigma_\theta drd\theta-\frac{1}{2}\sigma_\theta drd\theta-\cancelto{0}{\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}dr(d\theta)^2}+Rrdrd\theta=0$$

L'élément de surface «$dr d\theta$ **» est différent de zéro, on peut simplifier pour obtenir la 1ère équation d'équilibre**

$$\boldsymbol{\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}+R=0} \qquad \textbf{(7.1)}$$

2. Equations d'équilibre en coordonnées polaires



Equilibre du point ?

De façon similaire, on peut obtenir l'équation d'équilibre suivant la direction perpendiculaire au rayon « r ». On obtient

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \qquad (7.2)$$

Ainsi

Les équations (7.1) et (7.2)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + R = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + S = 0$$

sont appelées équations d'équilibre et doivent être satisfaites quelque soit le point considéré de la surface intérieure. Les contraintes varient à l'intérieur du plan mais à la surface extérieure elles doivent équilibrer les forces extérieures de surface.

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

On a vu, la combinaison de toutes les équations en cartésienne a conduit à l'équation:

$$\nabla^4(\varphi) = 0 \qquad \textbf{(7.3)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \textbf{(7.4)}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \qquad \textbf{(7.5)}$$

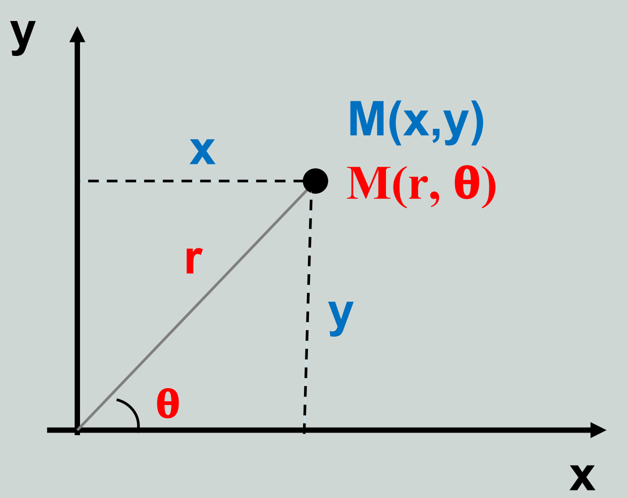
Avec:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \text{et} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - \rho\, g\, x \qquad \textbf{(7.6)}$$

Ainsi, il suffit juste de transformer ces équations des coordonnées cartésiennes (x,y) aux coordonnées polaires (r, θ)

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

Pour la transformation :



On a :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad (7.6)$$

Ou bien :

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (7.7)$$

Ainsi, on transforme, par exemple, les termes de l'équation (7.4)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$(Arctg\,(f(x))' = \frac{f'(x}{1 + f^2(x)}$$

Avec : $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(7.8)}$$

Or: $$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta}.\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad \textbf{(7.9)}$$

Car : $x(r,\theta)$

Ainsi,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-1/x^2}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

D'où:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}.\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta}.\sin\theta \qquad \textbf{(7.10)}$$

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(Arctg\,(f(x))' = \frac{f'(x}{1 + f^2(x)}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}.\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta}.\sin\theta$$

Or :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad (7.11)$$

D'où:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}.\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.\sin\theta\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}.\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.\sin\theta\right) \qquad (7.12)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\theta - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

D'où:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\sin^2\theta \qquad (7.13)$$

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

On fera de même pour : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ **?**

$$(Arctg\,(f(x))' = \frac{f'(x}{1 + f^2(x)}$$

Avec :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \qquad \textbf{(7.14)}$$

Or:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta}.\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad \textbf{(7.15)}$$

Car : $y(r,\theta)$

Ainsi,

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

D'où:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta}.\cos\theta \qquad \textbf{(7.16)}$$

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(Arctg\,(f(x)))' = \frac{f'(x}{1+f^2(x)}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta}.\cos\theta$$

Or : $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

D'où:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.\cos\theta\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.\cos\theta\right) \qquad (7.17)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$
$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

D'où:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$
$$+\frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\cos^2\theta \qquad (7.18)$$

3. Equation d'élasticité plane en coordonnées polaires

Ainsi, avec :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\cos^2\theta$$

On aura :

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \qquad (7.19)$$

Et l'équation d'élasticité plane en CP sera :

