Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 6

Les Equations de Laplace et de poisson

COURS 6 **Lundi 01.06.2009**

5.1 Introduction

Plusieurs phénomènes physiques sont décrits par les équations de **Laplace** et de **Poisson**.

Donc leur étude est plus que nécessaire.

Nous nous intéressons au cas **bidimensionnel**.

Equation de **Laplace**: $$\nabla^2 u = 0$$

Equation de **Poisson**: $$\nabla^2 u = g(x, y)$$

Où ∇^2 désigne le laplacien.

Considérons l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \qquad Dans \ le \ domaine \quad V$$

Les conditions aux limites seront:

1. Conditions sur « u »: Condition de Dirichlet

$$u = \bar{u} \qquad sur \quad S_u$$

S_u partie de S sur laquelle est imposée cette condition

2. Conditions de flux

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \qquad sur \quad S_f$$

S_f partie de S sur laquelle est imposée cette condition

S est la limite du domaine V

$\bar{u}$ et $\bar{q}$ Sont des valeurs connues de la variable et du flux

n: représente la normale à la limite.

$S_u \;\; et \;\; S_f$ Essentielle et naturelle limites

On a:

$$S_u \cup S_f = S$$

$$S_u \cap S_f = \phi$$

Ainsi, résoudre le problème d'**équilibre** consiste à trouver la fonction « u » qui **satisfait les 03** relations décrites.

Méthode des résidus pondérés:

La forme intégrale de l'équation de Poisson, s'écrit:

$$I = \int_V w(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g(x,y)\right) dV - \int_{S_u} w \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

« u » est dérivable 02 fois pour satisfaire toutes les CL.

Pour développer une **formulation faible**, on applique l'intégration par **parties pour réduire** l'ordre de la dérivée dans l'intégrale.

Intégration par parties

1er terme de l'intégrale

$$\int_V w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dV = \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\right)dy$$

$$= -\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\,dxdy + \int_{y_1}^{y_2}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2} dy$$

En intégrant sur le domaine et sa limite, on aura:

1^er terme de l'intégrale

$$\int_V w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dV = -\int_V \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} dV + \oint_S w\frac{\partial u}{\partial x} n_x dS$$

De façon similaire, le 2^ème terme sera:

$$\int_V w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dV = -\int_V \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} dV + \oint_S w\frac{\partial u}{\partial y} n_y dS$$

En additionnant les 02 termes, on aura:

$$\int_V w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dV = -\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) dV$$

$$+ \oint_S w\left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y\right) dS$$

Or, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial u}{\partial y}n_y = \frac{\partial u}{\partial n}$$

L'équation peut s'écrire alors:

Théorème de Green

$$\int_V w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dV = -\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) dV + \oint_S w\frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

En remplaçant dans l'équation initiale

$$I = \int_V w(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g(x,y)\right) dV - \int_{S_u} w\frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

On aura, finalement

$$I = -\underbrace{\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right) dV}_{\text{Matrice Caractéristique}} - \underbrace{\int_V wg(x,y)\,dV}_{\text{Vecteur Source}} + \underbrace{\int_{S_f} w\frac{\partial u}{\partial n}\,dS}_{\text{Vecteur Flux}}$$

