Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 2

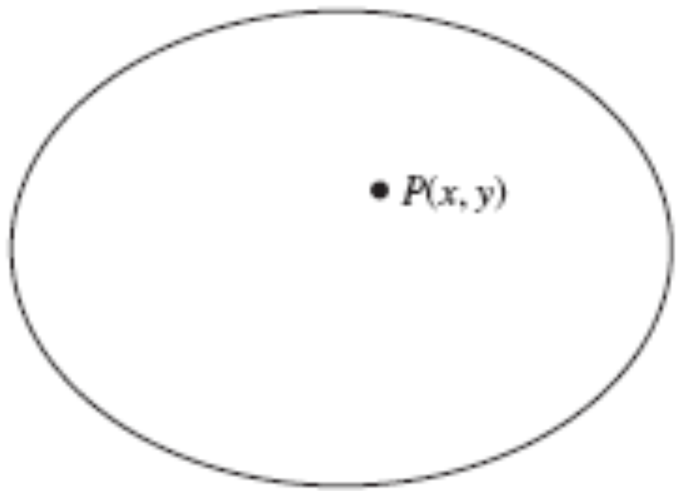
Concepts Généraux de la Méthode des Eléments Finis

COURS 2 **Jeudi 20.05.2010**

2.1 Introduction

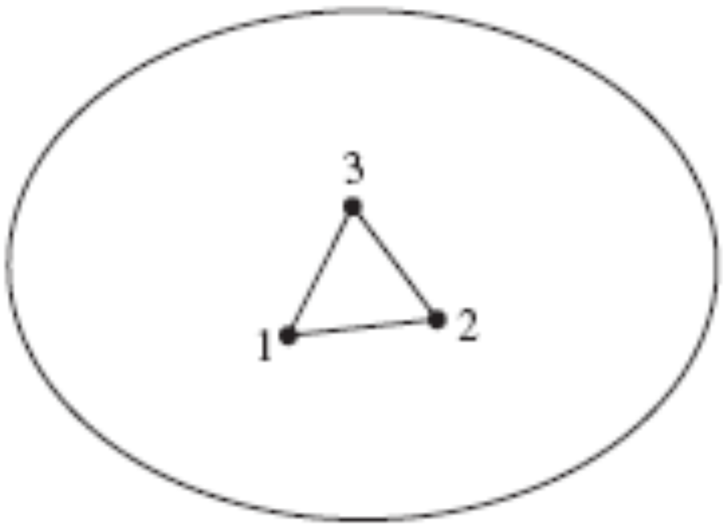
Diviser pour Régner: Principe de la MEF

- Milieux Continus aux géométries **complexes**; pas de **solution** analytique.
- Essayer de **discrétiser** le milieu continu (infinité de DDL) : Représentation en nombre limité d'éléments (DDL)
- **Principe fondamentale:** **Subdiviser** le milieu à analyser en plusieurs composantes élémentaires (**éléments finis**) séparées entre elles au moyen de **lignes** ou surfaces imaginaires et supposées liées les unes aux autres en des points nodaux ou **Nœuds**.



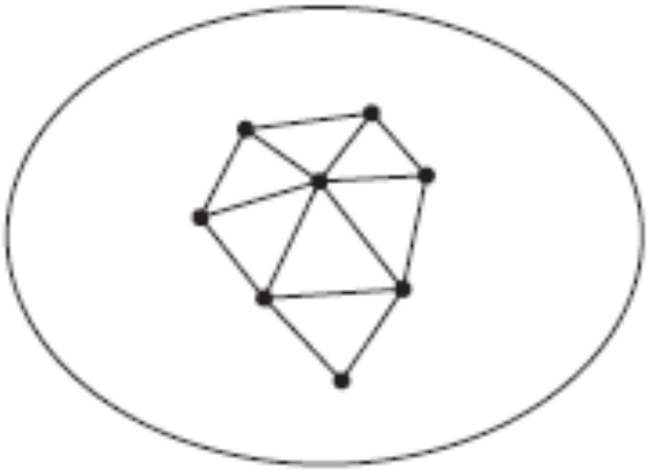
(a)

Domaine Plan
Général



(b)

Elément fini à 03
nœuds



(c)

Partie du maillage
du domaine

Système original $\longrightarrow$ Modèle Discret

D'abord étudier un élément puis par assemblage aller vers tout le domaine.

Utilisation d'une approximation des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

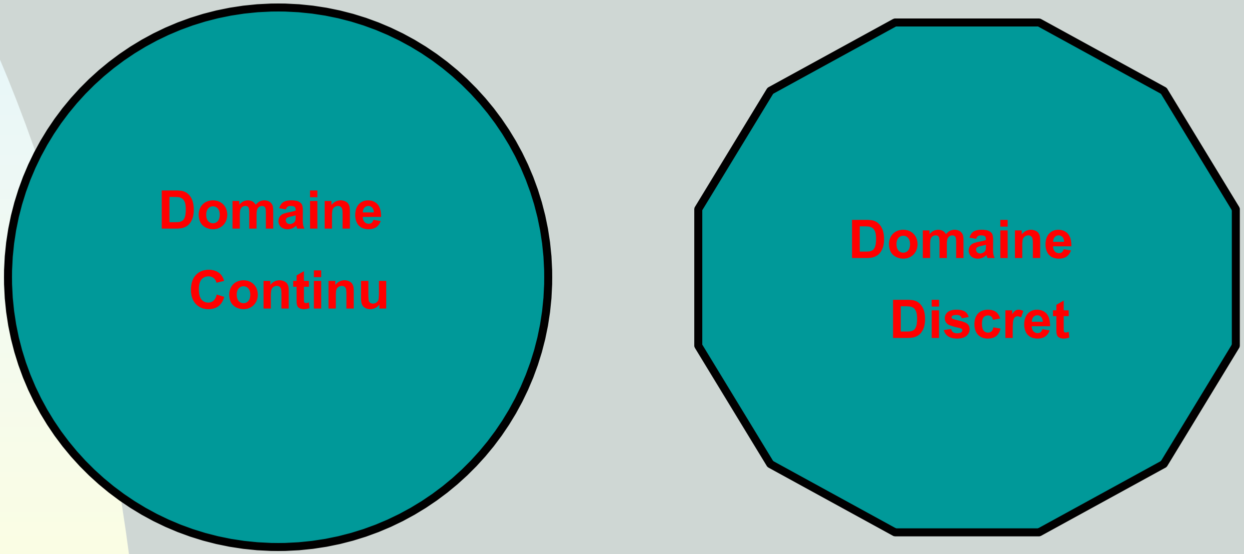
MEF fait appel aux 03 domaines:

- Sciences de l'ingénieur (construire les équations dérivées partielles).
- Méthodes numériques (Equations algébriques)
- Programmation (calcul numérique).

Historique

Nom « élément fini », pour la 1ère fois par Clough en 1960 (The finite element in plane stress analysis)

Mais concept très ancien: Exemple, périmètre d'un cercle, on le considérait comme un polygone.



Chaque coté du polygone = élément fini

Plus on a des éléments et plus ça converge vers la solution exacte

Dès 1960, la MEF subit un développement rapide:

- Méthode reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles (Résidus pondérés)
- Création d'éléments de haute précision, curvilignes et isoparamétriques.
- Reconnue comme outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles.
- Construction d'une base mathématique de la MEF.

Grace au développement des ordinateurs, la MEF connait actuellement un développement rapide et touche plusieurs domaines.

Apparition de **NASTRAN, ANSYS, ALGOR**…

Résumé de la Procédure:

1. Maillage: Idéalisation du domaine et discrétisation par des surfaces imaginaires (choix de l'élément).
2. Choix fonction d'interpolation: hypothèse sur la formule du champ de chaque élément.
3. Déduction de la matrice élémentaire de propriétés .
4. Formulation de la matrice globale de tout le domaine.
5. Calcul des vecteurs sollicitations équivalent.
6. Conditions aux limites.
7. Résolution du système d'équations algébriques obtenu.
8. Reconstitution du champ de variables de tout point du domaine à partir des champs des noeuds.

2.2 discrétisation

Diviser la structure en plusieurs éléments

Transformer:

Milieu Continu en milieu discret

Nbre infini de DDL en nbre Fini de DDL

Meilleure discrétisation? Bonne connaissance des caractéristiques du milieu et de son comportement est requise.

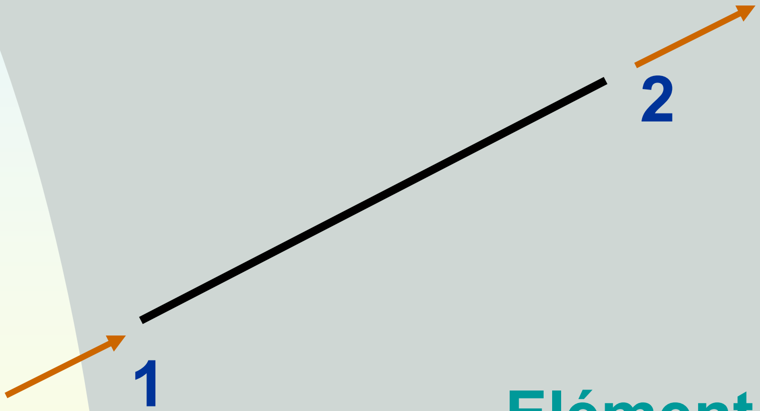
A l'ingénieur de choisir le type, la taille, le nbr…d'éléments pour pouvoir simuler le domaine réel.

2.2.1 Différents types d'éléments utilisés.

Choix est basé sur la géométrie du milieu et sur le nbre de variables utilisées pour décrire ce milieu.

i. ***Eléments unidimensionnels.***

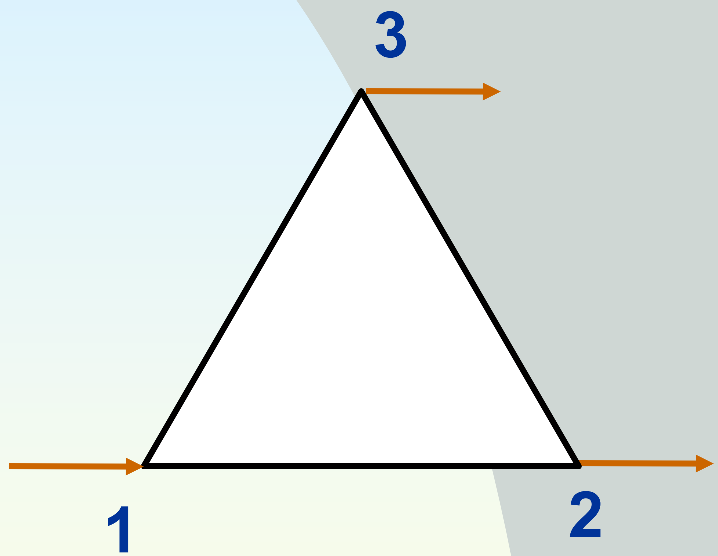
Toutes les caractéristiques ne dépendent que d'une seule variable.



Elément à 2 nœuds et 1 DDL par noeud

ii. *Eléments bidimensionnels (Plans).*

Toutes les caractéristiques dépendent de 02 variables.

