Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 5

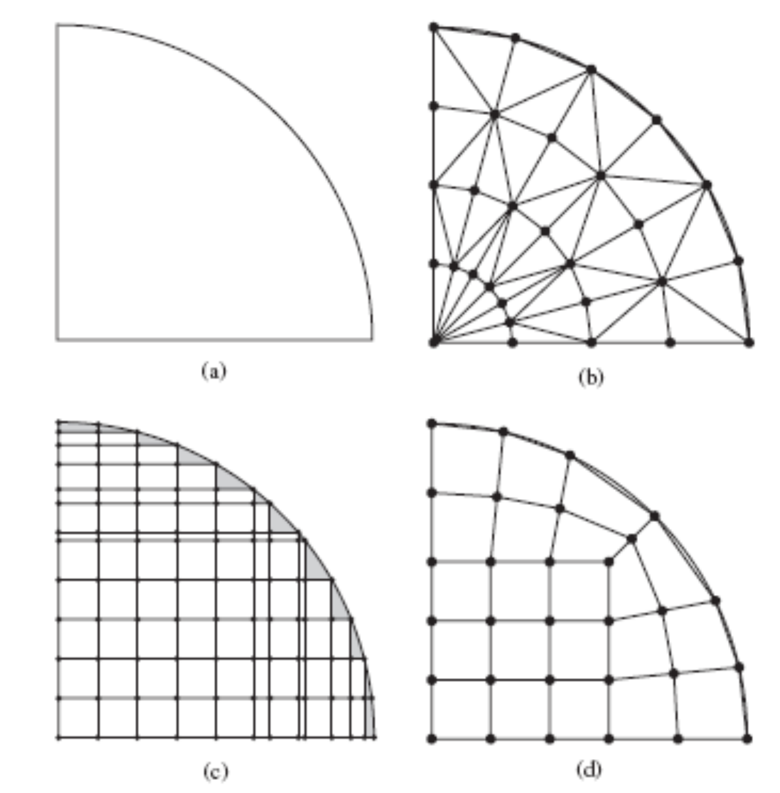
Les Eléments Isoparamétriques

COURS 5 Dimanche 31.05.2009

5.1 Introduction

En général les pbs dont les frontières ne sont pas droites (**courbes**) ne peuvent pas être bien modélisés en utilisant les éléments de cotés droits.

La famille des éléments **isoparamètriques** répond à ce besoin.



L'idée de base:

Interpoler les coordonnées généralisées en utilisant les mêmes fonctions d'interpolation que celles de la variable (u).

Il faut tout d'abord définir un repère local ou naturel pour chaque élément.

On exprime les fonctions d'interpolation ou de forme en termes de ces cordonnées naturelles.

Les coordonnées naturelles sont (-1 à +1)

Ainsi on peut transformer une forme géométrique régulière (triangles, rectangles) à **cotés droits** en formes tordues (**cotés courbes**).

En général, on a (avec « k= nbr de nœud de l'élément):

$$\{X\} = \sum_{k=1}^{n} \phi_k X_k \qquad avec \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad et \quad \{X_k\} = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}$$

Or on a:

Ainsi

$$\{u\} = \sum_{k=1}^{n} N_k u_k$$

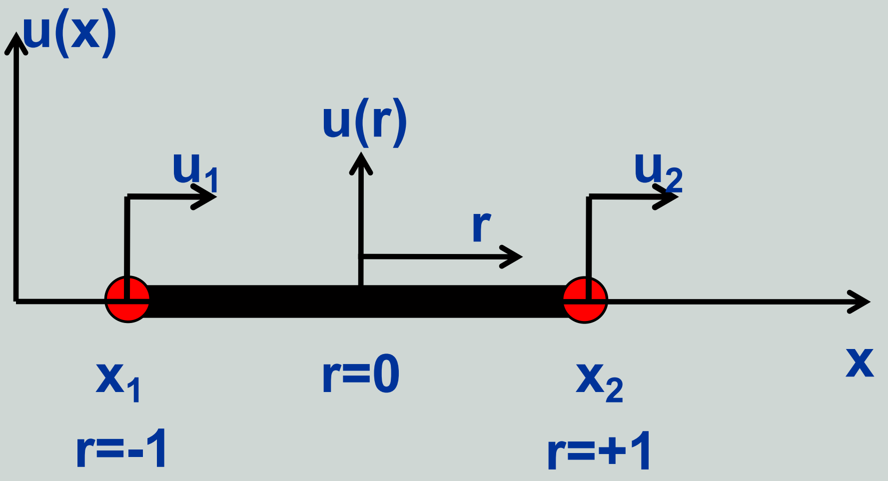
Si Φ_k et N_k sont les mêmes Elem. **Isoparamètriques.**

Si ordre de $\Phi_k > N_k$ Elem. **Superparamètriques.**

Si ordre de $\Phi_k < N_k$ Elem. **Subparamètriques.**

Exemple simple

Considérons l'élément simple 1D à 02 nœuds et 01 DDL/nœud.



