Finances pour Ingénieurs

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 2

Notions d'Intérêts

COURS 1 **Mardi 27.10.2009**

Introduction

- ✓ Il faut reconnaître que la valeur de l'argent change dans le temps.

  « X » DA aujourd'hui ne valent pas forcément « X » DA dans le futur.

- ✓ La valeur de l'argent est généralement influencée par les taux d'intérêt et le temps.
- ✓ La valeur de l'argent peut changer d'une personne à une autre en fonction des besoins.
- ✓ La valeur de l'argent est aussi influencée par l'inflation/déflation.

  (Mais la valeur existe même sans inflation.)

- ✓ Doit analyser les relations entre les sommes d'argent présentes et futures. (intérêt et équivalence)

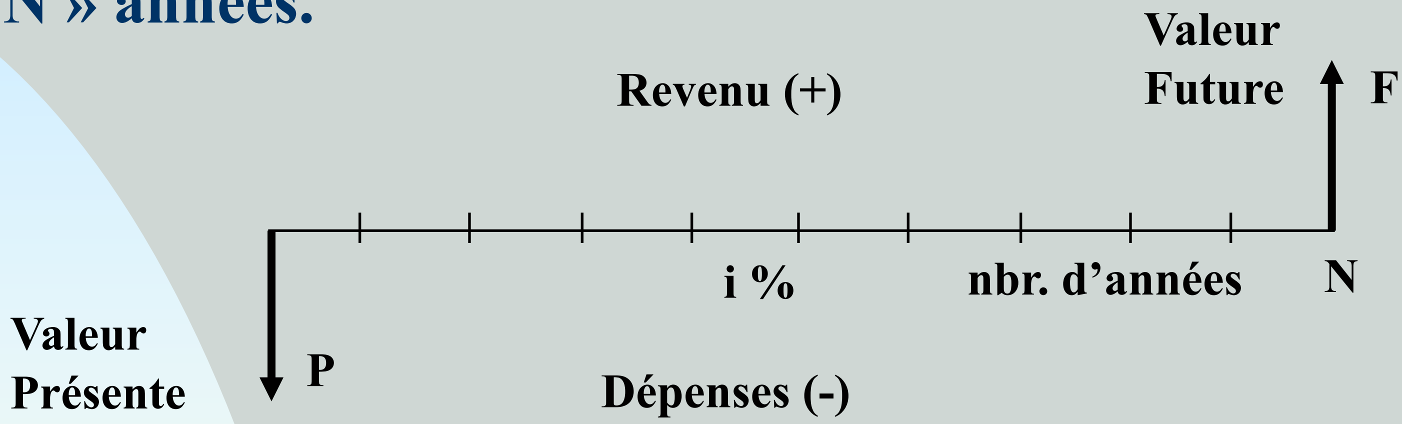
intérêt

- Augmentation entre une quantité d'argent initiale et une quantité finale sur une période de temps limitée.
- Exprimé généralement comme pourcentage par période de temps.
- Doit définir une notation qui peut représenter les éléments de calculs d'intérêt et d'équivalence.

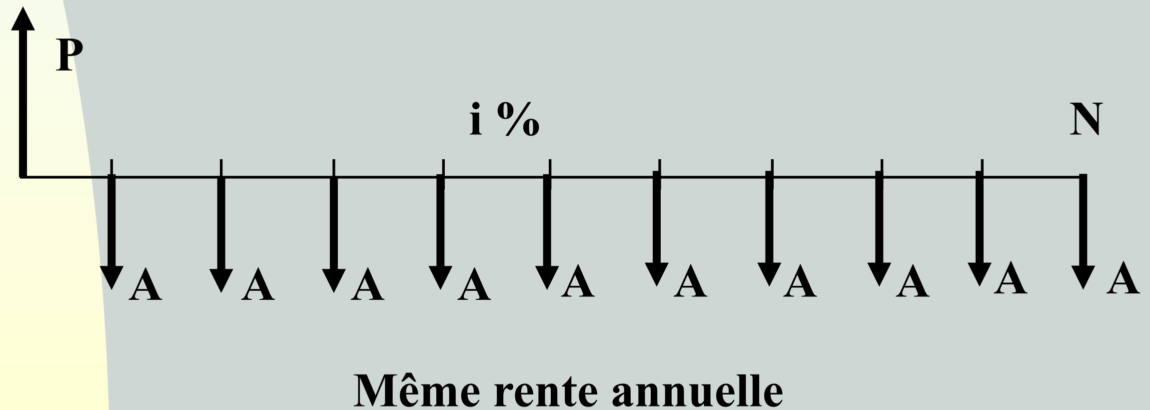
Diagramme du cash-flow

- Représentation graphique des valeurs connues et inconnues. (entrant et sortant)
- Une convention de fin de période est toujours supposée.
- Les transactions du cash-flow se font toujours à la fin d'une période d'intérêt.

- Investir « P » DA à « i% » intérêt et recevoir « F » DA après « N » années.



- Recevoir (Emprunter) « P » DA à « i% » intérêt et rembourser à payement égal « A » chaque année pendant « N » années.



Calculs d'intérêt

02 types d'intérêt:

1. Intérêt simple.
2. Intérêt composé.

A. Intérêt Simple.

- Calculé sur la valeur principale seulement. (pas sur les valeurs cumulées)
- On ignore tous les intérêts précédents.

$$I = (P) \times (s) \times (N)$$

Avec: I: Intérêt total après N période.
S: Taux d'intérêt simple.
P: montant emprunté.
N: nombre de période avant le remboursement.

La valeur future sera:

$$F = P + P.s.N = P(1+s.N)$$

Exemple:

Une personne a emprunté \$5000 avec un taux d'intérêt simple de 8% par an. Il compte rembourser le prêt et l'intérêt à la fin de la 3eme année. Combien il doit payer.

$$F = P(1+s.N) = 5000\ (1+0.08x3) = \$6200$$

Dont $I = P.s.N = 5000x0.08x3 =$ \$1200 d'intérêt.

