Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 3

Les Fonctions d'Interpolation

COURS 3 **Lundi 25.05.2009**

3.1 Introduction

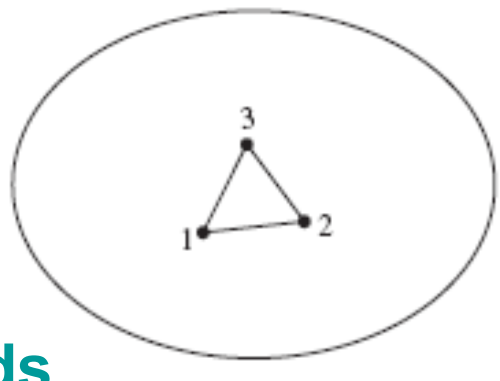
Diviser la structure en plusieurs éléments

Donc, il faut approcher la solution dans chaque élément par une fonction simple.

Fonction d'interpolation

La MEF ne calcule qu'au niveau des nœuds, il faut donc interpoler pour n'importe quel point du milieu.

Exemple: le triangle suivant:



(b)

A n'importe quel point de l'élément,

la variable est défini par :

$$\phi(x,y) = N_1(x,y).\phi_1 + N_2(x,y).\phi_2 + N_3(x,y).\phi_3$$

$\phi_1, \phi_2 \; et \phi_3$ **Valeurs de la variable aux nœuds**

N_1 , N_2 et N_3 sont les fonctions d'interpolation.

Pour assurer la convergence pendant le maillage, il faut vérifier les critères suivants:

1. Continuité de la variable à l'intérieur de l'élément.
2. Assurer la compatibilité entre les éléments (Continuité). Même valeur de la variable aux nœuds communs d'éléments. Il faut donc, que le champ de variable et ses dérivées d'ordre (n-1) soient continues.
3. Doit inclure un comportement rigide (dérivée première)
4. Doit inclure des états uniformes.

Exemple:

$$\phi(x) = \underbrace{a_1 + a_2 x}_{\text{Rigide}} + \underbrace{a_3 x^2}_{\text{Uniforme}} + \underbrace{a_4 x^3 \ldots}_{\text{Ordre élevé}}$$

Vérifiant 1. et 2. ⟹ **Eléments compatibles ou conformes**

Vérifiant 3. et 4. ⟹ **Eléments Complets**

Fonctions polynomiales ⟹ **les plus utilisées**

Avantages:

- **Facilité dans la formulation et l'informatisation**
- **Facilité d'obtenir une meilleure précision, juste en augmentant le degré du polynôme.**

Choix du degré du polynôme.

Faut tenir compte de:

1. Doit satisfaire les critères de convergence.
2. Nbre de a_i doit être égale au nbr de DDL de l'élément
3. Chemin de variation de la fonction variable doit être indépendant du système de coordonnées locales (Isotropie géométrique). Fonction ne change pas avec changement d'axe.

3.2 Forme polynomiale des fonctions d'interpolation

En MEF on travaille beaucoup en différentiation et intégration. Forme polynomiale plus adaptée à ceci.

Eléments 1D:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

Ou bien:

$$\boxed{u(x) = \{\phi\}^T \{a\}}$$

Avec:

$$\{\phi\}^T = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^n\}$$

et

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *coéfficients généralisés*

Eléments 2D:

$$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + \ldots + a_m y^n$$

Ou bien:

$$u(x,y) = \{\phi\}^T \{a\}$$

Avec:

$$\{\phi\}^T = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \cdots \quad y^n\}$$

et

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \qquad avec \quad m = \left(\sum_{j=1}^{n+1} j \right) - 1$$

Eléments 3D:

$$u(x,y,z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 yz$$
$$+ a_7 xz + a_8 y^2 + a_9 z^2 + \ldots + a_m z^n$$

$$\boxed{u(x,y,z) = \{\phi\}^T \{a\}}$$

Ou bien:

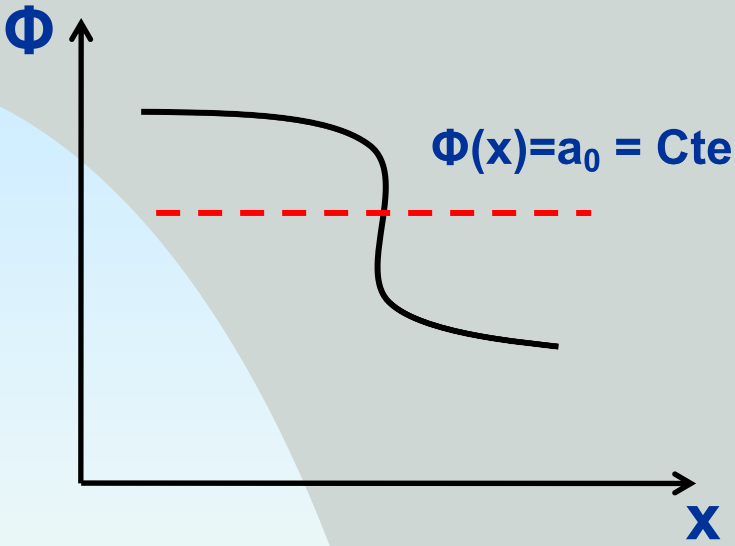
Avec:

$$\{\phi\}^T = \{1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad xy \quad \cdots \quad z^n\}$$