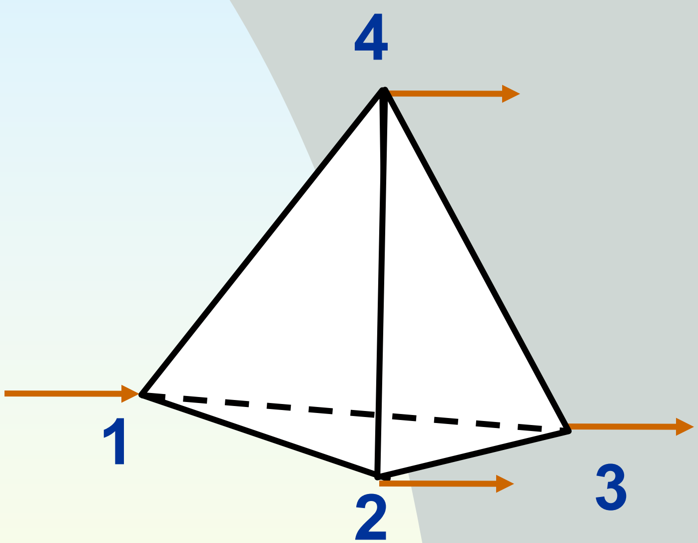


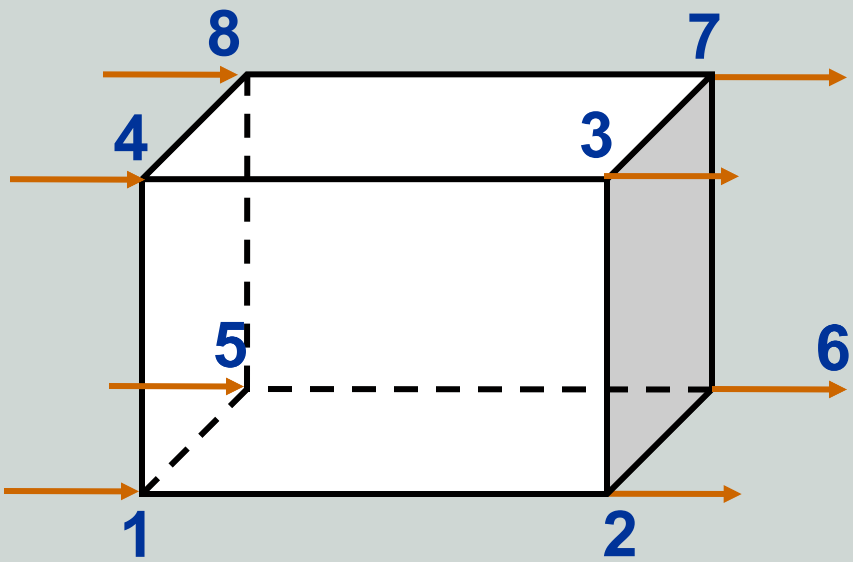
Elément triangulaire à 3 nœuds et 1 DDL par nœud

Elément rectangulaire à 4 nœuds et 1 DDL par nœud

iii. ***Eléments tridimensionnels.***

Toutes les caractéristiques dépendent de 03 variables indépendantes.





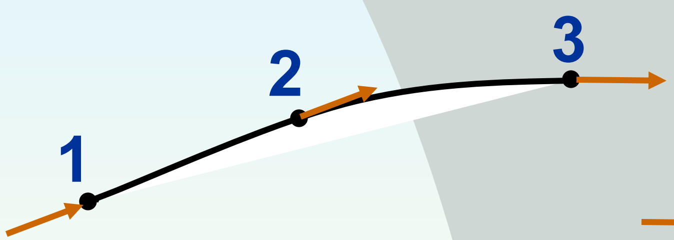
Elément tétraèdre à 4 nœuds et 1 DDL par nœud

Elément hexaèdre à 8 nœuds et 1 DDL par nœud

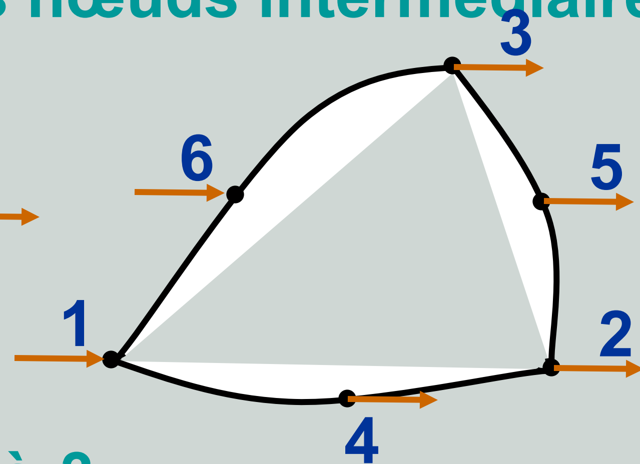
iv. *Eléments d’ordre élevé.*

Pour modéliser des domaines présentant des courbures dans la géométrie.

Il suffit d’ajouter des nœuds intermédiaires sur les cotés.



Elément 1D courbe à 3 nœuds et 1 DDL par nœud



Elément triangulaire courbe à 6 nœuds et 1 DDL par nœud

Elément rectangulaire courbe, élément tétraèdre courbe, élément hexaèdre courbe….

2.2.2 Processus de discrétisation.

i. ***Types d'éléments.***

Plupart des cas, le type d'élément à utiliser pour modélisation est évident.

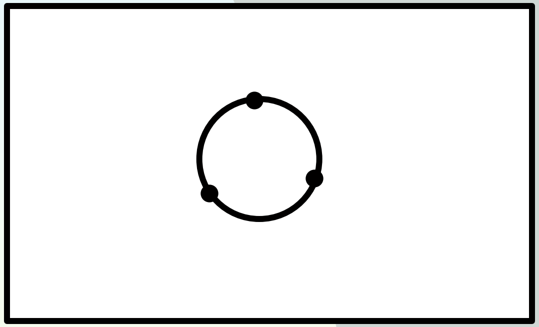
Sinon, le jugement de l'ingénieur reste important.