X: Coordonnée globale.

r : Coordonnée naturelle.

La relation entre « X » et « r » est définie comme suit:

$$X = \frac{1}{2}(1-r)x_1 + \frac{1}{2}(1+r)x_2$$

En posant:

$$N_1(r) = \frac{1}{2}(1-r) \qquad N_2(r) = \frac{1}{2}(1+r)$$

On aura:

$$X = \sum_{i=1}^{2} N_i x_i$$

Et la fonction variable sera défini par (les mêmes fonctions d'interpolation):

$$u = \sum_{i=1}^{2} N_i u_i$$

On peut calculer la 1ère dérivée dans le nouveau repère:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1(r)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(r)}{dx} u_2 = \frac{dN_1(r)}{dr}\frac{dr}{dx} u_1 + \frac{dN_2(r)}{dr}\frac{dr}{dx} u_2$$

Or: $$\frac{dr}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dr}$$

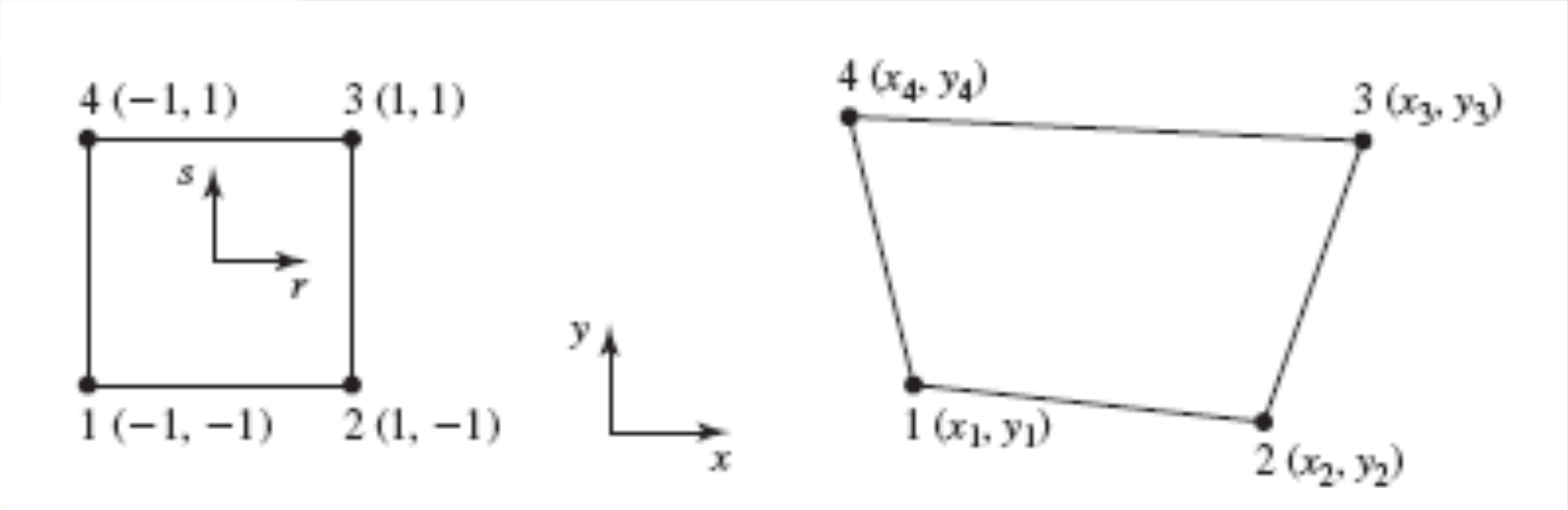
Et: $$\frac{dx}{dr} = \frac{dN_1(r)}{dr} x_1 + \frac{dN_2(r)}{dr} x_2 = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right) = \frac{L}{2}$$

Ainsi:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2 = \frac{\left(u_2 - u_1\right)}{L}$$

5.2 Formulation générale

Pour pouvoir généraliser la théorie, nous considérons comme exemple, l'élément rectangulaire à 2D.



Les coordonnées d'un élément bidimensionnel sont comme suit:

$$x = \sum_{i=1}^{q} N_i x_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{q} N_i y_i$$

q: nbr de nœud de l'élément (ici = 4)

x,y: coordonnées locales de n'importe quel point de l'élément.

x_i et y_i : coordonnées des nœuds de l'élément.