B. Intérêt Composé.

Calculé sur le principal plus l'intérêt cumulé des périodes précédentes.

Donc, le principal change après chaque période.

Même Exemple:

Une personne a emprunté $5000 avec un taux d'intérêt composé de 8% par an. Il compte rembourser le prêt et l'intérêt à la fin de la 3eme année. Combien il doit payer.

$F1 = P(1+i) = 5000\ (1+0.08) = \$5400$

$F2=F1(1+i) = 5400\ (1+0.08) = \$5832$

$F3=F2(1+i) = 5832\ (1+0.08) = \$6899 > \$6200$

La différence avec le 1er type est importante lorsque le nombre de périodes et les niveaux d'intérêt augmentent.

D’une façon générale

$F1 = P(1+i)$

$F2 = F1(1+i) = P(1+i)^2$

$F3 = F2(1+i) = P(1+i)^3$

Après N périodes: $$F = P\,(1+i)^N$$

Exemple:

Si vous déposez $500 dans un compte, combien d’années il vous faut pour tripler cette somme avec un intérêt composé de 15% par an.

$F = 3P$

$3.P = P\,(1+i)^N$ d’où $\ln(3) = N \ln(1.15)$

$N = \ln(3) / \ln(1.15) =$ **7.86 ans.**

Équivalence Économique

$1000 aujourd'hui valent $1100 dans un an si l'argent vaut 10%. Ou bien $1210 dans 02 ans.

Équivalence économique existe entre différent cash-flow quand ils peuvent s'échanger entre eux et produire le même effet économique.

Exemple:

Considérer les 02 plans de payement d'une personne qui a emprunté $1000 pour 03 ans avec un taux de 12%.

	Plan 1. (payer d'un coup)	Plan 2 (par an)
An 1 :	0	$416.30
An 2 :	0	$416.30
An 3:	$1404.90	$416.30
Total:	$1404.90 $(P(1+i)^3$	$1248.90 (A/P)

Plan 1, plus d'intérêt ($156)

Tables d'intérêt

Soit $F = P(1+i)^N$ Ou bien $P = F/(1+i)^N$

Le facteur $(1+i)^N$ est noté (F/P, i, N)

$$F = P\,(F/P,i,N)$$

(F/P,i,N): déterminer F connaissant P avec un taux de i% pour N périodes.

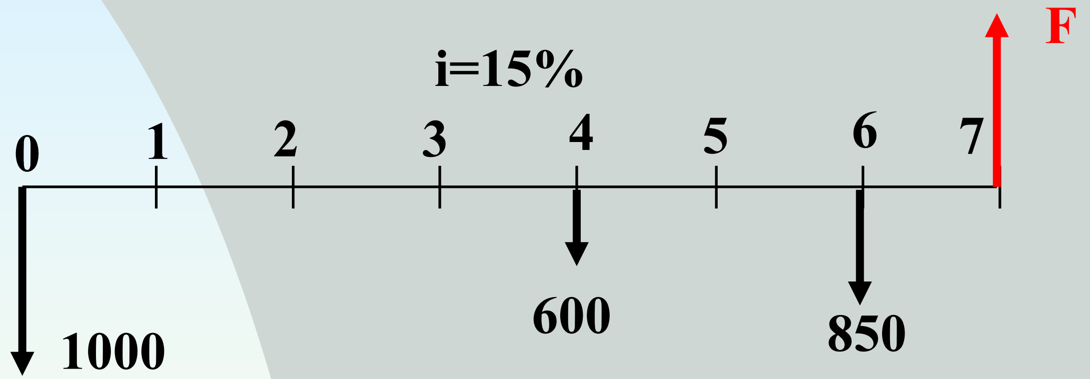
De même $1/(1+i)^N$ est noté (P/F,i,N)

$$P = F\,(P/F,i,N)$$

Des tables déjà existantes pour différentes valeurs de i% et de N. On peut interpoler entre les valeurs.

Exemple

Déterminer la valeur future du cash-flow suivant, si les versements sont faits avec 15% d'intérêt.



$$F = 1000(F/P,15,7) + 600(F/P,15,3) + 850(F/P,15,1)$$

$$F = 1000(2.6600) + 600(1.5209) + 850(1.1500)$$

$$F = \$4550.04$$

Catégories de transaction du cash-flow

Généralement 05 catégories différentes:

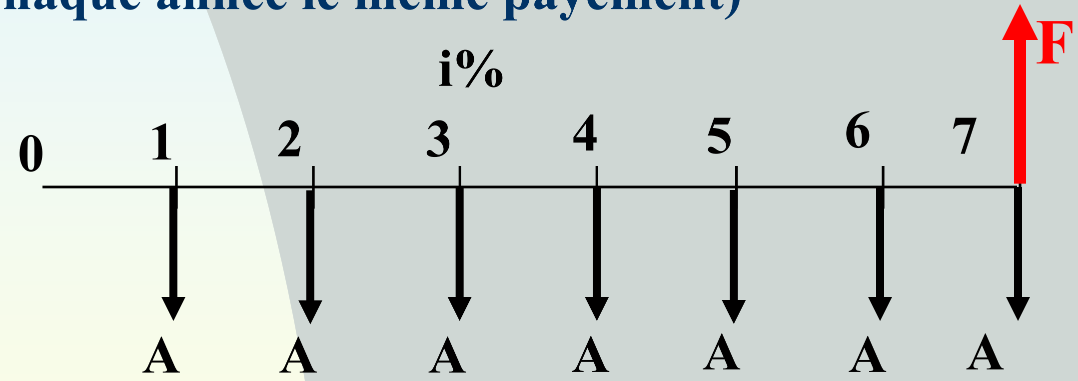
1. **Payement unique.**
2. **Payement en séries égales.**
3. **Payement en séries linéaires.**
4. **Payement en séries géométriques.**
5. **Payement en séries irrégulières.**

1. Payement Unique.

C'est P/F ou bien F/P utilisant les équations ou bien les tables.