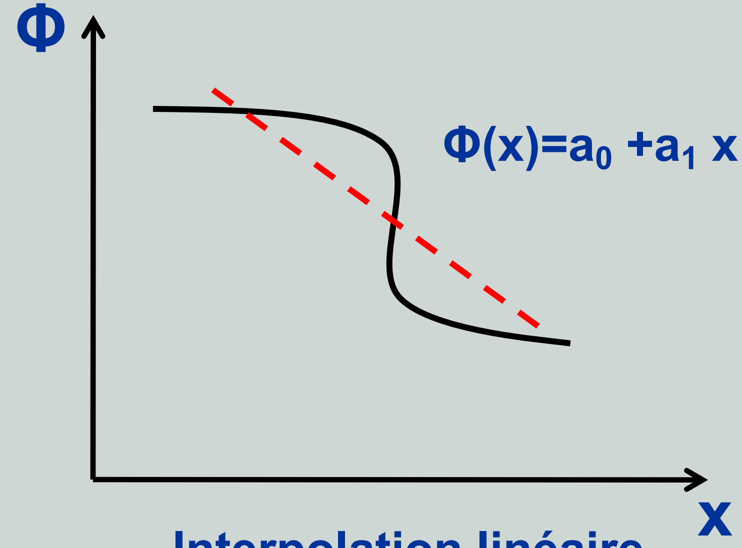
et

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \qquad avec \quad m = \left(\sum_{j=1}^{n+1} j(n+2-j) \right) - 1$$

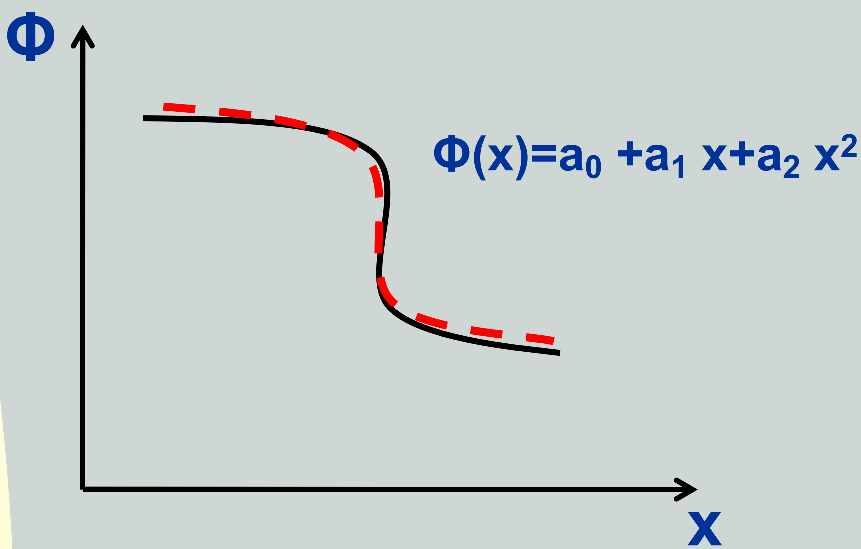
3.3.1 Degrés du polynôme.



Interpolation par constante



Interpolation linéaire



Interpolation quadratique

Aussi, interpolation cubique…

En fonction du degré du polynôme, on peut définir l'ordre de l'interpolation. Soit

Modèle linéaire:

Elément 1D $$u(x) = a_0 + a_1 x$$

Elément 2D $$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

Elément 3D $$u(x,y,z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

Modèle quadratique:

Elément 1D $$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Elément 2D $$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

Elément 3D $$u(x,y,z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 yz + a_7 xz + a_8 y^2 + a_9 z^2$$

Modèle Cubique:

Elément 1D

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Elément 2D

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy$$
$$+ a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3$$

Elément 3D

$$u(x, y, z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 x^2$$
$$+ a_5 xy + a_6 yz + a_7 xz + a_8 y^2 + a_9 z^2$$
$$+ a_{10} x^3 + a_{11} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{13} x^2 z$$
$$+ a_{14} xz^2 + a_{15} y^2 z + a_{16} yz^2 + a_{17} y^3$$
$$+ a_{18} z^3 + a_{19} xyz$$

3.3.2 Isotropie Géométrique

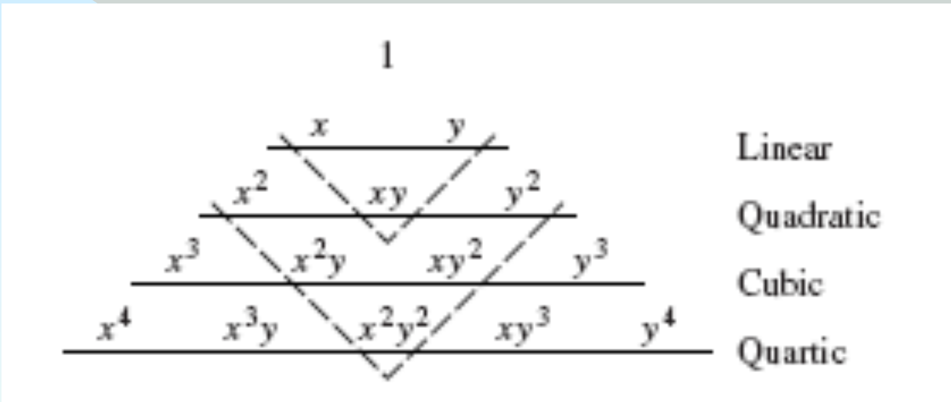
Le polynôme utilisé doit avoir le même nbr de **coefficient** que le nbr total de **DDL** de l'élément.