N_i : Fonctions d'interpolation définies dans le système de coordonnées naturelles de l'élément (r,s) variant de « -1 » à « +1 »

Puisque les fonctions d'interpolation de la variable prennent les valeurs de « 1 » et « 0 », on va les utiliser pour interpoler les coordonnées

La relation entre « r,s » et « x,y » pour le rectangle est comme suit:

$$r = \frac{x - \bar{x}}{a} \quad et \quad s = \frac{y - \bar{y}}{b}$$

Avec: « 2a » et « 2b » dimensions du rectangle, et

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad et \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Sachant que les N_i = 1 en « i » et « 0 » ailleurs, on aura:

$$N_1(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \qquad N_3(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_2(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \qquad N_4(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

Les fonctions variables sont interpolées de la meme manière:

$$u = \sum_{i=1}^{q} N_i u_i$$

Souvent on a besoin de dériver les variables par rapport aux coordonnées. Il faut donc transformer ces dérivées d'un repère à un autre:

Puisque $x=f_1\,(r,s)$ et $y=f_2\,(r,s)$ on aura:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

Les quantités $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial x}\, et\, \frac{\partial s}{\partial y}$ sont généralement inconnues.

On passe par l'inverse de ceci.

Sachant que r=g_1 (x,y) et s=g_2 (x,y)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

En notation matricielle, on a:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Ou bien

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial R} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \right\}$$

Où: [J] est appelée Jacobian

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial R} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \right\}$$

En inversant, on aura:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial X}\right\} = [J]^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\right\}$$

J^{-1} existe car il ya une correspondance unique entre les coordonnées naturelles et locales de l'élément.

Remarque:

Dans certains cas rares (élément tordu ou bien élément tourné sur lui même), le jacobian peut être singulier

Dans notre cas (rectangle à 04 nœuds) le jacobian sera:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial r}x_i=-\frac{1}{4}(1-s)x_1+\frac{1}{4}(1-s)x_2+\frac{1}{4}(1+s)x_3-\frac{1}{4}(1+s)x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial r}y_i=-\frac{1}{4}(1-s)y_1+\frac{1}{4}(1-s)y_2+\frac{1}{4}(1+s)y_3-\frac{1}{4}(1+s)y_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial s}x_i=-\frac{1}{4}(1-r)x_1-\frac{1}{4}(1+r)x_2+\frac{1}{4}(1+r)x_3+\frac{1}{4}(1-r)x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial s}y_i=-\frac{1}{4}(1-r)y_1-\frac{1}{4}(1+r)y_2+\frac{1}{4}(1+r)y_3+\frac{1}{4}(1-r)y_4$$

Ainsi, au point r=r_i et s=s_j on a la relation suivante:

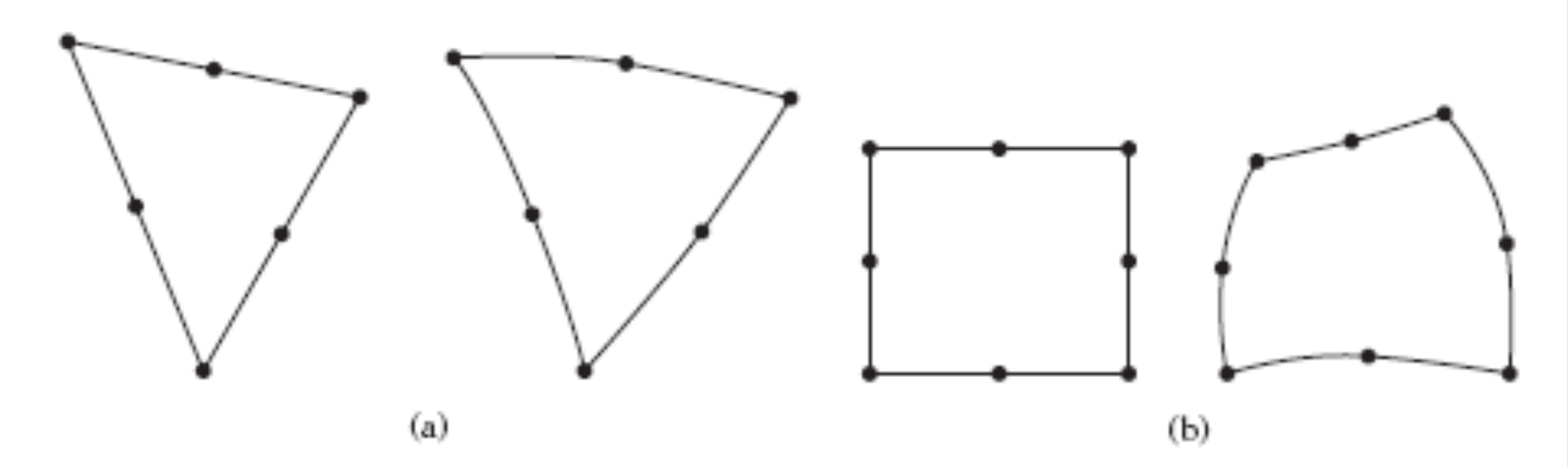
$$\left\{\frac{\partial}{\partial X}\right\}_{\substack{r=r_i\\ s=s_j}} = \left[J_{ij}\right]^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\right\}_{\substack{r=r_i\\ s=s_j}}$$