2. Payement en séries égales (Uniformes).

Les payements sont les mêmes pendant chaque période d'intérêt.
(ex. Chaque année le même payement)



Dans ce cas:

$$F = A + A(1+i) + \ldots + A(1+i)^{N-2} + A(1+i)^{N-1}$$

En multipliant F par (1+i), on aura:

$$F(1+i) = A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots + A(1+i)^{N-1} + A(1+i)^N$$

D'où, par différence:

$F(1+i) – F = - A + A(1+i)^N$ **ce qui donne :**

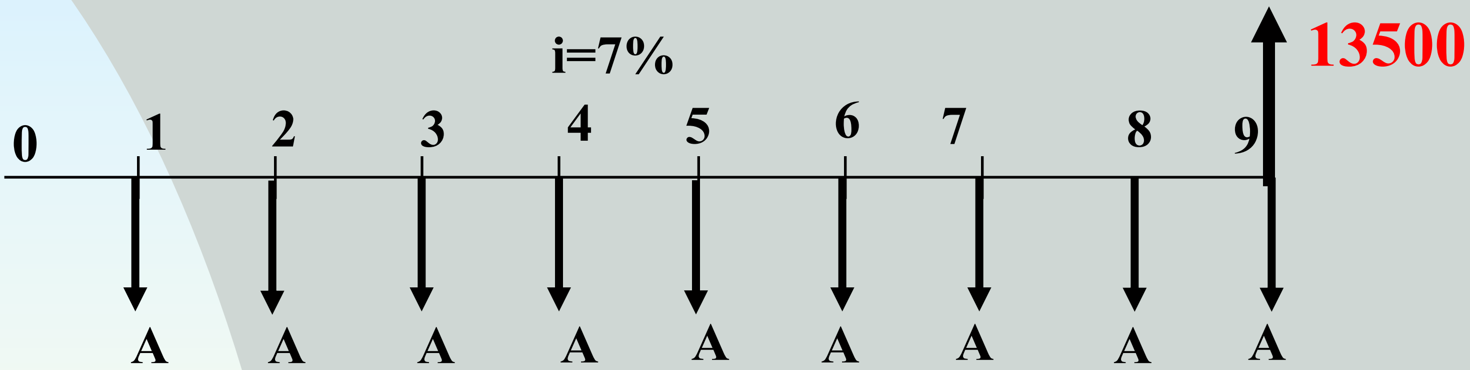
$$F = A((1+i)^N – 1) / i = A(F/A,i,N)$$

Ou bien :

$$A = F.\ i / ((1+i)N – 1) = F(A/F,i,N)$$

Exemple:

Si des versements sont effectués à la fin de l'année, quel pourrait être le versement annuel pour recevoir $13500 à la fin de la 9eme année, avec 7% d'intérêt.



A = F(A/F,i,N) = F(A/F, 7, 9) = 13500 (0.0835)

A = $1127.25

De même on peut utiliser P au lieu de F.

Puisque $F = P(1+i)^N$, on peut calculer les facteurs P/A et A/P.

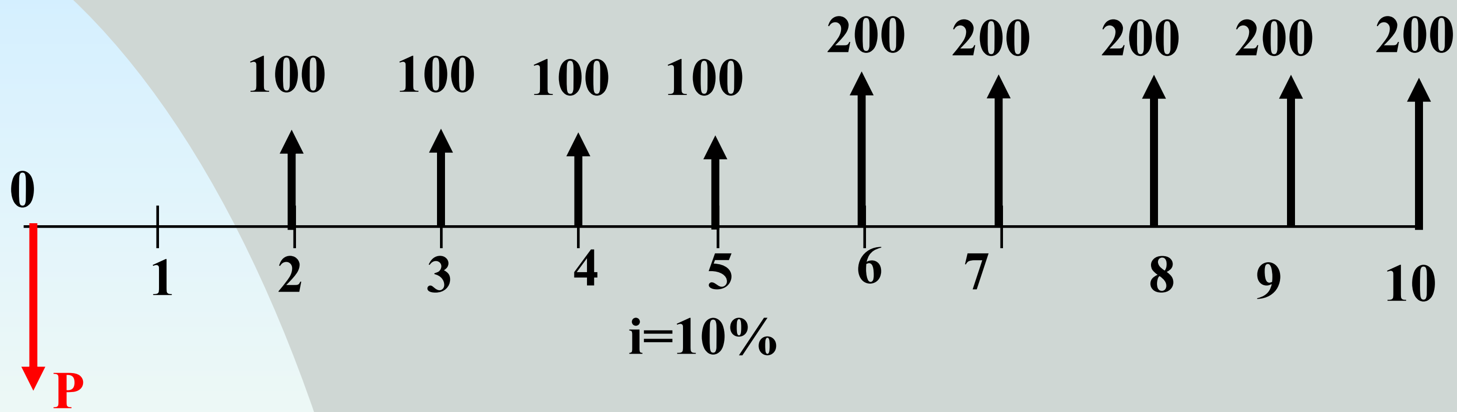
$$A = P\,[\,i\,(1+i)^N\,]\,/\,[((1+i)^N - 1)] = P(A/P,i,N)$$

Ou bien:

$$P = A\,[\,((1+i)^N - 1)\,]\,/\,[\,i\,(1+i)^N\,] = A(P/A,i,N)$$

Exemple:

Trouver le capital « P » pour les recettes suivantes avec i=10%.