Aussi, pour élément complet, il faut que le polynôme contient les puissances jusqu'à « M-1 » si M est le DDL de l'élément.

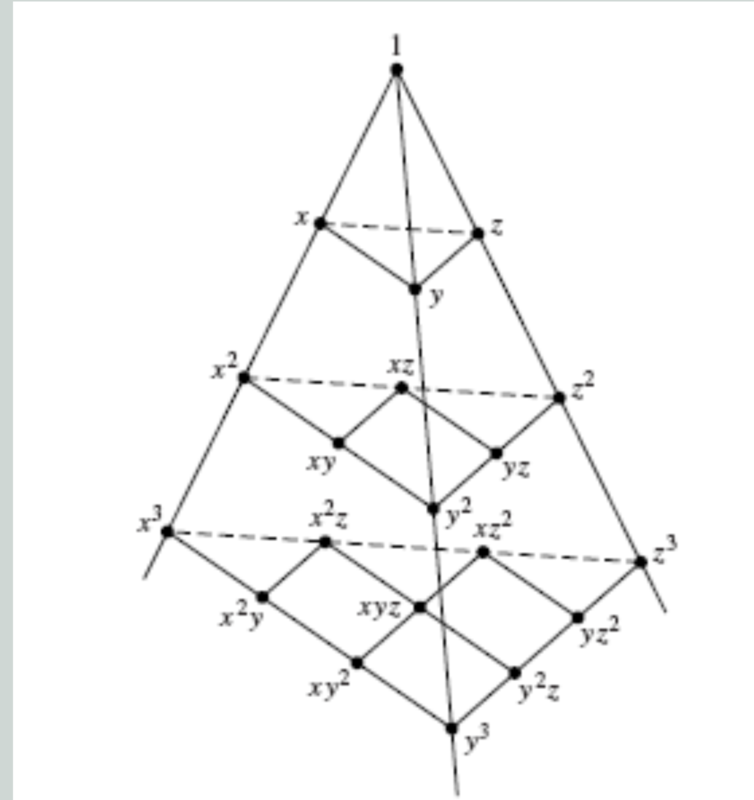
D'une façon générale: Polynôme satisfait la **compatibilité** et la **complétude** si le polynôme possède la propriété de l'**isotropie** géométrique.

Définition: une fonction mathématique admet une isotropie géométrique si la forme fonctionnelle ne change pas en changeant les directions des axes.

Choix des termes du polynôme.



Triangle de Pascal



Pyramide de Pascal

Remarque: Si le polynôme n'est pas complet, à la limite il faut considérer les termes représentant une certaine symétrie pour assurer l'isotropie (ligne en pointillé)

3.3.3 Polynôme exprimé aux nœuds de l'élément

Le but du choix de la fonction polynomiale est de pouvoir exprimer cette fonction aux nœuds de l'élément afin de déterminer les quantités inconnues aux DDL des nœuds à partir de l'équilibre du nœud.

Donc, si l'élément possède « M » nœuds, on a:

$$u(x,y,z)=\{\phi\}^T\{a\}=\begin{Bmatrix} u(noeud\,1) \\ u(noeud\,2) \\ \vdots \\ u(noeud\,m) \end{Bmatrix}$$

Ainsi à l'échelle de l'élément, on a:

$$\left\{u^{(e)}\right\} = \left\{\begin{matrix} \phi^T(noeud\,1) \\ \phi^T(noeud\,2) \\ \vdots \\ \phi^T(noeud\,m) \end{matrix}\right\}\{a\} = [\Phi]\{a\}$$

Où $[\Phi]: est\ une\ matrice\ carrée$

En inversant cette égalité, on aura:

$$\{a\}_{Mx1} = [\Phi]^{-1}_{MxM}\left\{u^{(e)}\right\}_{Mx1}$$

Alors la fonction polynomiale peut être exprimée en fonction des valeurs aux nœuds. soit

$$u(x,y,z)=\{\phi\}^T\{a\}=\{\phi\}^T_{1xM}[\Phi]^{-1}_{MxM}\{u^{(e)}\}_{Mx1}$$

La quantité:

$$[N]=\{\phi\}^T_{1xM}[\Phi]^{-1}_{MxM}$$ Fonction de forme

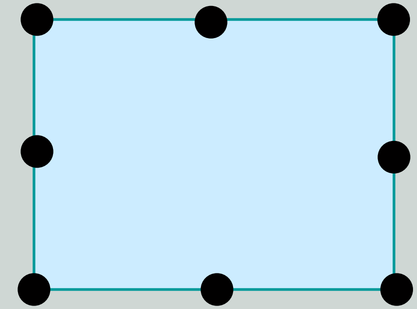
Propriétés de [N]