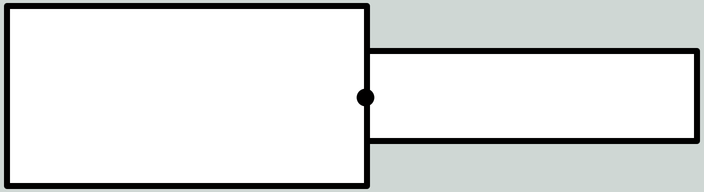
Nbr de DDL demandé, la précision voulue, la facilité d'exécution numérique et le degré d'approximation du milieu réel vont tous contribuer au choix de l'élément à utiliser dans la modélisation.

Des fois, les types d'éléments sont combinés dans un même milieu (surtout complexe).

iii. Position des nœuds.

En général, au niveau des points d'application des sollicitations, au changement de matériaux, au changement de géométrie…



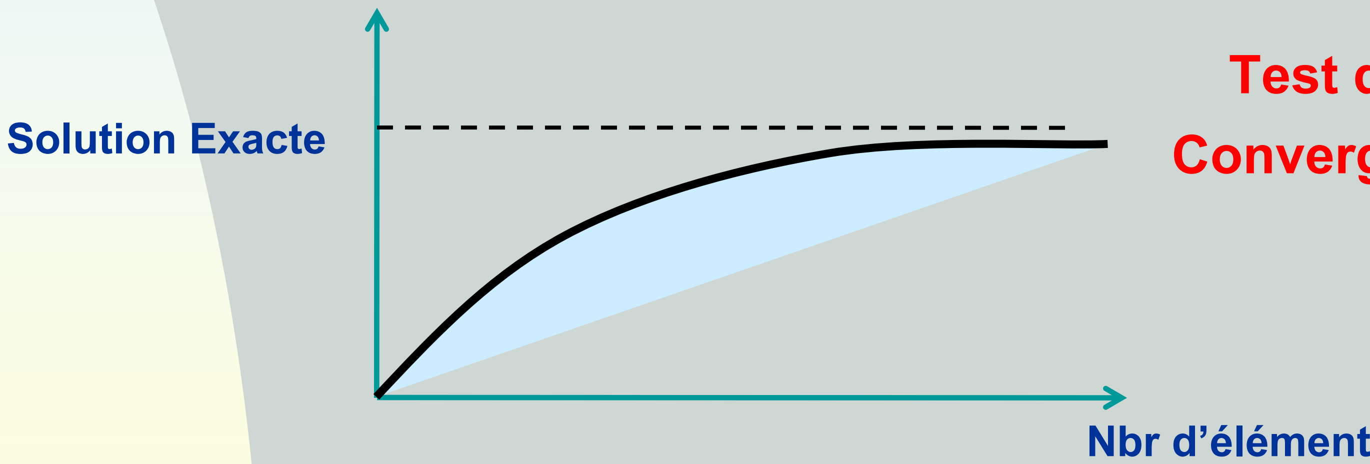


iv. Nombre de nœuds.

Nbre directement lié à la précision voulue, à la taille des éléments et au nbre total des DDL du milieu.

En général

Nbr de nœud ↗ ⇒ bonne convergence

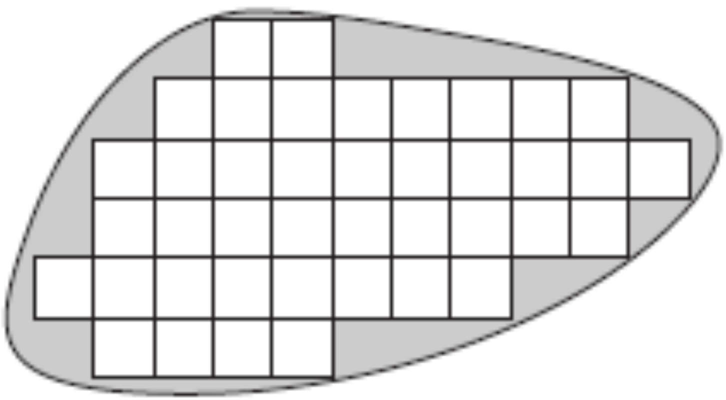


Test de Convergence

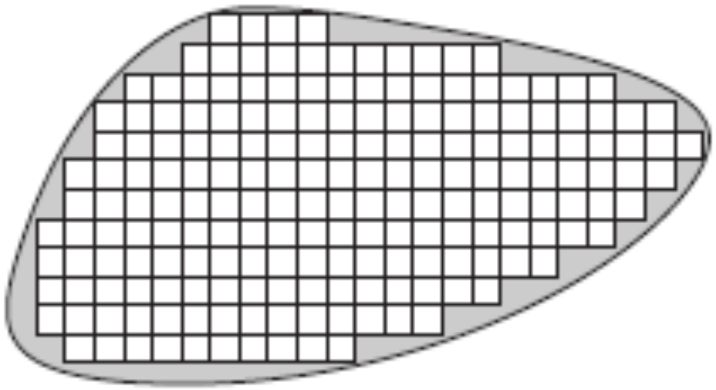
Mais attention à la taille totale du milieu, Pb de mémoire disponible

Exemple

Importance du nbr élevé de noeuds



(a)



(b)

41 éléments utilisés

Surface non comprise dans le modèle est importante

192 éléments utilisés

Surface non comprise dans le modèle est moins importante

v. Numérotation des nœuds.