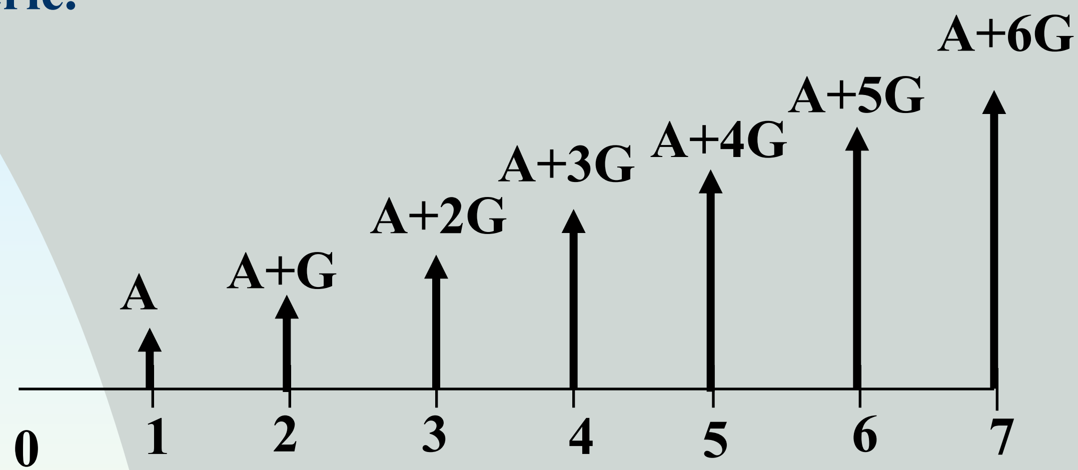
1) P = [100(F/A,10,9) + 100(F/A,10,5)] (P/F,10,10) = $758.93

2) P = 100(P/A,10,4)(P/F,10,1) + 200(P/A,10,5)(P/F,10,5) = $758.92

3) P = 200(P/A,10,10) – 200(P/A,10,5) + 100(P/A,10,4)(P/F,10,1) = $758.94

3. Payement en séries linéaires.

Les payements seront effectués en combinant une série uniforme avec une série linéaire qui croit ou diminue d'une constante « G » après la première série.



Pour la série linéaire uniquement on aura:

Dans ce cas:

$$\mathrm{P} = \mathrm{G}\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{(1+i)^{N}-1}{i(1+i)^{N}} - \frac{N}{(1+i)^{N}}\right)$$

Soit : $\mathbf{P = G\ (P/G,i,N)}$

En utilisant la relation entre « P » et « A », on peut obtenir:

$$A = G\left(\frac{1}{i} - \left[\frac{N}{(1+i)^N - 1}\right]\right)$$

Soit $A = G\,(A/G,i,N)$

Finalement, on peut obtenir de même pour la valeur future:

$$F = \frac{G}{i}\left[\frac{(1-i)^N - 1}{i} - N\right]$$

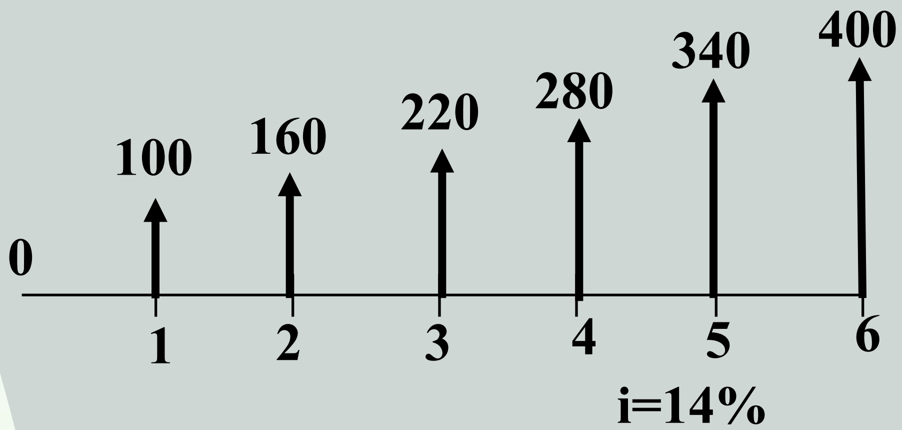
Soit

$F = G\,(F/G,i,N)$

$F = G\,(P/G,i,N)\,(F/P,i,N)$

Exemple:

1) Trouver la valeur présente « P » pour le cash-flow suivant.
2) De plus, déterminer la valeur annuelle équivalente de la série en utilisant le facteur « A/G ». Utiliser i=14%.



A = 100, G=60, i=14% et N=6

1) P = A(P/A,14,6) + G(P/G,14,6) = 100(3.8887) + 60(8.2511) = $883.94

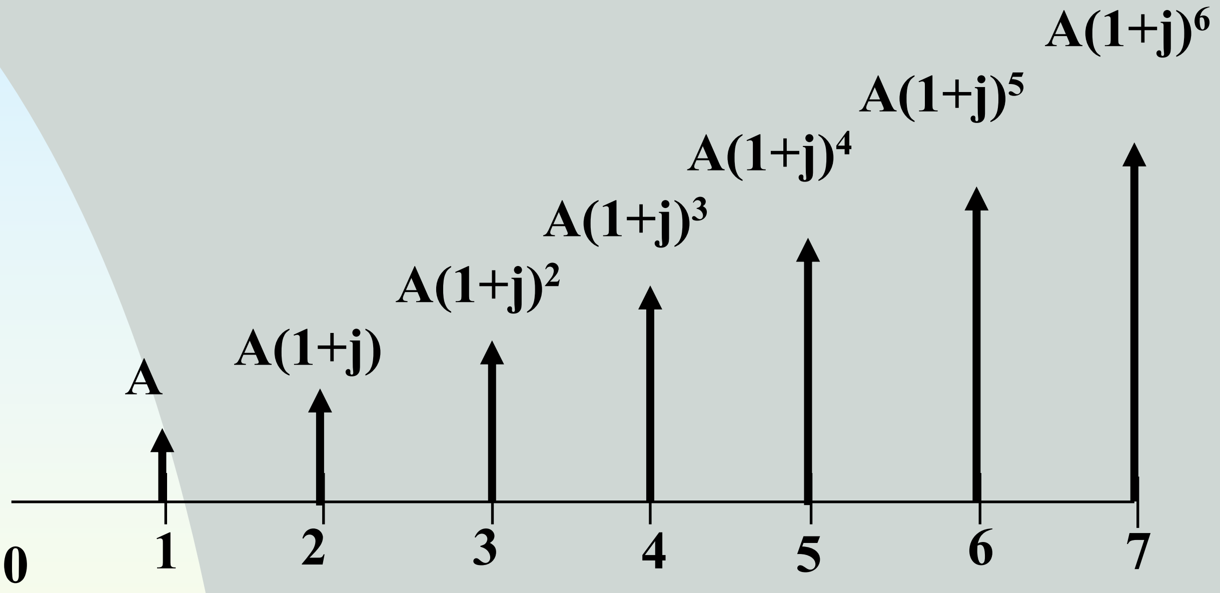
2) A = 100 + G(A/G,14,6) = 100 + 60(2.1218) = $227.31