Matrice Caractéristique

Vecteur Source

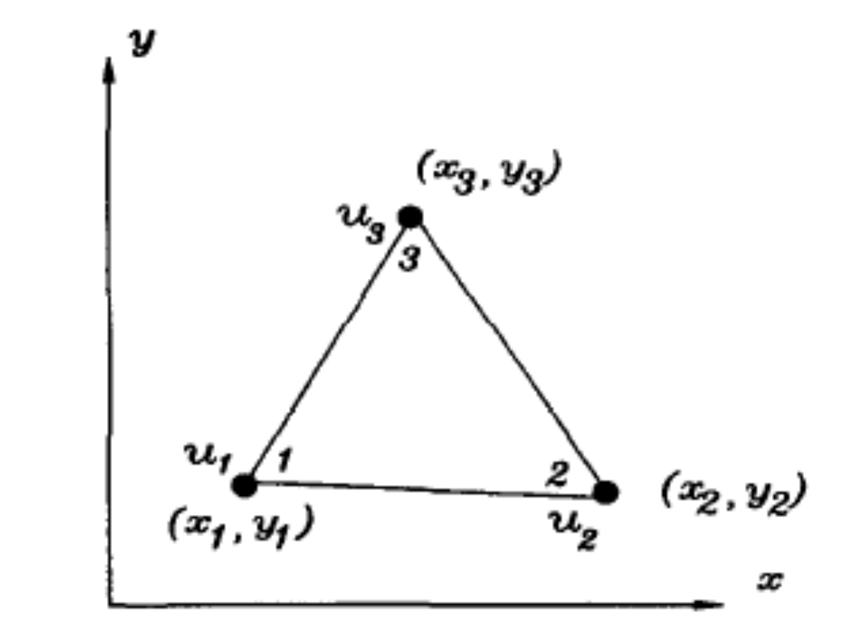
Vecteur Flux

Passons à la MEF

5.2 Analyse en éléments finis

5.2.1 Développement matricielle

Pour simplicité, nous allons considéré l'élément triangulaire simple à 03 nœuds.



L'interpolation est linéaire et la variable s'écrira:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

Sous forme matricielle

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$u(x,y) = \{\phi\}^T \{a\}$$

En appliquant la fonction d'interpolation en chaque nœud de l'élément, on aura

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{u^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \phi^T(noeud\, 1) \\ \phi^T(noeud\, 2) \\ \vdots \\ \phi^T(noeud\, m) \end{Bmatrix} \{a\} = [\Phi]\{a\}$$

En inversant ce système, on aura

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{a\}_{3x1} = [\Phi]^{-1}_{3x3} \left\{u^{(e)}\right\}_{3x1}}$$

Avec « A » qui désigne l'aire du triangle.

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

A>0 si 1, 2 et 3 sens contraire des aiguilles d 'une montre

Alors la fonction polynomiale peut être exprimée en fonction des valeurs aux nœuds. soit

$$u(x,y)=\{\phi\}^T\{a\}=\{\phi\}^T_{1x3}[\Phi]^{-1}_{3x3}\{u^{(e)}\}_{3x1}$$

Or

$$[N]=\{\phi\}^T_{1x3}[\Phi]^{-1}_{3x3}$$

Alors $u(x,y)=N_1(x,y).u_1+N_2(x,y).u_2+N_3(x,y).u_3$

Avec

$$N_1(x,y)=\frac{1}{2A}\left[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2(x,y)=\frac{1}{2A}\left[(x_3y_1-x_1y_3)+(y_3-y_1)x+(x_1-x_3)y\right]$$

$$N_3(x,y)=\frac{1}{2A}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right]$$

$$N_1(x,y)=\frac{1}{2A}\left[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2(x,y)=\frac{1}{2A}\left[(x_3y_1-x_1y_3)+(y_3-y_1)x+(x_1-x_3)y\right]$$

$$N_3(x,y)=\frac{1}{2A}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right]$$

Les fonctions de forme satisfont les conditions:

$$N_I\left(x_j,y_j\right)=\delta_{ij}$$

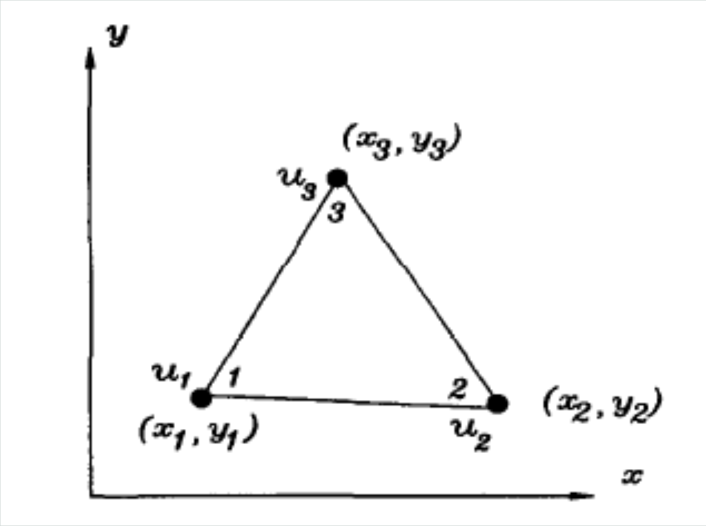
$$\sum_{i=1}^{3}N_i=1$$

Avec

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

5.2.2 calcul de la matrice élémentaire

En considérant notre élément triangulaire simple à 03 nœuds.