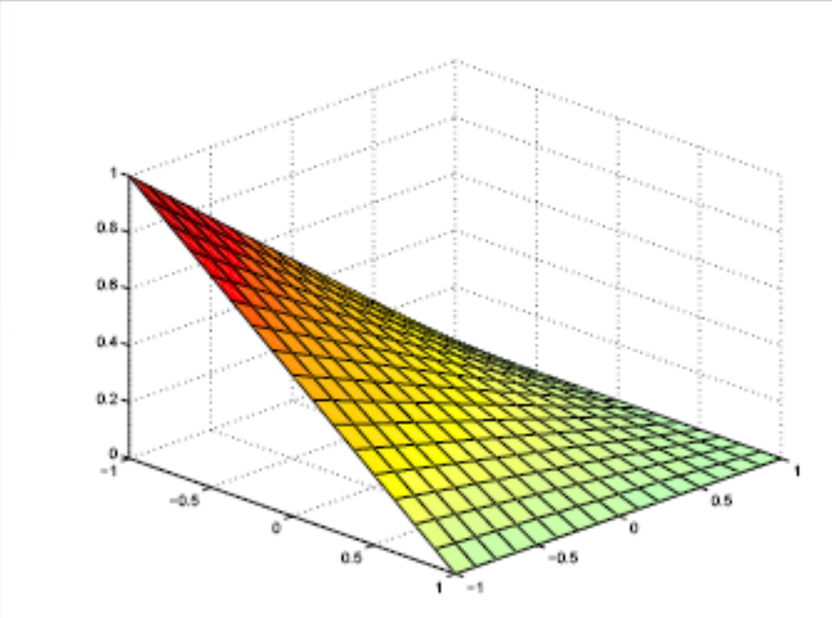
1. N_i =1 au nœud « i »

   N_i =0 pour tous les autres nœuds.

2. Pour le calcul de la fonction de forme, il faut conserver la forme fondamentale de la variation le long des cotés définie par les considérations de continuité (linéaire, quadratique, cubique suivant x, y et z.

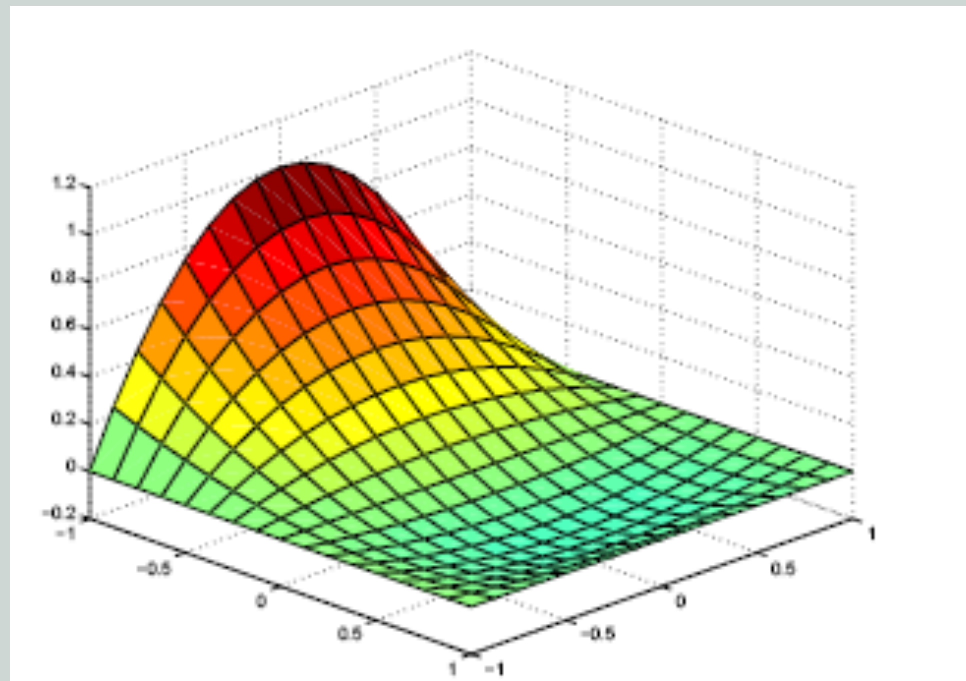
Exemple de fonction de forme





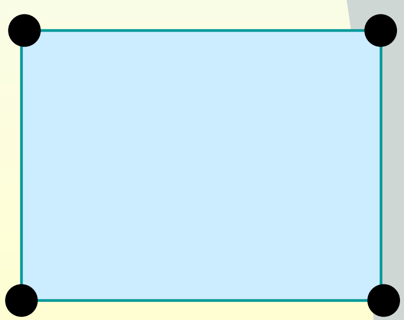
Variation quadratique

Nœud mi coté



Variation linéaire

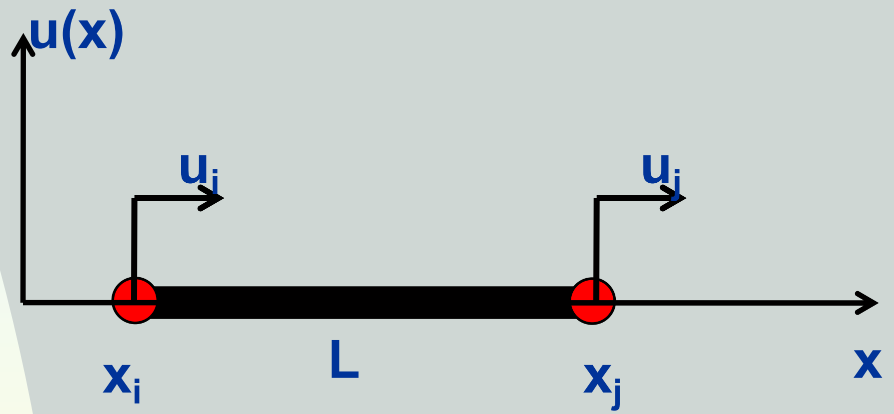
Nœud extrémité



3.3 Interpolation Linéaire

Permet de mieux comprendre l'utilisation des interpolations polynomiales.