MEF conduit à des **matrices** généralement **bandées** et **symétriques.**

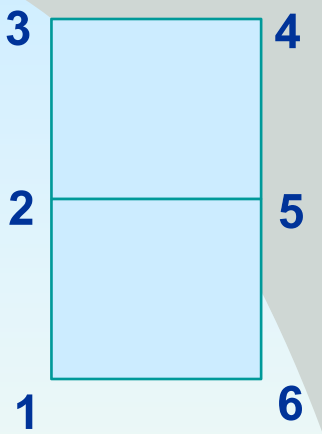
Donc profiter de cette largeur de bande.

La largeur dépend de la façon de numéroter les nœuds et du nbr de DDL par nœud.

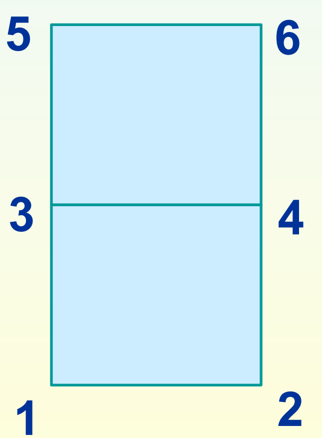
Minimise cette largeur ⟹ Minimiser le temps et l'espace.

En général plus la différence des indices des nœuds d'un même élément est grande et plus les termes extra diagonaux s'éloignent de la diagonale.

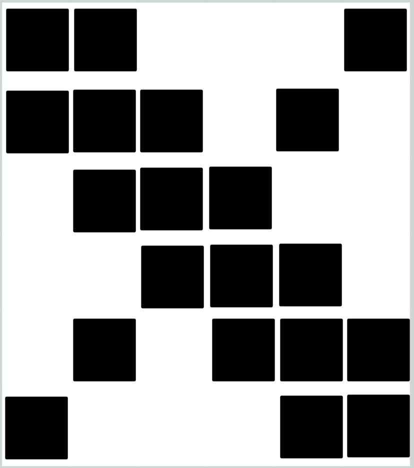
Exemple de bonne numérotation.

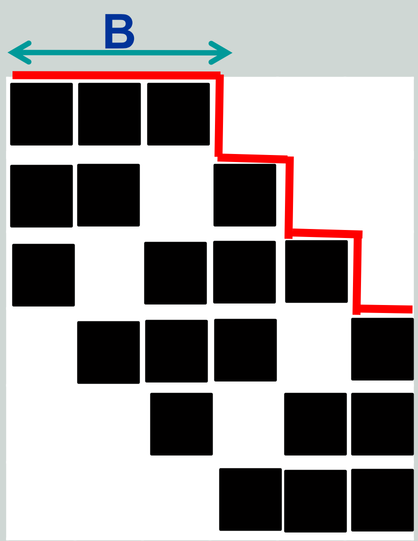


mauvaise



Bonne





Demi bande

B=(Dif+1) . DDL

Dif: max des plus grandes différences des nœuds appartenant au mêmee élément.

DDL: degré de liberté par nœud.

Plutôt suivant la plus petite dimension du milieu

2.3 Interpolation

Diviser la structure en plusieurs éléments

Donc, il faut approcher la solution dans chaque élément par une fonction simple.

Fonction d'interpolation

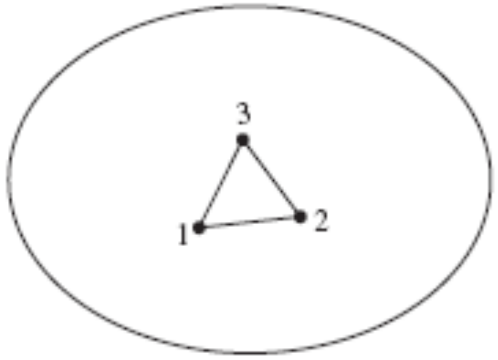
La MEF ne calcule qu'au niveau des nœuds, il faut donc interpoler pour n'importe quel point du milieu.

Exemple: le triangle suivant:

A n'importe quel point de l'élément,

la variable est défini par :

$$\phi(x,y) = N_1(x,y).\phi_1 + N_2(x,y).\phi_2 + N_3(x,y).\phi_3$$



(b)

$\phi_1 , \phi_2 \ et \phi_3$ Valeurs de la variable aux nœuds

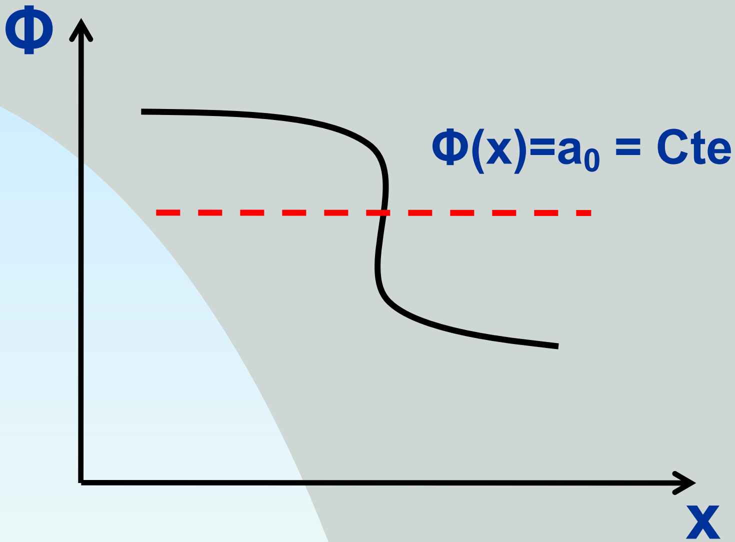
N_1 , N_2 et N_3 sont les fonctions d'interpolation.