Et plus particulièrement pour la fonction variable, on a:

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial X}\right\}_{\substack{r=r_i\\ s=s_j}} = \left[J_{ij}\right]^{-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial R}\right\}_{\substack{r=r_i\\ s=s_j}}$$

5.3 Elément isoparamètrique d'ordre élevé

La formulation isoparametrique peut être étendue à des éléments d'ordre supérieur (quadratique ou cubique).

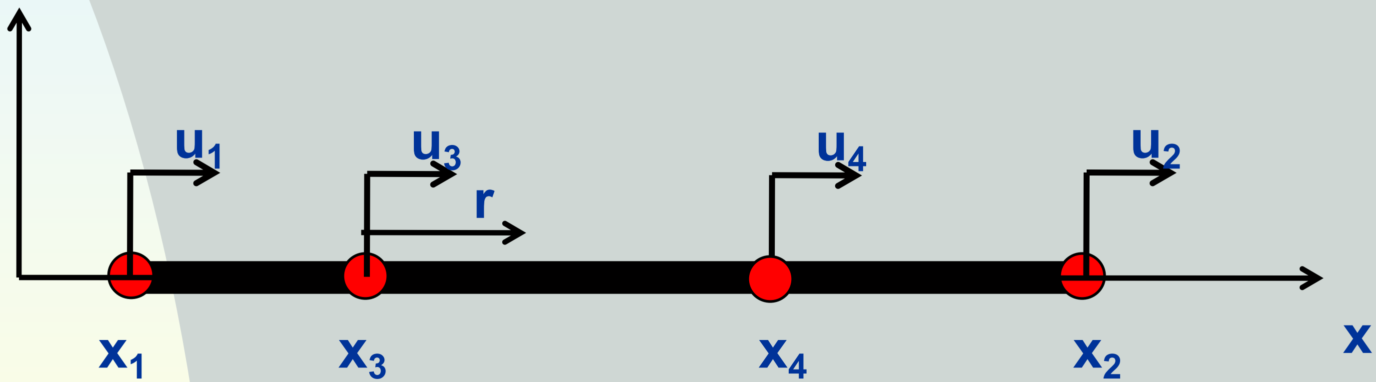


Elément isoparametrique quadratique avec élément de base

Comment construire les fonctions de forme ?

Pour les éléments d'ordre supérieur, elles se construisent à partir des fonctions de base

Elément 1D. Elément à nœuds variables (2 à 4)