Eléments 1D:



u_i et u_j sont les valeurs de la variable aux nœuds.

Fonction d'interpolation choisie est (linéaire):

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

On a au

Nœud « i » $u(x_i) = u_i = a_0 + a_1 x_i$

Nœud « j » $u(x_j) = u_j = a_0 + a_1 x_j$

02 équations à 02 inconnues, qui nous donne:

$$a_0 = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{L}$$

$$a_1 = \frac{u_j - u_i}{L}$$

$$\{a\} = \begin{bmatrix} x_j/L & -x_i/L \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$\{a\}_{2x1} = [\Phi]^{-1}_{2x2} \{u^{(e)}\}_{2x1}$$

En remplaçant la fonction u(x) devient:

$$u(x) = \{\phi\}^T \{a\} = \{\phi\}^T_{1x2} [\Phi]^{-1}_{2x2} \{u^{(e)}\}_{2x1}$$

$$u(x) = \left(\frac{u_i x_j - u_j x_i}{L} \right) + \left(\frac{u_j - u_i}{L} \right) x$$

En réarrangeant les termes, on aura:

$$u(x) = \frac{1}{L} \left[u_j (x - x_i) + u_i (x_j - x) \right]$$

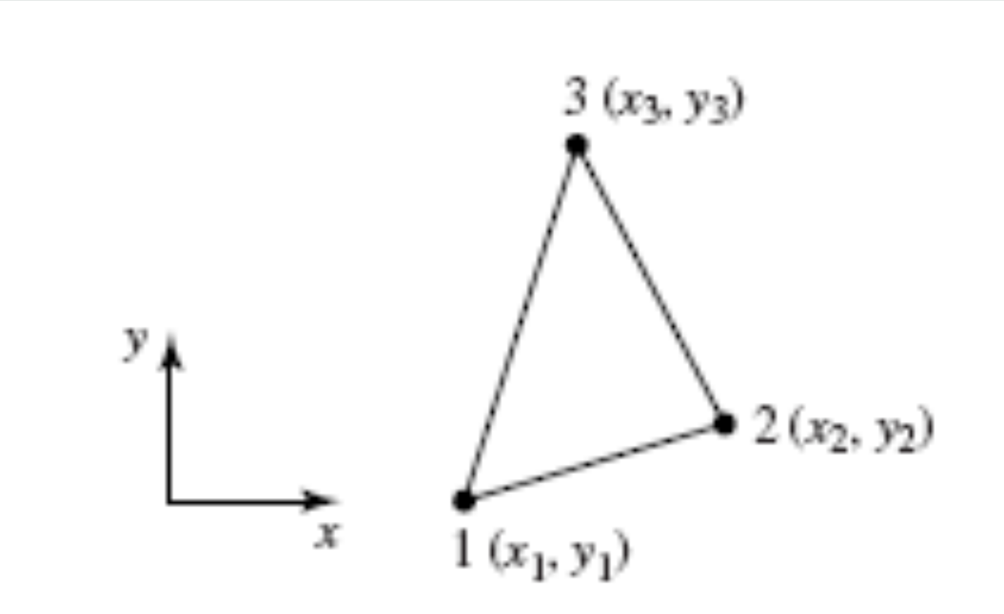
Avec:

$$N_i(x) = \frac{(x_j - x)}{L} \qquad N_j(x) = \frac{(x - x_i)}{L}$$

On a:

$$u(x) = N_i(x).u_i + N_j(x).u_j$$

Eléments 2D: (Elément triangulaire)



Les valeurs de la variable aux nœuds seront notées u_1 , u_2 et u_3 .

Fonction d'interpolation choisie est (linéaire):

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

On a au

Nœud « 1 » $$u(x_1, y_1) = u_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1$$

Nœud « 2 » $$u(x_2, y_2) = u_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2$$

Nœud « 3 » $$u(x_3, y_3) = u_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3$$

Ou bien:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ u^{(e)} \right\}_{3x1} = [\Phi]_{3x3} \{a\}_{3x1}$$

03 équations à 03 inconnues, qui nous donne:

$$a_0 = \frac{1}{2A}\left[u_1\left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right) + u_2\left(x_3 y_1 - x_1 y_3\right) + u_3\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2A}\left[u_1\left(y_2 - y_3\right) + u_2\left(y_3 - y_1\right) + u_3\left(y_1 - y_2\right)\right]$$

$$a_2 = \frac{1}{2A}\left[u_1\left(x_3 - x_2\right) + u_2\left(x_1 - x_3\right) + u_3\left(x_2 - x_1\right)\right]$$

$$\{a\}_{3x1} = [\Phi]^{-1}_{3x3}\left\{u^{(e)}\right\}_{3x1}$$

A est l'aire du triangle égale à:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