Vérification:

P = A(P/A,i,N) = 227.31(3.8887) = $883.93

4. Payement en séries Géométriques.

Dans ce cas l'augmentation de la valeur annuelle se fait suivant une quantité « j » représentant le changement en % dans le payement par période.



Le dernier payement de la série sera:

$$A_n = A_1 \,(1+j)^{N-1}$$

Dans ce cas: **(En utilisant la valeur présente « P »**

$$P = A\frac{(1-(1+j)^{N}(1+i)^{-N})}{(i-j)} \quad \text{if} \quad i \neq j$$

$$P = \frac{NA}{1+i} \quad \text{if} \quad i = j$$

Ou bien

$$P = A\left(\frac{1-(P/F,i,N)(F/P,j,N)}{i-j}\right) \quad \text{if} \quad i \neq j$$

$$P = A(N)(P/F,i,1) \quad \text{if} \quad i = j$$

Si on utilise la valeur future « F », on aura :

$$F = A\frac{((1+i)^N - (1+j)^N)}{(i-j)} \qquad \text{if} \quad i \neq j$$

$$F = N(A)(1+i)^{N-1} \qquad \text{if} \quad i = j$$

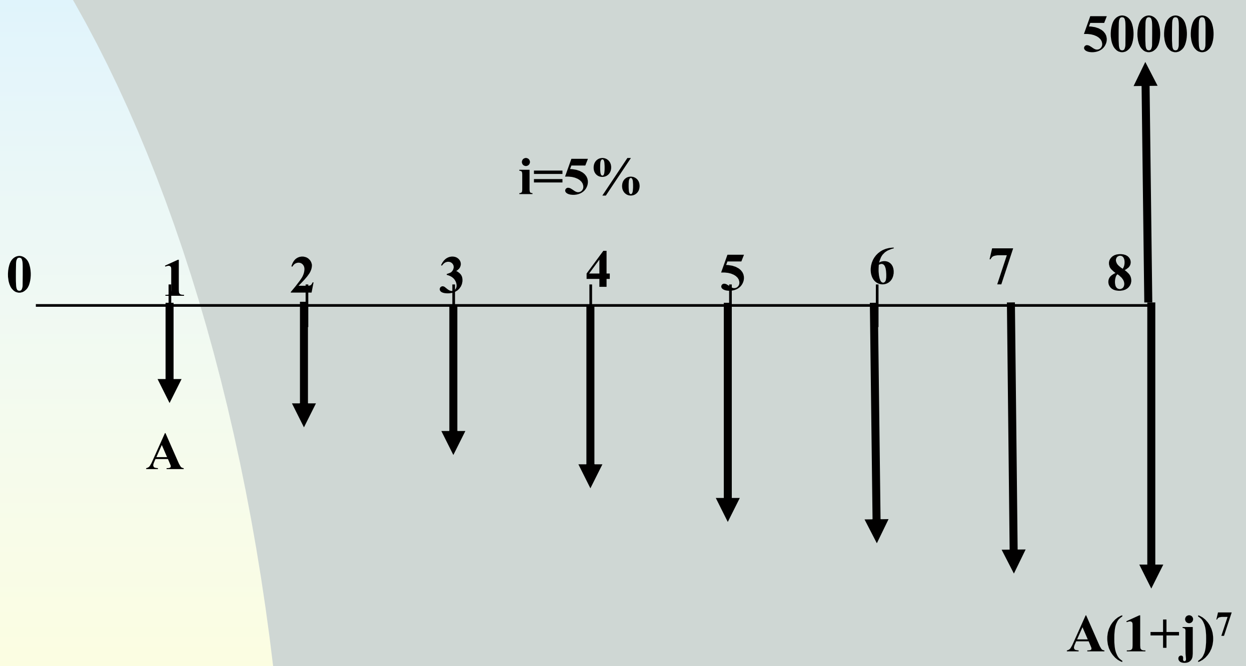
Ou bien:

$$F = \frac{A\left[(F/P,i,N) - (F/P,j,N)\right]}{i-j} \qquad \text{if} \quad i \neq j$$

$$F = (A)(N)(F/P,i,N-1) \qquad \text{if} \quad i = j$$

Exemple:

1) Quel sera le versement annuel final (fin de la 8eme année) si les versements annuels augmentent de 4% chaque année et la somme finale de tous les versements à la fin de la 8eme année est égale à \$50000 ? Prendre i = 5%.