Cas de 3 nœuds	r=-1	r=0		r=+1
Cas de 4 nœuds	r=-1	r=-1/3	r=+1/3	r=+1

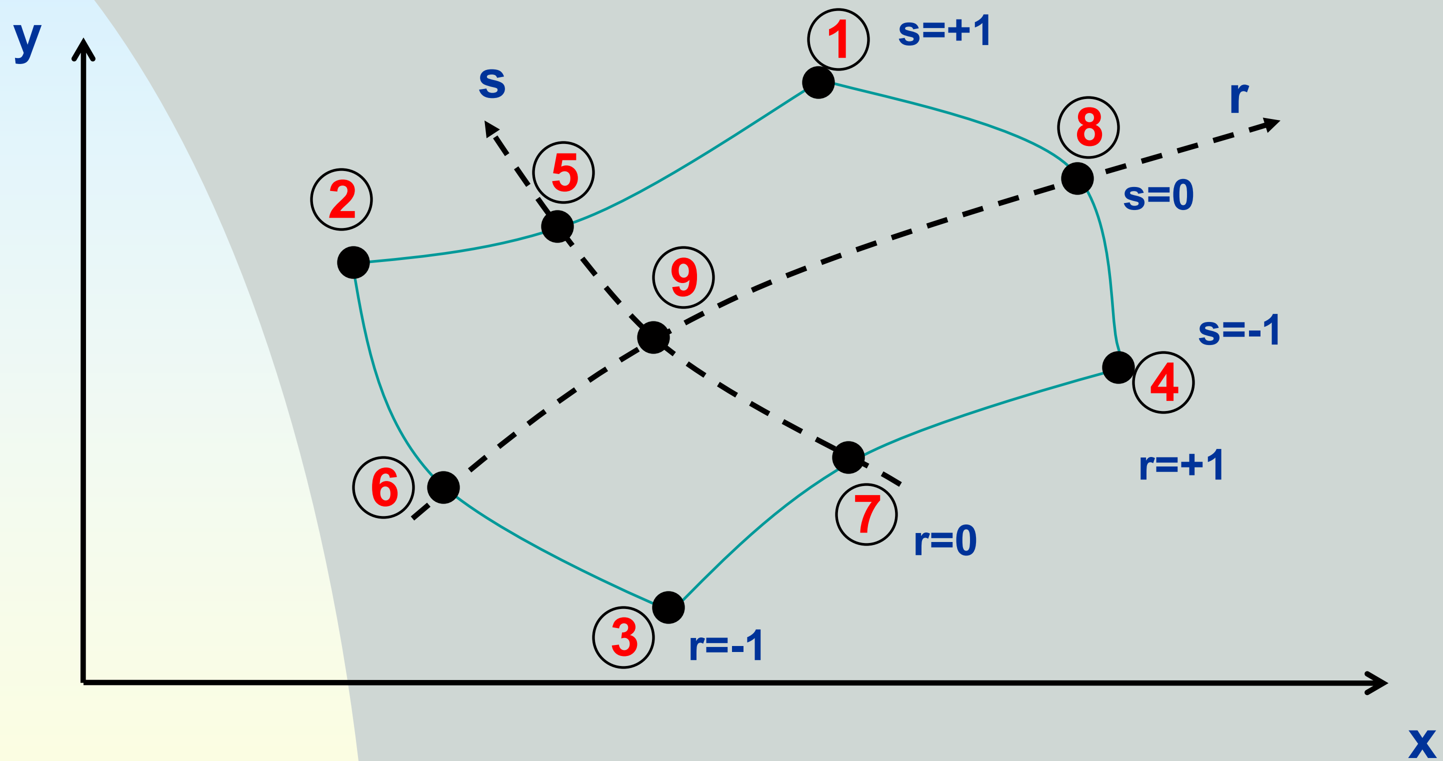
Les fonctions de forme, dans ce cas seront:

	Ajouter seulement si Nœud « 3 » est présent	Ajouter seulement si Nœuds « 3 » et « 4 » sont présent
$N_1=\frac{1}{2}(1-r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$	$\frac{1}{16}(-9r^3+r^2+9r-1)$
$N_2=\frac{1}{2}(1+r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$	$\frac{1}{16}(9r^3+r^2-9r-1)$
$N_3=(1-r^2)$		$\frac{1}{16}(27r^3+7r^2-27r-7)$
$N_4=\frac{1}{16}(-27r^3-9r^2+27r+9)$		

Les nœuds « 1 » et « 2 » sont les nœuds de **base** et les nœuds « 3 » et « 4 » sont les nœuds **intermédiaires**.

Technique **très pratique**, surtout pour éléments à nœuds variables

Elément 2D. Elément à nœuds variables (4 à 9)



	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$-\frac{1}{4}N_9$
$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$-\frac{1}{4}N_9$
$N_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_6 = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_8 = \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_9 = (1-r^2)(1-s^2)$					

5.4 Intégration Numérique

EF nécessite le calcul d'intégrales en1D, 2D ou 3D.

Soit:

$$\int F(r)dr \quad \text{Ou} \quad \iint F(r,s)drds \quad \text{Ou} \quad \iiint F(r,s,t)drdsdt$$

Le calcul de ces intégrales se fait numériquement. Pour cela, elles sont remplacées par des sommations. Soit:

$$\int F(r)dr = \sum_i \alpha_i F(r_i) + R_n$$

$$\iint F(r,s)drds = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} F\left(r_i, s_j\right) + R_n$$

$$\iiint F(r,s,t)drdsdt = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_{ijk} F\left(r_i, s_j, t_k\right) + R_n$$

Avec:

$\alpha_i, \alpha_{ij}\ et\ \alpha_{ijk}$ Sont des coefficients de pondération

$F(r_i, s_j, t_k)$ Valeurs des fonctions aux points considérés

R_n Erreur commise (non calculée généralement)

Plusieurs méthodes ont été proposées en éléments finis. La plus utilisée est la

méthode d'intégration de Gauss

5.4.1 Intégration par polynômes

Supposons que F(r) est définie en « n+1 » points.
(F_0 , F_1 , …, F_n)

On tracera le polynôme

$$\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^n$$

Qui passera exactement par les points: $r_0, r_1, \ldots, r_n$

Alors: aux « n+1 » points, les 02 fonctions sont égales

Soit:

$$F_0 = a_0 + a_1 r_0 + a_2 r_0^{\,2} + \ldots + a_n r_0^{\,n}$$

$$F_1 = a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^{\,2} + \ldots + a_n r_1^{\,n}$$

$$\vdots$$

$$F_n = a_0 + a_1 r_n + a_2 r_n^{\,2} + \ldots + a_n r_n^{\,n}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \cdots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \cdots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \cdots & r_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{F\} = [V]\{a\}}$$