En remplaçant la fonction u(x) devient:

$$u(x,y)=\{\phi\}^T\{a\}=\{\phi\}^T_{1x3}[\Phi]^{-1}_{3x3}\{u^{(e)}\}_{3x1}$$

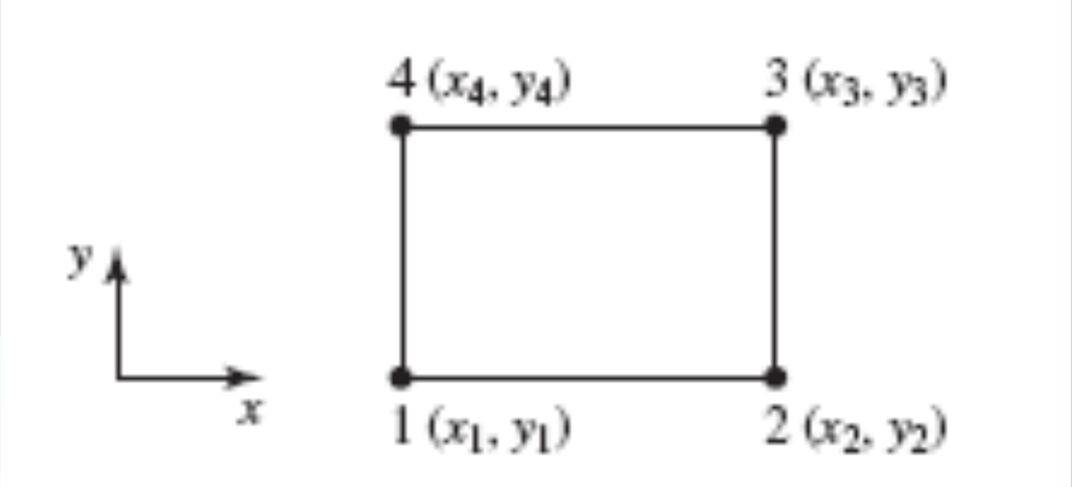
En réarrangeant les termes, on aura:

$$u(x,y)=\frac{1}{2A}\left\{\begin{array}{l}\left[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\right]u_1\\+\left[(x_3y_1-x_1y_3)+(y_3-y_1)x+(x_1-x_3)y\right]u_2\\+\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right]u_3\end{array}\right\}$$

Soit:

$$u(x,y)=N_1(x,y).u_1+N_2(x,y).u_2+N_3(x,y).u_3$$

Eléments 2D: (Elément rectangulaire)



Les valeurs de la variable aux nœuds seront notées u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

Fonction d'interpolation choisie (symétrie) est (linéaire):

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$$

On a au

Nœud « 1 » $u(x_1, y_1) = u_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 x_1 y_1$

Nœud « 2 » $u(x_2, y_2) = u_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 x_2 y_2$

Nœud « 3 » $u(x_3, y_3) = u_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 x_3 y_3$

Nœud « 3 » $u(x_4, y_4) = u_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 y_4 + a_3 x_4 y_4$

Ou bien:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{u^{(e)}\right\}_{4x1} = \left[\Phi\right]_{4x4} \left\{a\right\}_{4x1}$$

04 équations à 04 inconnues, qui nous donne:

$$\{a\}_{4x1} = [\Phi]_{4x4}^{-1} \left\{u^{(e)}\right\}_{4x1}$$

Pour remplacer dans la fonction u(x,y), il faut:

$$u(x,y) = \{\phi\}^T \{a\} = \{\phi\}_{1x4}^T [\Phi]_{4x4}^{-1} \left\{u^{(e)}\right\}_{4x1}$$

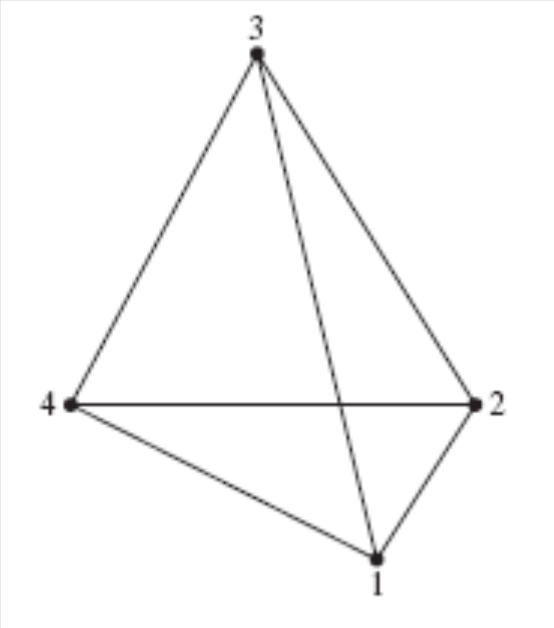
Soit:

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Ou:

$$u(x,y) = N_1(x,y).u_1 + N_2(x,y).u_2 + N_3(x,y).u_3 + N_4(x,y).u_4$$

Eléments 3D: (Elément Tétraèdre)



Les valeurs de la variable aux nœuds seront notées u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

Fonction d'interpolation choisie (symétrie) est (linéaire):

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

On a au

Nœud « 1 » $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1$

Nœud « 2 » $u(x_2, y_2, z_2) = u_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 z_2$

Nœud « 3 » $u(x_3, y_3, z_3) = u_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 z_3$

Nœud « 3 » $u(x_4, y_4, z_4) = u_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 y_4 + a_3 z_4$

Ou bien:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{u^{(e)}\right\}_{4x1} = [\Phi]_{4x4} \{a\}_{4x1}$$

04 équations à 04 inconnues, qui nous donne:

$$\{a\}_{4x1} = [\Phi]^{-1}_{4x4} \{u^{(e)}\}_{4x1}$$

Pour remplacer dans la fonction u(x,y,z), il faut:

$$u(x,y) = \{\phi\}^T \{a\} = \{\phi\}^T_{1x4} [\Phi]^{-1}_{4x4} \{u^{(e)}\}_{4x1}$$