$A = ?$, $F = 50000$, $i=0.05$, $j=0.04$ et $N=8$

Soit: avec $i \neq j$

$$F = A \frac{((1+i)^N - (1+j)^N)}{(i-j)}$$

$A = 50000\ (0.01 \times 0.1089) = \$4591.94$

$A_8 = A\ (1+j)^{N-1} = 4591.94\ (1+0.04)^{8-1} = \$6042.68$

Taux d'intérêt Nominal et Effectif

Périodes différentes de l'annuelle, c'est possible.

(mensuelle, trimestrielle, semestrielle…)

Quand on compare différent cash-flow ou bien alternatives, il faut opter pour la même période de payement d'intérêt.

1. Taux d'intérêt Nominal

Généralement on parle d'un intérêt de

r% composé (considéré) M-iel.

Avec:

r = taux d'intérêt nominal (APR : annual percentage rate)

M = Fréquence de calcul d'intérêt dans l'année (les périodes d'intérêt par an)

r/M = taux d'intérêt par sous période.

En général on les exprime toujours par année. (transformation)

Ex: 12% considéré mensuellement donne un intérêt de 1% par mois. (Mais c'est 12% par an qui est utilisée)

2. Taux d'intérêt Effectif

Le taux effectif **annuel** est donné par :

$$i_a = ((1+\frac{r}{M})^M - 1)$$

Ex: Si i=8% est considéré trimestriellement avec P=$100.

4 trimestres dans l'année (8%/4 = 2%)

$$F = 100(1+0.02)^4 = \$108.24$$

Et l'intérêt sera :

$$I = 100((1+0.02)^4 - 1) = \$8.24$$

Le taux sera alors :

$i_a = 8.24/P = 8.24/100$ i=8.24%

exemple

Vous avez une carte de crédit qui vous charge 1.5% d'intérêt par mois, composé (compounded) mensuellement. Quels sont les taux d'intérêt nominal et effectif.

1) <u>Le taux effectif</u>

$$i_a = ((1+\frac{r}{M})^M - 1)$$

M=12, r/M=1.5% = 0.015

$$i_a = (1+0.015)^{12} - 1 = 19.56\%$$

2) <u>Le taux nominal</u> sera: (calculé annuellement)

i=1.5 x 12 = 18% (= r)

Taux d'intérêt Effectif par période de Payement

Si la période de payement et la période d'intérêt sont différentes, le taux d'intérêt effectif sera:

$$i = \left(1 + \frac{r}{CK}\right)^{C} - 1$$

Avec:

- **i: taux d'intérêt effectif par période de payement.**
- **C: Nbr des périodes d'intérêt par période de payement.**
- **K: Nbr de périodes de payement par an.**
- **r/K: Taux d'intérêt nominal par période de payement.**
- **M = C.K**

exemple

Si des versements égaux sont faits semestriellement, quel est le taux d’intérêt effectif par période semestrielle payement si le taux d’intérêt est 14% considéré mensuel?

r=14%, C=6, K=2

$$i = \left(1+\frac{r}{CK}\right)^{C} - 1$$

$$i = (1+(0.14/6x2))^{6} - 1 = 7.21\%$$

Considération d'intérêt Continue
(Continuous Compounding)

Lorsque la durée des sous périodes devienne petite, le nombre de ces sous périodes M tend vers l'infini.

$$i = \lim_{CK \to \infty}\left[\left(1+\frac{r}{CK}\right)^{C} - 1\right] = e^{\frac{r}{K}} - 1$$

Avec:

- **M=C K**

exemple

Soit un taux d'intérêt nominal de 13%, déterminer le taux d'intérêt effectif par mois si l'intérêt est considéré de façon continue.

r=13%, K=12

$$i = e^{(0.13/12)} - 1 = 0.0109 \quad = \quad 1.09\%\%$$

Résumé

Effet de la fréquence de composition sur le taux d'intérêt effectif

		Pour taux nominal de 12%	
Fréquence de composition	**Nbr de périodes de composition par an**	**Taux d'intérêt par période**	**Taux effectif**
Annuelle	1	12%	12.00 %
Semestrielle	2	6%	12.36 %
Trimestrielle	4	3%	12.55 %
Mensuelle	12	1%	12.68 %
Continue	h	$\longrightarrow$ 0	12.75 %

Considération d'intérêt Continue
(Payement Unique)

Pour un intérêt composé continu et pour une transaction de payement en une seule fois,

K=1 pour une année, d'où $\mathbf{i = e^r - 1}$

D'où :

$\mathbf{F = P(1+i)^N = P(1+e^r-1)^N}$ $\qquad \mathbf{F = P.e^{rN}}$

Prêts Amortis

L'une des applications importantes de l'intérêt composé est le remboursement des prêts en plusieurs versements.

Si le prêt est remboursé en montants périodiques égaux C'est le prêt amorti.

Ex:

- **Prêt pour achat de voiture.**
- **Prêt pour achat d'appareils (électroménagers…)**
- **Prêt pour achat de maison…**

Généralement la quantité d'intérêt à payer à n'importe quelle période dépend du montant actuel de la balance restante.

La banque m'a prêté une somme « P », que je dois la rembourser en payements égaux « A » avec un intérêt de « i » sur une période « N ».

Donc $A = P(A/P,i,N)$

Chaque payement « A » peut être divisée en quantité « intérêt » et la quantité restante pour le payement du principal.

$$A = P_n + I_n$$

Avec:

P_n: Payement du principal à la période « n ».

I_n: Payement de l'intérêt à la période « n ».

B_n : Balance restante à la fin de la période « n ».

$$B_0 = P$$

$$I_n = B_{n-1}\, i$$

Méthodes de Calcul pour Prêts Amortis

02 méthodes.