$[V]$ **Matrice de Vondermonde**

Une méthode importante pour déterminer $\psi(r)$ consiste à utiliser l'interpolation de **Lagrange**. On a

$$l_j(r) = \frac{(r - r_0)(r - r_1)\dots(r - r_{j-1})(r - r_{j+1})\dots(r - r_n)}{(r_j - r_0)(r_j - r_1)\dots(r_j - r_{j-1})(r_j - r_{j+1})\dots(r_j - r_n)}$$

$$l_j(r) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dans ce cas:

$$\psi(r) = F_0 l_0(r) + F_1 l_1(r) + F_2 l_2(r) + \dots + F_n l_n(r)$$

Exemple.

Calculer le polynôme d'interpolation $\psi(r)$ pour la fonction ci-dessous avec les données suivantes:

$$F(r) = 2^r - r \qquad r_0 = 0;\ r_1 = 1\ \ et\ \ r_2 = 3$$

Ainsi, pour

$$r_0 = 0 \quad F_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = 1 \quad F_1 = 1 \quad ; \quad r_2 = 3 \quad F_2 = 5$$

En utilisant la matrice de **Vandermonde**, on aura:

$$\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Solution

$$a_0 = 1;\ a_1 = -2/3\ \ et\ \ a_2 = 2/3$$

$$\psi(r) = 1 - \frac{2}{3} r + \frac{2}{3} r^2$$

Si on utilise l'interpolation de **Lagrange**, on aura:

$$\psi(r) = (1)\frac{(r-1)(r-3)}{(-1)(-3)} + (1)\frac{(r)(r-3)}{(1)(-2)} + (5)\frac{(r)(r-1)}{(3)(2)}$$

On obtiendra la même forme de polynôme.

$$\psi(r) = 1 - \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}r^2$$

5.4.2 Formules de Newton Cotes

Connaissant $\psi(r)$ on peut calculer l'intégrale:

$$\int_a^b F(r)dr$$

L'intégration de **Newton-Cotes** suppose que les points choisis de « F » sont **équidistants**. On définit alors:

$$r_0 = a \qquad r_n = b \qquad \text{et} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

En utilisant l'interpolation de **Lagrange**, on aura:

$$\int_a^b F(r)dr = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \int_a^b l_i(r)dr \right\} F_i + R_n$$

Ou bien:

$$\int_a^b F(r)dr = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^n F_i + R_n$$

n	C_0^n	C_1^n	C_2^n	...
1	1/2	½		
2	1/6	4/6	1/6	
3	1/8	3/8	3/8	1/8
…				

Sont les constantes de Newton-cotes donnés directement par les tableaux.

Si n=1 méthodes des trapèzes

Si n=2 méthode de Simpson

Exemple.

Calculer les constantes de Newton-Cotes lorsque le polynôme d'interpolation est d'ordre « 2 ».

On a

$$\int_a^b F(r)dr = \sum_{i=0}^{2} \left\{ \int_a^b l_i(r)dr \right\} F_i$$

$$\int_a^b F(r)dr = \int_a^b \left[F_0 \frac{(r-r_1)(r-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} + F_1 \frac{(r-r_0)(r-r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} + F_2 \frac{(r-r_0)(r-r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)} \right] dr$$

Calculer les constantes de Newton-Cotes lorsque le polynôme d'interpolation est d'ordre « 2 ».

On a

$$\int_a^b F(r)dr = \sum_{i=0}^{2} \left\{ \int_a^b l_i(r)dr \right\} F_i$$

Sachant que:

$r_0 = a;\ r_1 = a + h\ et\ \ r_2 = a + 2h$ **avec** $h = \dfrac{b-a}{n}$

On a:

$$\int_a^b F(r)dr = \frac{b-a}{6}(F_0 + 4F_1 + F_2)$$

Simpson

5.4.3 Intégration de Gauss

Les méthodes précédentes utilisent des valeurs de fonctions en des points **équidistants**.

En EF, les points sont **qlq**.

Il faut donc essayer d'optimiser les positions des points pour donner le **max. de précision**.

C'est l'idée de la méthode de **Gauss**.