Fonctions polynomiales ➡ les plus utilisées

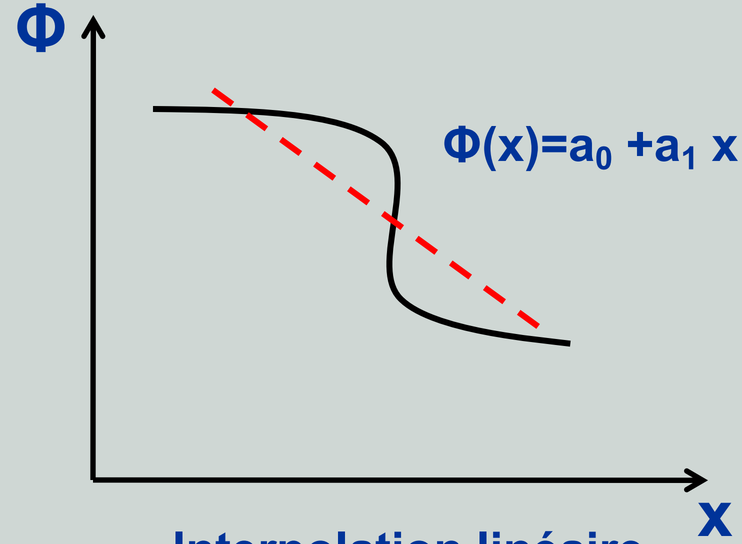
Avantages:

- Facilité dans la formulation et l'informatisation
- Facilité d'obtenir une meilleure précision, juste en augmentant le degré du polynôme.

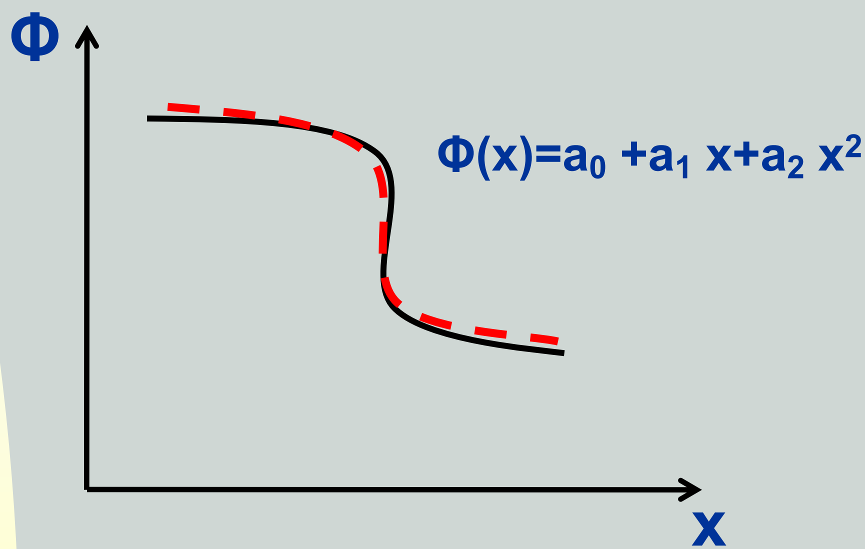
2.3.1 Degrés du polynôme.



Interpolation par constante



Interpolation linéaire



Interpolation quadratique

Aussi, interpolation cubique…

2.3.2 Critères de convergence.

Sont comme suit:

1. Continuité de la variable à l'intérieur de l'élément.
2. Assurer la compatibilité entre les éléments (Continuité). Même valeur de la variable aux nœuds communs d'éléments. Il faut donc, que le champ de variable et ses dérivées d'ordre (n-1) soient continues.
3. Doit inclure un comportement rigide (dérivée première)
4. Doit inclure des états uniformes.

Exemple:

$$\phi(x) = \underbrace{a_1 + a_2 x}_{\text{Rigide}} + \underbrace{a_3 x^2}_{\text{Uniforme}} + \underbrace{a_4 x^3 \ldots}_{\text{Ordre élevé}}$$

Vérifiant 1. et 2. → Eléments **compatibles** ou **conformes**

Vérifiant 3. et 4. → Eléments **Complets**

2.3.3 Choix du degré du polynôme.

Faut tenir compte de:

1. Doit satisfaire les critères de convergence.
2. Nbre de a_i doit être égale au nbr de DDL de l'élément
3. Chemin de variation de la fonction variable doit être indépendant du système de coordonnées locales (Isotropie géométrique). Fonction ne change pas avec changement d'axe.