1) <u>Méthode tabulaire.</u>

Calculer « I » et « P » à partir du temps « t=0 » et continuer jusqu'à atteindre la période désirée « n ».

$$I_1 = B_0.i = P.i \qquad P_1 = A - I_1 = A - P.i$$

La balance restante après le premier payement sera:

$$B_1 = B_0 - P_1 = P - P_1$$

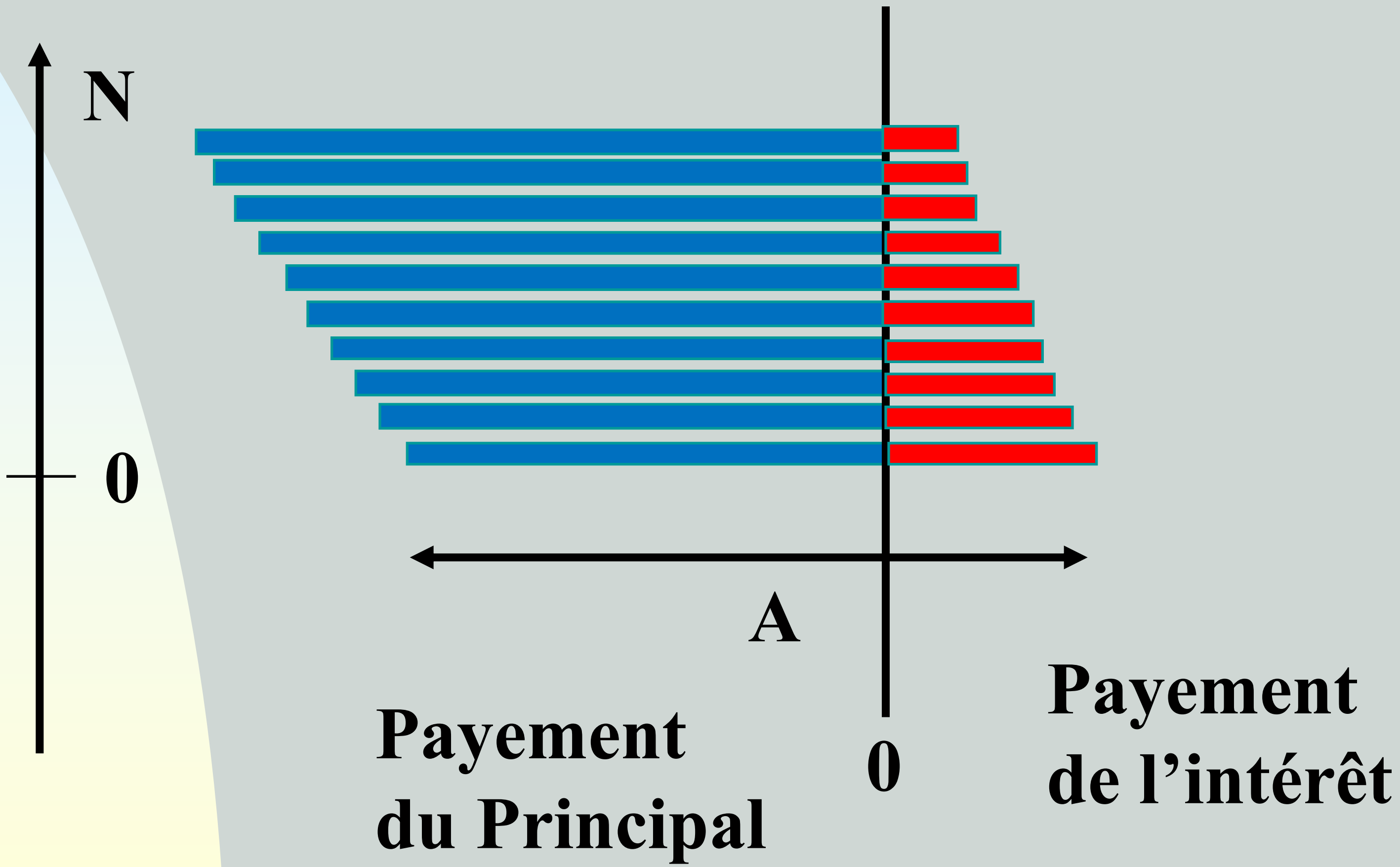
On continue jusqu'à la période « n », on aura donc:

$$B_n = P - (A - P.i)\,(F/A.i,n)$$

$$I_n = B_{n-1}.i$$

Bonne méthode en utilisant Excel. Sinon si N est très grande, c'est lourd.

Généralement on paye plus d'intérêt et moins de principal au début .



2) Méthode de la balance restante.

Après « n » payements, il reste encore N-n autres payements.

$B_n = A(P/A,i,N-n)$ (Valeur présente P du reste)

Et le payement de l'intérêt au temps « n » devient »

$$I_n = (B_{n-1}).i = A(P/A,i,N-n+1) \cdot i$$

Enfin le payement du principal à « n » devient

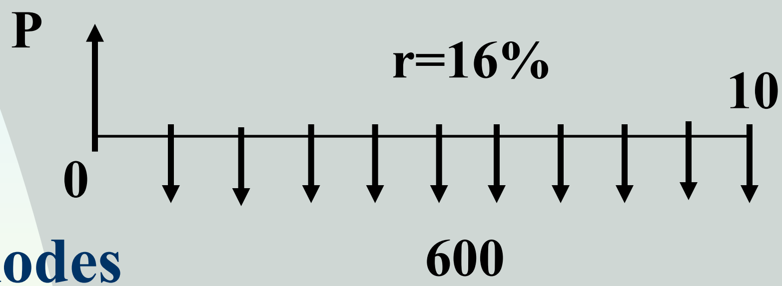
$$P_n = A - I_n = A - A(P/A,i,N-n+1) .i$$

Ou bien

$$P_n = A(P/F,i,N-n+1)$$

exemple

Si un prêt de 05 années comporte des payements semestriels de \$600 à 16% d'intérêt, composé semestriellement, quelle est la balance restante à la fin du 7eme payement. Quel est le payement de l'intérêt et du principal fait pendant le 7eme payement?