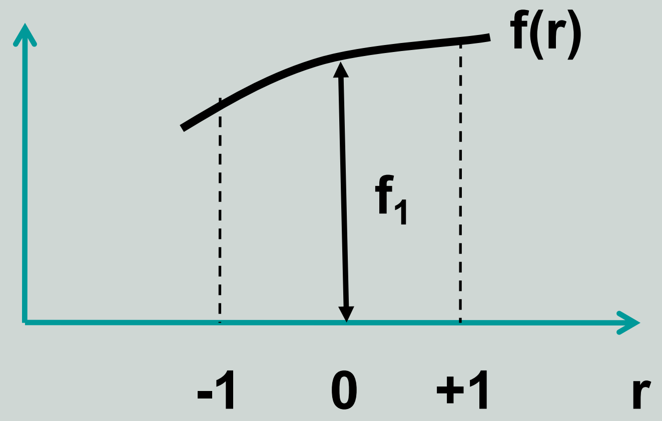
La plus utilisée en EF

Principe

Considérons le cas unidimensionnel. Soit à calculer:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(r)dr$$

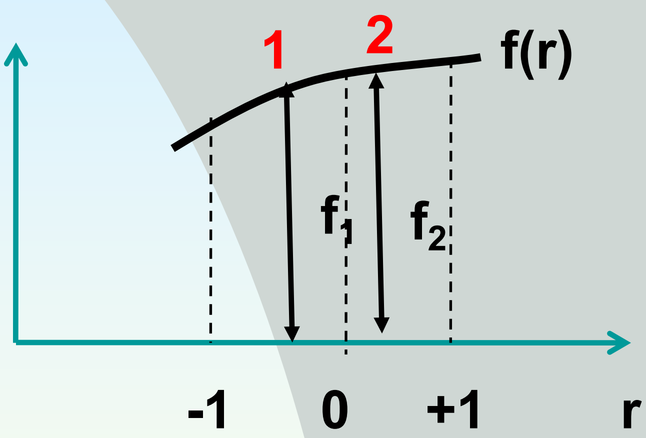
On peut évaluer « I » au milieu de l'intervalle



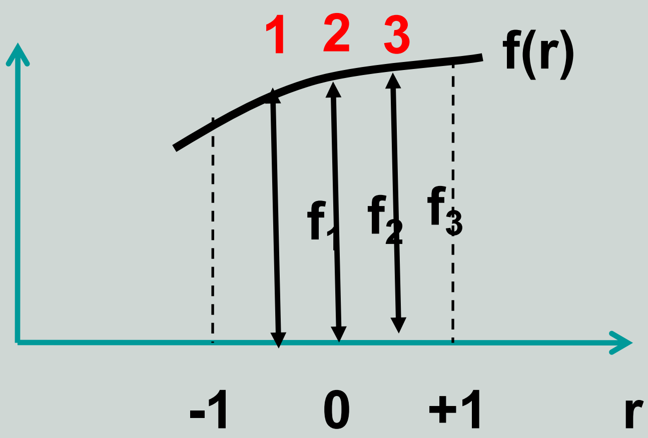
On a:

Le résultat sera exacte si f(r) est une droite. D'où $I=2f_1$

On peut utiliser plusieurs points



02 Points



03 Points

En généralisant, on peut écrire

$$I = \int_a^b f(r)dr = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(r_i) = \alpha_1 f(r_1) + \alpha_2 f(r_2) + \ldots + \alpha_n f(r_n)$$

Avec

α_i Coefficients de pondération associé au point « i »

n : Nombre de points utilisés

Gauss: Position des Points **bien choisie** pour avoir une bonne précision

Généralement disposés **symétriquement** % au centre de l'intervalle.

Donnés dans des tableaux avec leurs coef.

Nbr Points	r_i	α_i
1	$r_1 = 0.000$	2.000
2	r_1 , $r_2 = \pm 0.57735$	1.000
3	r_1 , $r_3 = \pm 0.57735$ $r_2 = 0.000$	0.55555 0.88888
…		

Ainsi, par exemple, si on utilise 03 points, on aura

$$I = 0.5555 f(r_1) + 0.8888 f(r_2) + 0.5555 f(r_3)$$

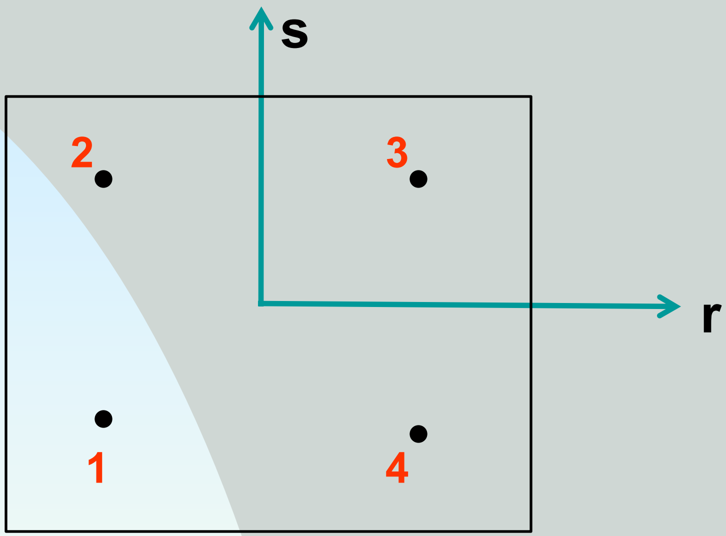
En général, l'intégration de Gauss utilisant « n » points donne un résultat exacte si la fonction à intégrer est d'ordre « n-1 » et moins