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) = 0 \qquad (7.20)$$

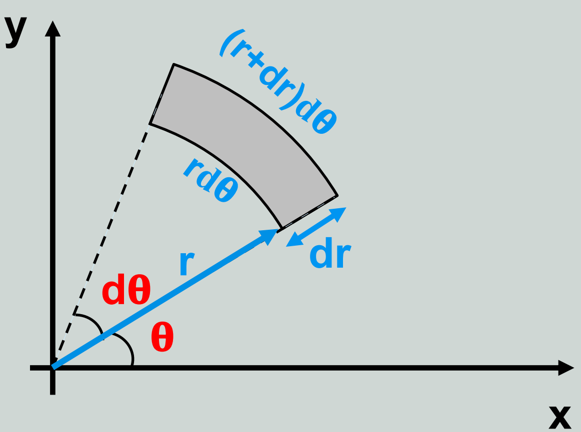
4. Composantes de contraintes en coordonnées polaires

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \text{et} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - \rho\, g\, x$$

Or :

Si «θ = 0», l'axe « r » tend vers « x »
et l'axe « θ » tend vers « y » .



On aura donc,

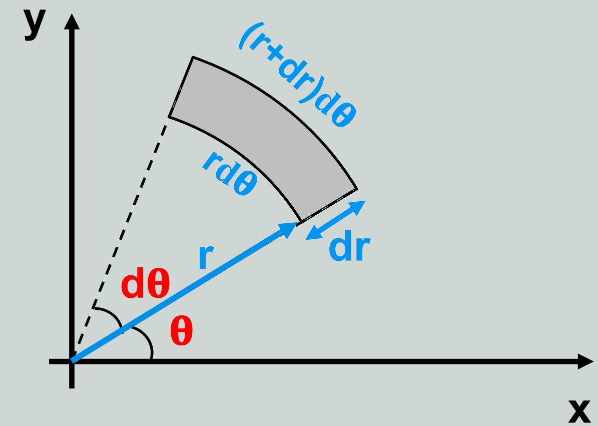
$$\sigma_r = (\sigma_x)_{\theta=0} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_{\theta=0}$$

Avec,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\, sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}\frac{sin\,\theta\, cos\,\theta}{r} - \frac{2}{r^2} sin\,\theta\, cos\,\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} cos^2\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} cos^2\theta$$

$$\boxed{\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}} \qquad (7.21)$$

4. Composantes de contraintes en coordonnées polaires



De même:

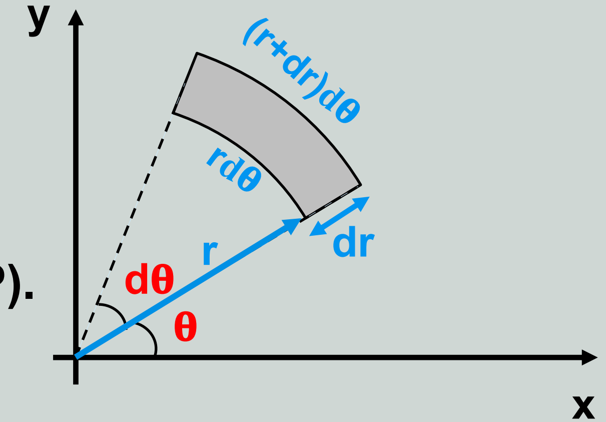
$$\sigma_\theta = \left(\sigma_y\right)_{\theta=0} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{\theta=0}$$

Avec,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\sin^2\theta$$

$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}} \qquad (7.22)$$

4. Composantes de contraintes en coordonnées polaires



Enfin :

$$\tau_{r\theta} = (\tau_{xy})_{\theta=0} = \left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)_{\theta=0}$$

(En négligeant le PP).

Or :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}.\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.\sin\theta\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}$$
$$-\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

$$\tau_{r\theta} = (\tau_{xy})_{\theta=0} = \left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)_{\theta=0} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$\boxed{\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)} \qquad \textbf{(7.23)}$$

En conclusion

Pour un problème plan en coordonnées polaires, il faut trouver une fonction $\varphi(r,\theta)$ qui satisfait l'équation biharmonique ::