Soit:

$$u(x,y,z) = [1 \quad x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Ou:

$$u(x,y,z) = N_1(x,y,z).u_1 + N_2(x,y,z).u_2 + N_3(x,y,z).u_3 + N_4(x,y,z).u_4$$

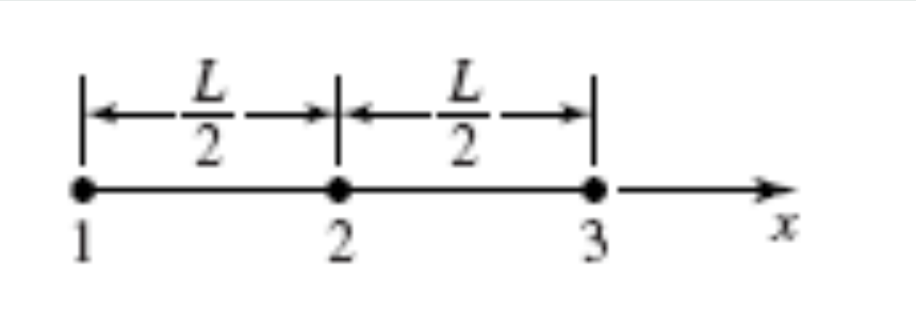
3.4 Interpolation d'ordre supérieur

Le degré du polynôme d'interpolation peut être d'ordre **supérieur** à « 1 » pour n'importe quel type d'éléments.

Il est judicieux d'ajouter des **nœuds intermédiaires** aux cotés de l'élément.

3.4.1 Interpolation Quadratique

Eléments 1D:



03 Nœuds

01 DDL/noeud

Fonction d'interpolation choisie est (quadratique):

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Les valeurs de la variable aux nœuds u_1 , u_2 et u_3 (à x=0, x=L/2 et x=L) .

En suivant la même procédure, on aura:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{u^{(e)}\right\}_{3x1} = \left[\Phi\right]_{3x3} \left\{a\right\}_{3x1}$$

En inversant, on aura:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L & 4/L & -1/L \\ 2/L^2 & -4/L^2 & 2/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

La fonction d'interpolation sera alors:

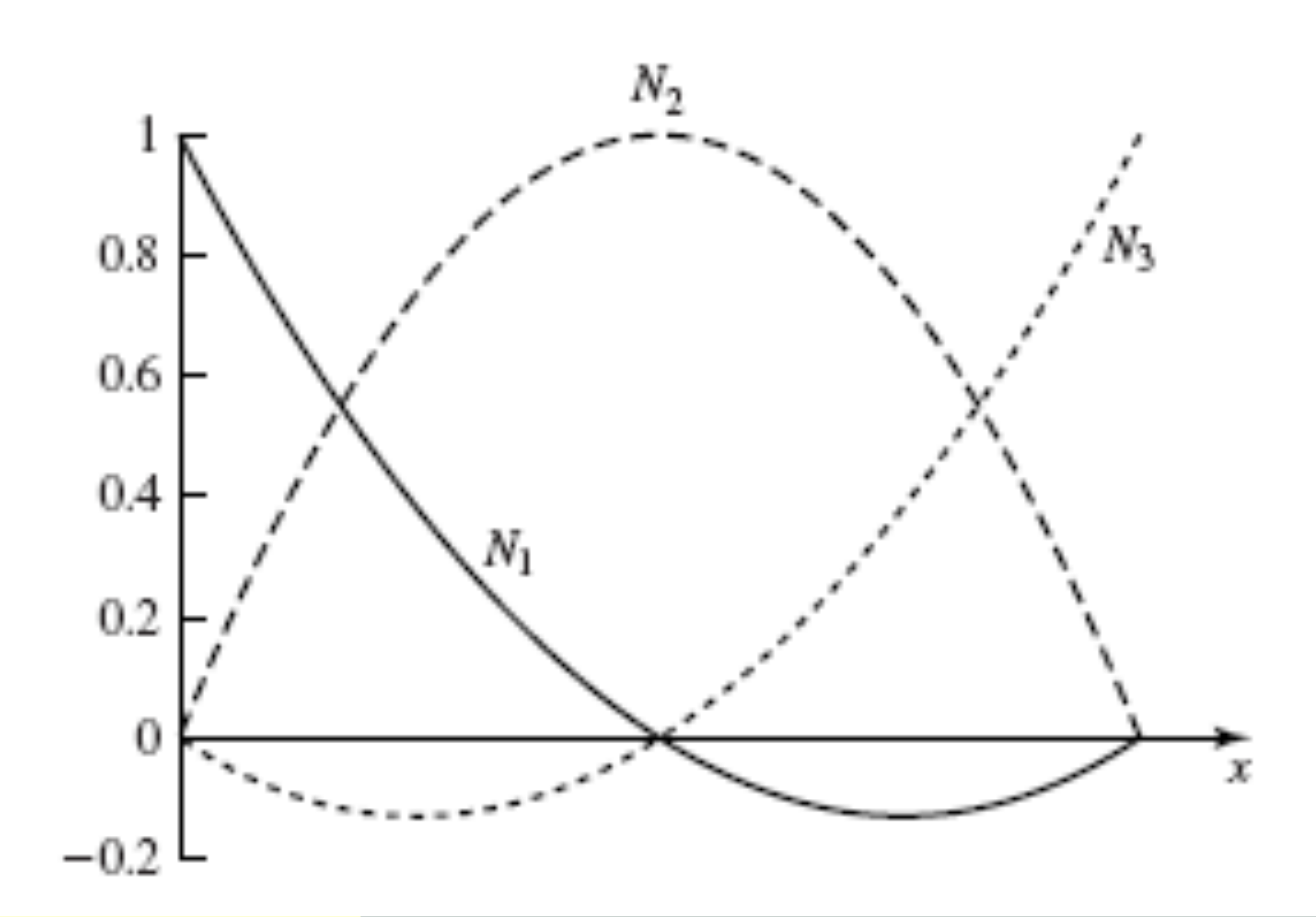
$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L & 4/L & -1/L \\ 2/L^2 & -4/L^2 & 2/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u(x) = N_1(x).u_1 + N_2(x).u_2 + N_3(x).u_3$$