N=5x2 = 10 périodes

n=7, A=600, r=16%/2 = 8%

B_7 = A(P/A,i,N-n) = 600(P/A,8,3) = 600(2.5771) = **\$1546.26**

I_n=(B_{n-1}).i = A(P/A,i,N-n+1).i = 600(P/A,8,4)(0.08) = **\$158.98**

P_n = A – I_n = 600 – 158.98 = **\$441.02**

Prêts Immobiliers

Utilisés généralement pour l'achat d'une propriété comme une maison.

Ce sont des prêts amortis simples

- On peut parler des taux d'intérêt variables ou bien des payements de prêt variables.

Prêts à taux variables.

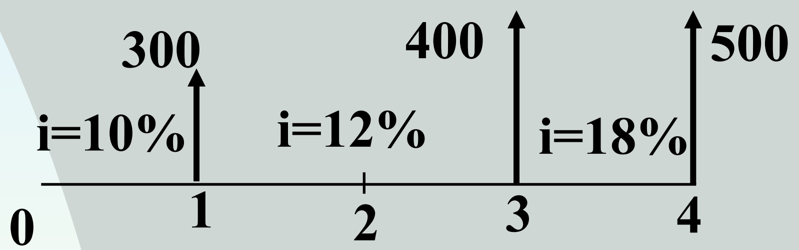
Le taux augmente graduellement chaque année pendant les premières années du prêt et puis il se stabilise pendant les années restantes du prêt.

Prêts à payements variables.

Utiliser pour offrir des payements initiaux bas pour une période de temps, puis les payements augmentent à des intervalles fixes.

exemple

Considérer le cash-flow et les taux d'intérêt ci-dessous avec 10% composé annuellement, 12% composé trimestriellement et 18% composé mensuellement. Quels sont les valeurs présente et future des séries?



10% comp. Annu → 10% par an

12% comp. trimes → 3% par trimestre

18% comp. Mens. → 1.5% par mois

P = 300(P/F,10,1) + 400(P/F,3,8)(P/F,10,1)

+ 500(P/F,1.5,12)(P/F,3,8)(P/F,10,1) = \$859.91

F = 859.91(F/P,10,1)(F/P,3,8)(F/P,1.5,12) = \$1432,65

Bons ou Titres

C'est un type de prêt où le créancier (business, l'état, trésor…) s'engage à payer des taux d'intérêt à des intervalles spécifiques pendant une période définie et aussi rembourser le principal à une date spécifique appelée **Échéance (maturity date).**

Ceux qui prêtent l'argent pour des bons sont appelés **Investisseurs.**

Les bons peuvent être encaissés par la suite en argent, matériels, équipement ou bien même des maisons et lots de terrain (mortgage bond)

Définitions

Valeur: La valeur fixée du bond. Généralement \$1000 ou bien des multiples de \$1000.

Échéance: La date ou la valeur doit être repayée.

Taux du coupon: Intérêt payé sur la valeur du bond (annuel).

Bon au rabais: (discount bond) quand le bon est vendu moins que sa valeur.

Obligation à prime: (Premium bond) Quand le bon est vendu au dessus de sa valeur.

Rendement à échéance: (yield to maturity)

(Appelé aussi le retour de l'investissement)

Taux d'intérêt qui établit une équivalence entre les valeurs futures des intérêts et le prix du marché du bon. Il représente l'intérêt actuel gagné du bon pendant la période de possession.

- **Les bons sont commercialisés de la même façon que les réserves ou capitaux. Ils peuvent être gardés jusqu'à l'échéance ou bien vendu avant terme. Sa valeur dépendra du marché (augmente ou bien diminue).**
- **Les conditions économiques, tels que la solvabilité du prêteur, les taux d'intérêt, peuvent résulter dans l'investisseur du bon en le vendant avant l'échéance.**
- **D'où la nécessite d'un calcul d'équivalence (rendement à échéance ou bien yield maturity) La valeur fixée du bond.**

exemple

Un bon a une valeur de \$1000 et un taux de coupon de 8% payé semestriellement avec 04 années restantes. Quel est le rendement à échéance (yield to maturity) au prix courant de \$1115?

P = \$1115   N =8

Donc \$40 d'intérêt semestriellement (1000x0.08/2).

P = A(P/A,i,N) + 1000(P/F,i,N)

1115 = 40(P/A,i,8) + 1000(P/F,i,8)

Pour déterminer « i », on utilise une interpolation entre i=2% et i=3%

La solution est i=2,41% semestre, soit r=4.82% an.

Aussi, le rendement annuel effectif est:

$i_a = (1+0,0241)^2 - 1 = 4,88\%$

- Si le bon est acheté avec sa valeur, le rendement à échéance et le taux du coupon seront les mêmes.
- Le rendement courant (current yield) du bon est l'intérêt annuel gagné comme pourcentage du marché courant.
- Si l'intérêt du marché courant est plus grand que le taux du coupon, le bon doit vendre au rabais.
- Si l'intérêt du marché courant est plus petit que le taux du coupon, le bon doit vendre à la hausse.

Pourquoi Payer plus quand le taux d'intérêt du marché est bas.

Pour recevoir un retour important sur l'investissement

exemple

Pour l'exemple précèdent le bon a été acheté à un prix actuel de $1115. Comme on aura $40 d'intérêt par semestre en retour, le rendement courant sera

Rendement courant = 40/1115 = 3,59% par semestre.

Et $i_a = (1+0{,}0359)^2 - 1 = 7{,}31\%$ C'est le rendement courant effectif.

Supposons que l'intérêt actuel du marché est de 125, est –ce que le prix de $1115 est une bonne affaire?

P = 40(P/A,6,8) + 1000(P/F,6,8) = $875,79

C'est la valeur actuelle du bon.

Finances pour Ingénieurs

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Chap. 3

Techniques et Comparaison des Alternatives

COURS 2 **Mardi 03.11.2009**

Merci. **Fin du chapitre 2**