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

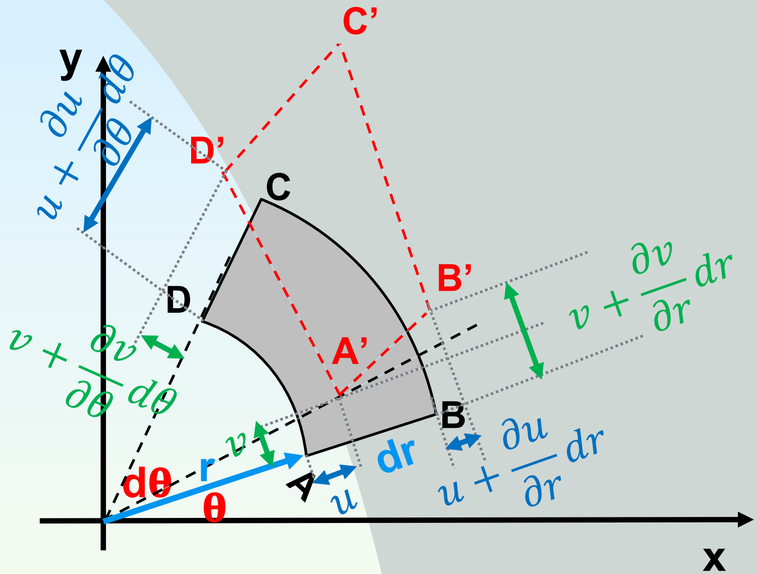
Pour déterminer la distribution des contraires en n'importe quel point :

$$\begin{gathered}\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\end{gathered} \qquad (7.23)$$

Enfin, il faut vérifier toutes les conditions aux limites

5. Composantes de déformations en coordonnées polaires

Déplacement du point ?



« u » composante de déplacement suivant le rayon (r).

« v » composante de déplacement suivant la direction perpendiculaire au rayon (r).

« A » se déplace de « **u** »

« B » se déplace de « $u+\frac{\partial u}{\partial r}dr$ »

Suivant la direction radiale, l'allongement unitaire de l'élément ABCD sera:

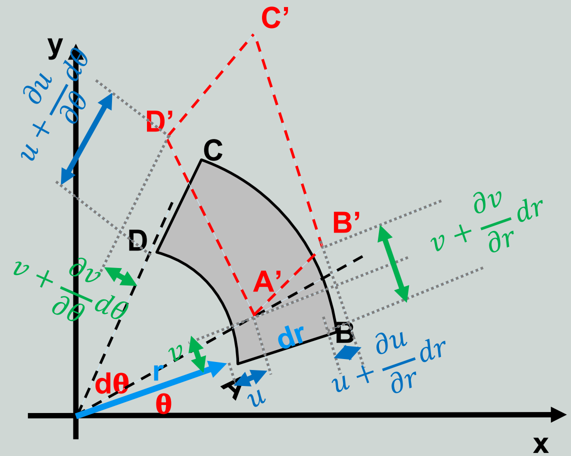
$$\varepsilon_r = \frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial r}dr-u\right)}{dr}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}}} \qquad \textbf{(7.24)}$$

5. Composantes de déformations en coordonnées polaires

Déformation ε_θ ?

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(u,v) = \varepsilon_{\theta u} + \varepsilon_{\theta v}$$



*** Du au déplacement « u »?**

Longueur de l'arc « AD » = « $r\, d\theta$ »

Nouvelle longueur après déformation « A'D' » = « $(r+u)\, d\theta$ »

D'où:

$$\varepsilon_{\theta u} = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta}$$

$$\boxed{\varepsilon_{\theta u} = \frac{u}{r}} \qquad \textbf{(7.25)}$$

*** Du au déplacement « v »?**

De « D » à « D' » dans la direction perpendiculaire au rayon?

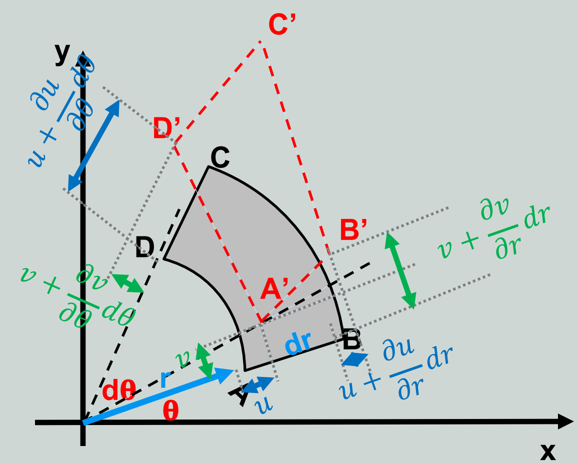
$$\varepsilon_{\theta v} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v\right)}{r d\theta}$$

$$\boxed{\varepsilon_{\theta v} = \frac{\partial v}{r\, \partial \theta}} \qquad \textbf{(7.26)}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta u} + \varepsilon_{\theta v}$$

$$\boxed{\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\, \partial \theta}} \qquad \textbf{(7.27)}$$