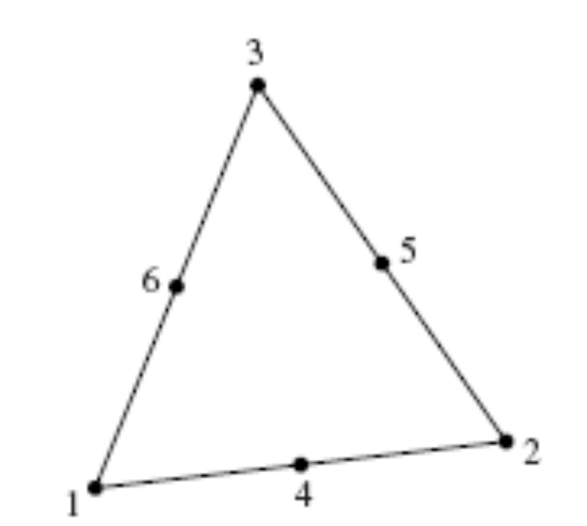
Avec:

$$N_1(x) = 1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2 \qquad N_2(x) = \frac{4x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad N_3(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)$$

Représentation graphique des fonctions de forme N_i :



Eléments 2D: (06 nœuds triangulaires)



06 Nœuds

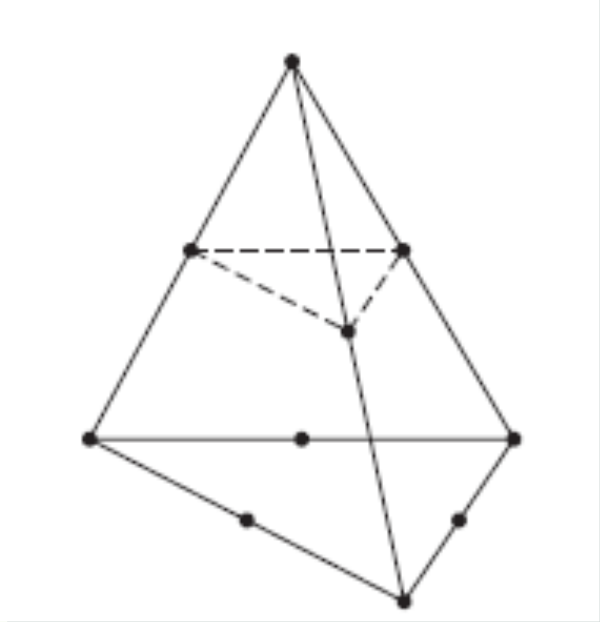
01 DDL/noeud

Fonction d'interpolation choisie est (quadratique):

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

Les valeurs de la variable aux nœuds u_1 , u_2 , u_3 , u_4 ,u_5 et u_6.

Eléments 3D: (10 nœuds tétraèdre)



10 Nœuds

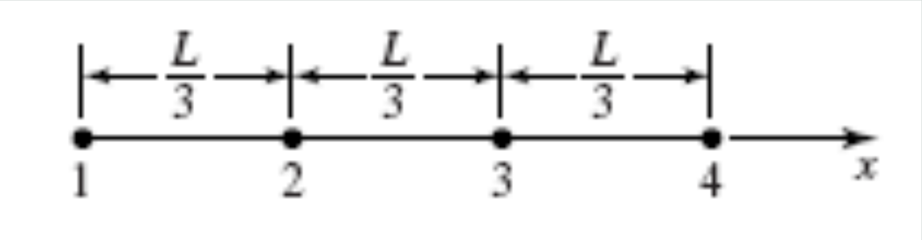
01 DDL/noeud

Fonction d'interpolation choisie est (quadratique):

Utiliser 10 termes du polynôme.

3.4.2 Interpolation cubique

Eléments 1D:



04 Nœuds

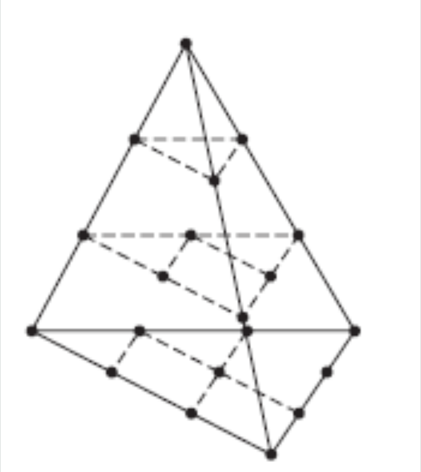
01 DDL/noeud

Eléments 2D:

10 Nœuds

01 DDL/noeud

Eléments 3D:



20 Nœuds

01 DDL/noeud

Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Les techniques d'Approximation

COURS 4 **Mardi 26.05.2009**

Merci. **Fin du chapitre 3**