2.4 Formulation des caractéristiques élémentaires (Matrices et vecteurs)

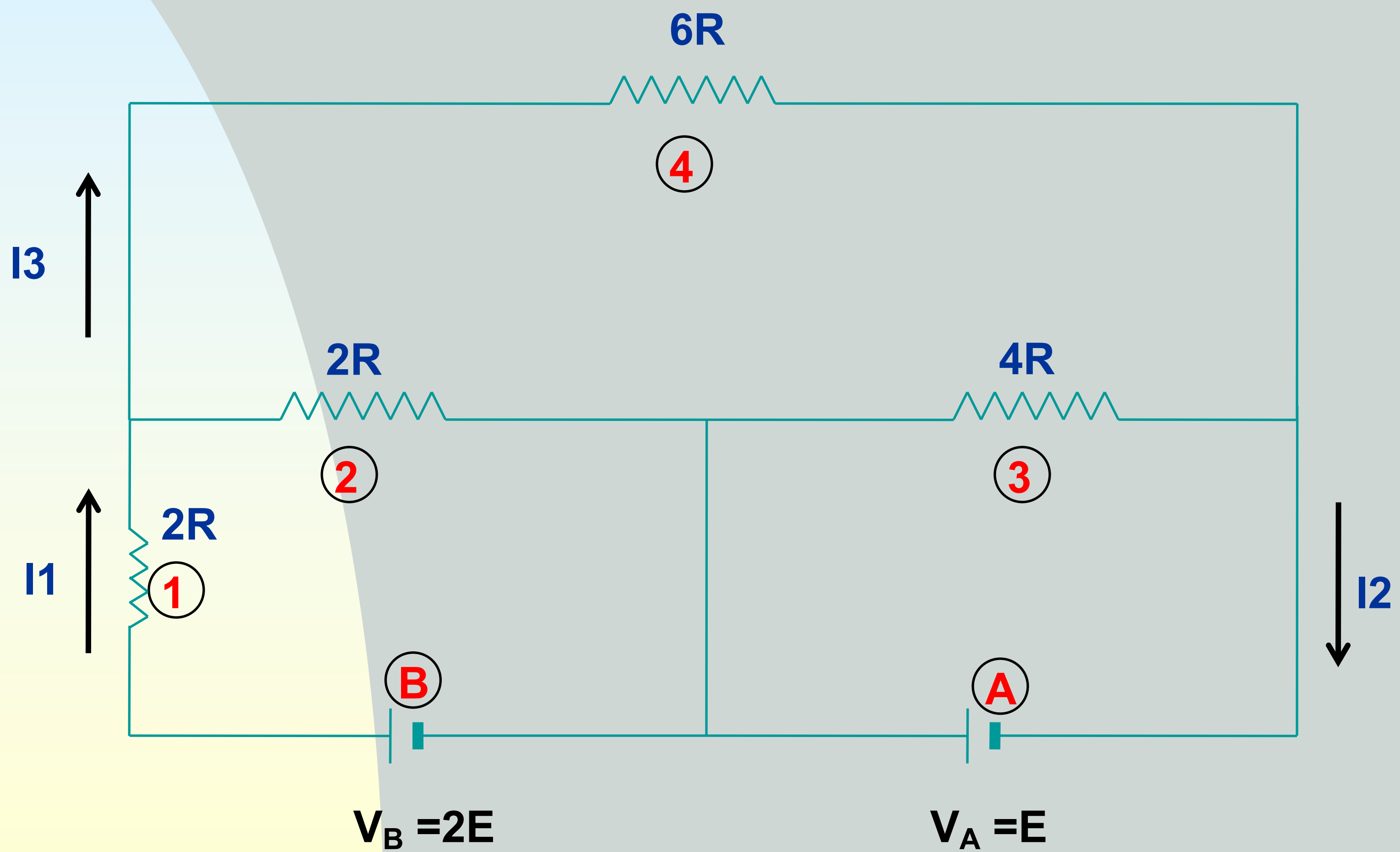
03 grandes méthodes pour leur détermination:

i. **Méthode directe**
ii. **Méthode des résidus pondérés**
iii. **Méthode variationnelle**

2.4.1 Méthode directe

Valable pour les systèmes discrets.

Exemple: réseau électrique suivant



I_1 , I_2 et I_3 : Variables inconnues (Courants)

R_1 , R_2 , R_3 et R_4 : sont les éléments caractéristiques du système (Résistances)

V_A , V_B : Voltage (sollicitation)

Loi de Ohm (Principe d'équilibre)

$$\Delta E = R.I$$

On peut appliquer la loi de voltage de Kirchhoff pour chaque boucle fermée du réseau