5. Composantes de déformations en coordonnées polaires



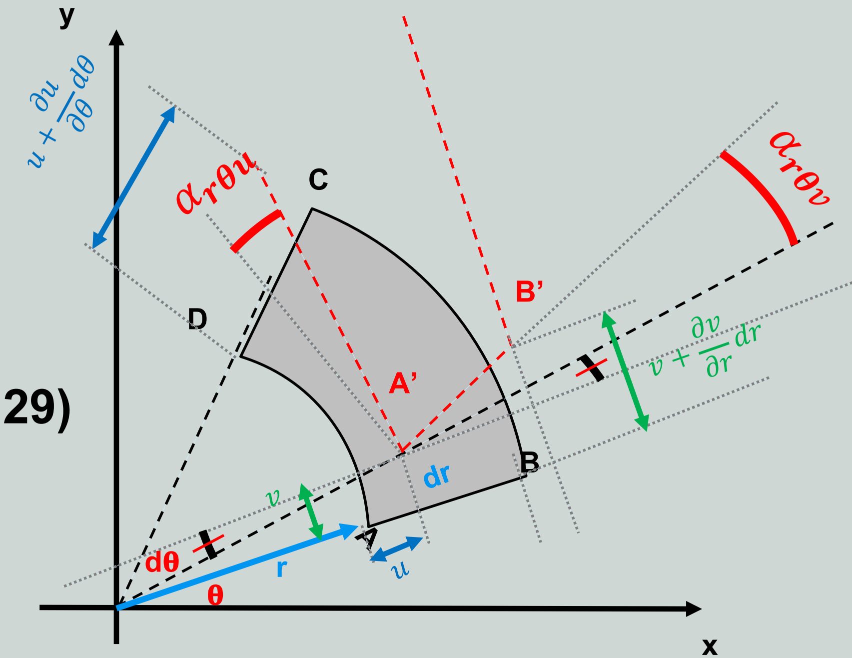
Déformation angullaire $\gamma_{r\theta}$?

Somme des angles après déformation

*** Coté « $A'D'$ » ?**

$$\gamma_{r\theta u} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{d\theta} - u\right)}{r\boldsymbol{d\theta}}$$

$$\boxed{\gamma_{r\theta u} = \frac{\partial u}{r\,\partial \boldsymbol{\theta}}} \qquad \textbf{(7.28)}$$



*** Coté « $A'B'$ » ?**

$$\gamma_{r\theta v} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial r}\boldsymbol{d}r - v\right)}{\boldsymbol{d}r} - \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}}$$

$$\boxed{\gamma_{r\theta v} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}}} \qquad \textbf{(7.29)}$$

D'où:

$$\boldsymbol{\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\,\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}} \qquad \textbf{(7.30)}$$

6. Loi de Hooke en coordonnées polaires

Relations déformation – contraintes ?

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta)$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) \qquad (7.31)$$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$$

En conclusion

Les inconnues

Contraintes (03)

$\sigma_r(r,\theta); \sigma_\theta(r,\theta)$
$\tau_{r\theta}(r,\theta)$

Déformations (03)

$\varepsilon_r(r,\theta); \varepsilon_\theta(r,\theta)$
$\gamma_{r\theta}(r,\theta)$

Déplacements (02)

$u(r,\theta);$
$v(r,\theta)$

08 inconnues

08 équations

En conclusion

Pour un problème plan en coordonnées polaires,

Etape 1 : calcul des contraintes à partir des équations d'équilibre ou en utilisant une fonction d'Airy $\varphi(r,\theta)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + R = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\dfrac{\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \end{cases}$$

Etape 2 : vérification des CL.

$$\begin{cases} \overline{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \overline{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$

En conclusion

Pour un problème plan en coordonnées polaires,

Etape 3 : calcul des déformations par Hooke.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{\tau_{r\theta}}{G} \end{cases}$$

Etape 4 : calcul des déplacements par intégration, des déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r} + \dfrac{\partial v}{r\,\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \end{cases}$$

Merci. **Fin du chapitre 7**

Théorie d'élasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Applications