La généralisation au 2D et 3D est simple. Soit

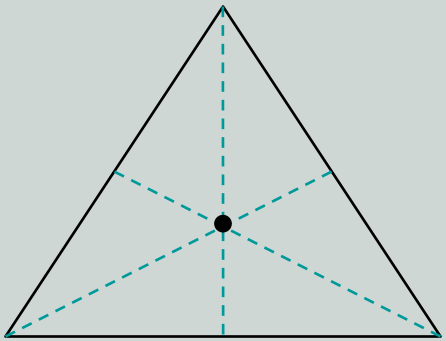
$$\iint f(r,s)\,dr\,ds = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j f(r_i, s_j)$$

$$\iiint f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \alpha_j \alpha_k f(r_i, s_j, t_k)$$

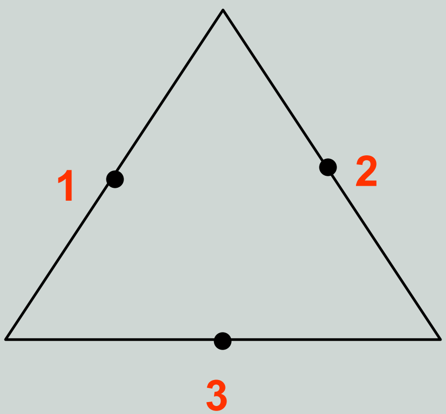
Points de Gauss en éléments finis



04 Pts de Gauss
« n=4 »

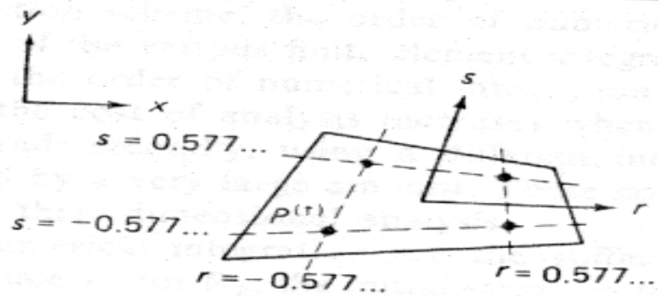
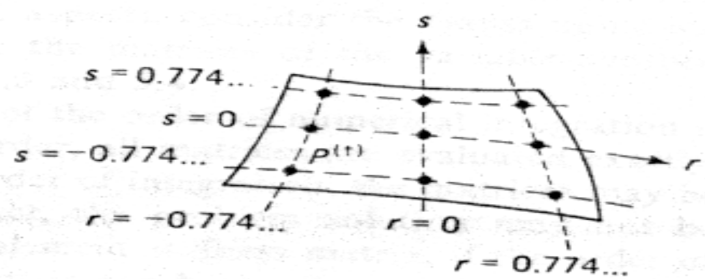
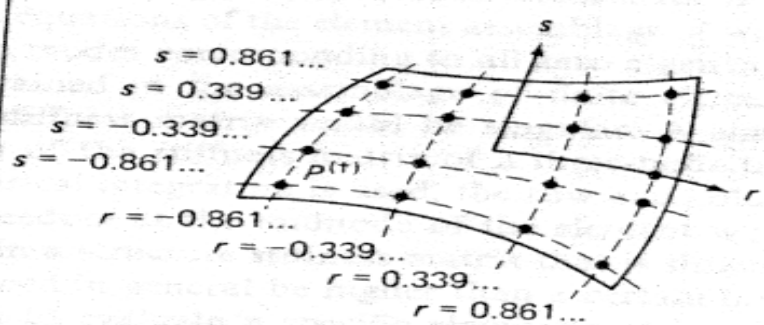


n=1



n=3

Points de Gauss en éléments finis

Integration order	Degree of precision	Location of integration points
2×2	3	
3×3	5	
4×4	7	

(†) The location of any integration point in the x–y coordinate system is given by : $x_p = \Sigma_i h_i(r_p, s_p)x_i$ and $y_p = \Sigma_i h_i(r_p, s_p)y_i$

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Les Equations de Laplace et de Poisson

Merci. Fin du chapitre 5