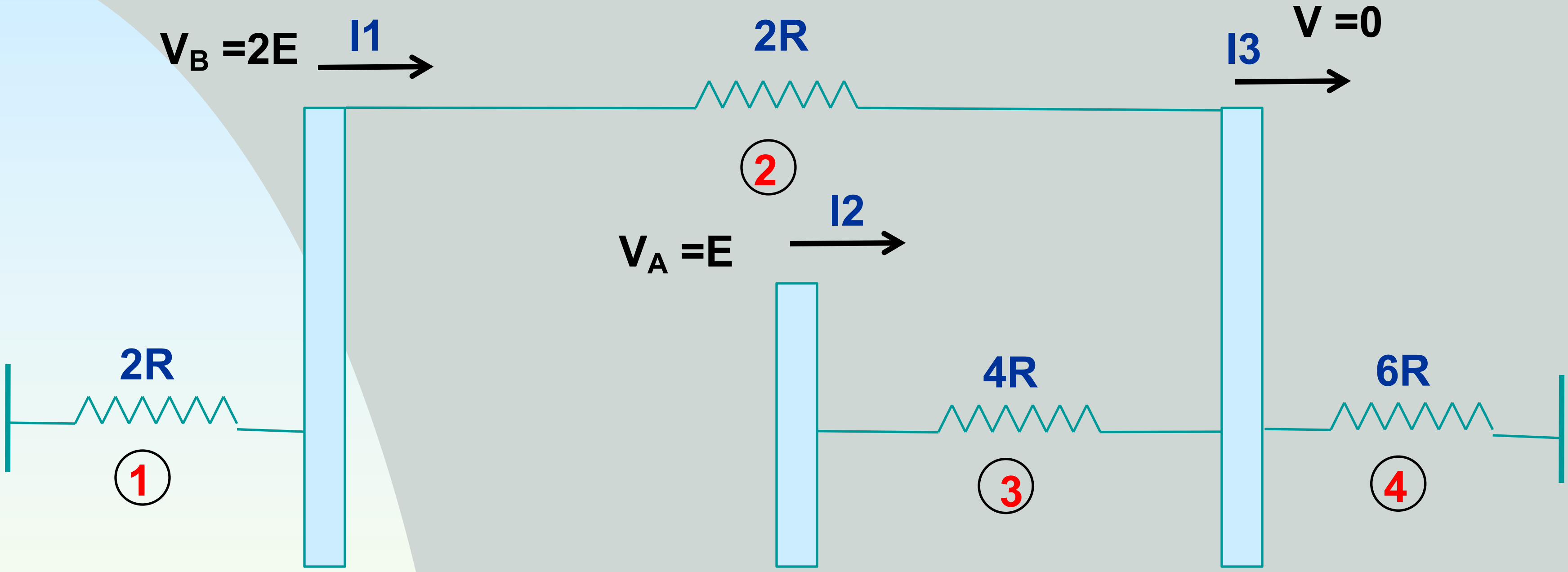
$$2\,E = 2R\,I_1 + 2\,R\,(I_1 - I_3)$$

$$E = 4\,R\,(I_2 - I_3)$$

$$0 = 6\,R\,I_3 + 4\,R\,(I_3 - I_2) + 2\,R\,(I_3 - I_1)$$

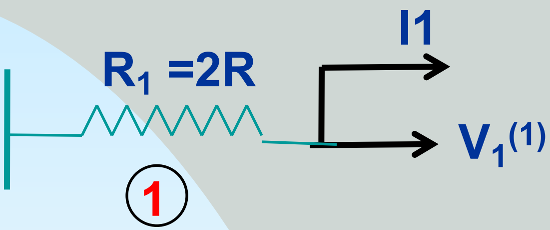
On peut utiliser la méthode directe pour retrouver le résultat.

Système équivalent



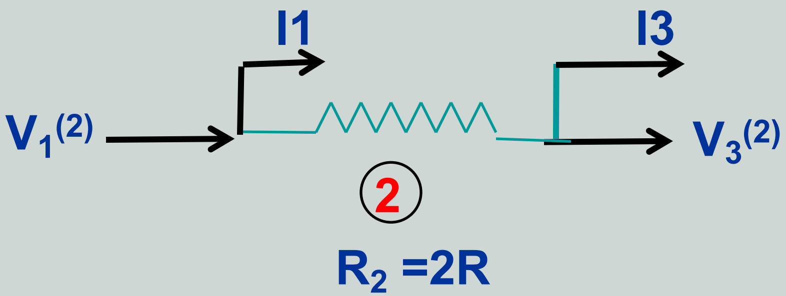
Considérons l'équilibre par élément

Elément 1.



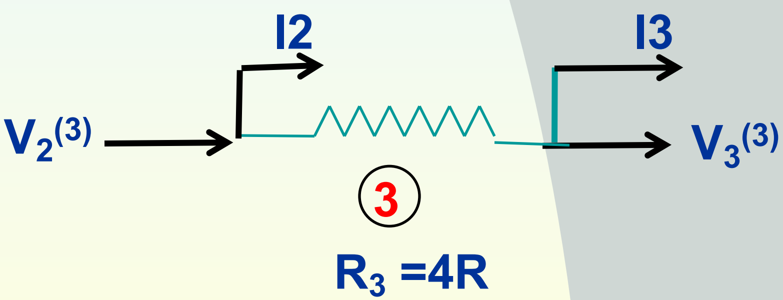
$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

Elément 2.



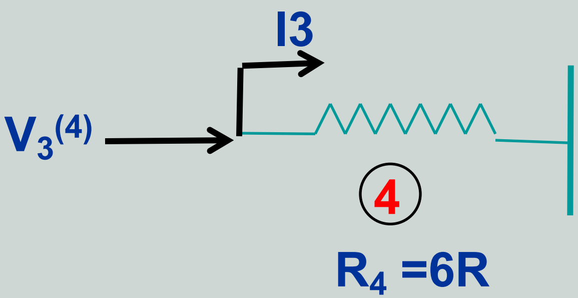
$$\begin{bmatrix} R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1^{(2)} \\ V_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

Elément 3.



$$\begin{bmatrix} R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_2^{(3)} \\ V_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

Elément 4.



$$\begin{bmatrix} R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_3^{(4)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

On applique l'équilibre au niveau de chaque DDL, on aura:

DDL, I_1 $$V_1^{(1)} + V_1^{(2)} = 2.E$$

DDL, I_2 $$V_2^{(3)} = E$$

DDL, I_3 $$V_3^{(2)} + V_3^{(3)} + V_3^{(4)} = 0$$

En replaçant par les sous matrices correspondantes, on retrouvera le système :

$$2\,E = 2R\,I_1 + 2\,R\,(I_1 - I_3)$$

$$E = 4\,R\,(I_2 - I_3)$$

$$0 = 6\,R\,I_3 + 4\,R\,(I_3 - I_2) + 2\,R\,(I_3 - I_1)$$

On peut l'écrire facilement, sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 4R & 0 & -2R \\ 0 & 4R & -4R \\ -2R & -4R & 12R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reste à résoudre le système pour I_1 , I_2 et I_3 .

2.4.2 Méthode des Résidus Pondérés

Est basée sur l'utilisation de fonctions d'essai qui satisfont les conditions aux limites et les formulations intégrales pour minimiser l'erreur sur tout le domaine.

2.4.3 Méthode variationnelle

Consiste à exprimer le problème sous la forme d'une variationnelle.

C'est exprimer une intégrale en fonction des paramètres inconnus et de leurs dérivées.

Ensuite, on applique le principe de stationnarité.

Calcul des extremums

2.5 Assemblage des caractéristiques élémentaires

Une fois définir les caractéristiques élémentaires (de tous les éléments du domaine), il faut les assembler. Mais avant cela, il faut transformer ces caractéristiques dans un repère unique (repère global). La transformation nécessite la connaissance de la position du repère local de chaque élément par rapport au repère global.

Ensuite, pour l'assemblage, il faut respecter les 02 hypothèses fondamentales:

i. La compatibilité de la variable inconnue

ii. Le principe d'équilibre.

Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Les fonctions d'Interpolation

COURS 3 **Lundi 25.05.2010**

Merci. **Fin du chapitre 2**