Sa matrice élémentaire se calculera par intégrale

$$\left[K^e\right] = \int_{V^e} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV$$

Dans le cas de Galerkin, $w_i = N_i$

Ainsi:

$$\left[K^e\right]=\int_{V^e}\left(\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}\\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial y}\\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y}\end{Bmatrix}\right)dV$$

En remplaçant les fonctions de forme et en intégrant suivant le domaine du triangle, on aura:

$$\left[K^e\right]=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}$$

Avec

$$k_{11} = \frac{1}{4A}\left[(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2\right]$$

$$k_{22} = \frac{1}{4A}\left[(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2\right]$$

$$k_{33} = \frac{1}{4A}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

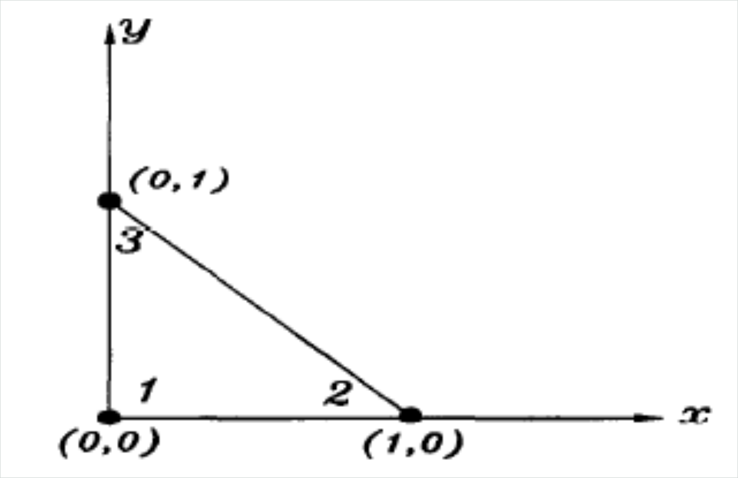
$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{4A}\left[(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)\right]$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{1}{4A}\left[(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)\right]$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{1}{4A}\left[(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)\right]$$

Exemple

Cas particulier de l'élément suivant:



La matrice élémentaire, après calcul sera (A=0.5):

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

calcul du vecteur source

Ce vecteur est défini par:

$$\int_V wg(x,y)dV$$

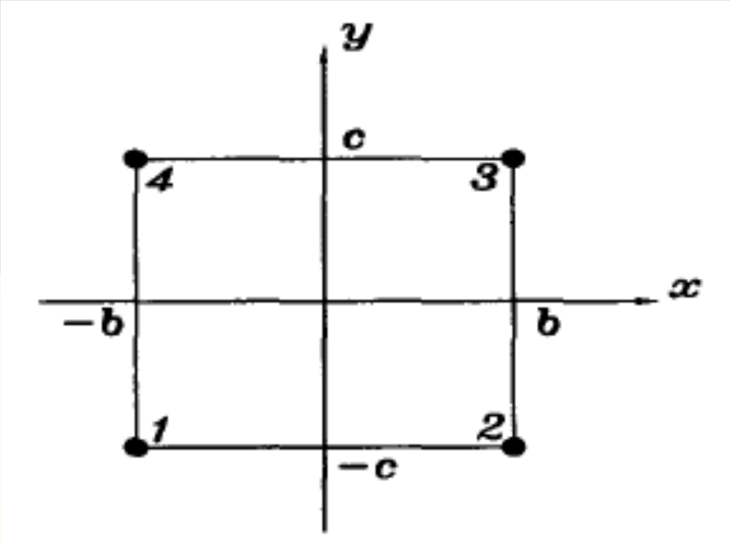
Sachant que $w_i = N_i$, l'intégrale devient

$$\int_V \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} g(x,y)dV$$

L'intégration analytique dépend de la fonction g(x,y)

5.2.3 Cas de l’élément rectangulaire

Considérons maintenant l’élément rectangulaire simple à 04 nœuds.



L’interpolation est linéaire et la variable s’écrira:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

En appliquant la même procédure que précédemment, on obtient

$$u(x,y) = \{\phi\}^T \{a\} = \{\phi\}^T_{1x4} [\Phi]^{-1}_{4x4} \{u^{(e)}\}_{4x1}$$

Or

$$[N] = \{\phi\}^T_{1x4} [\Phi]^{-1}_{4x4}$$

Alors

$$u(x,y) = N_1(x,y).u_1 + N_2(x,y).u_2 + N_3(x,y).u_3 + N_4(x,y).u_4$$

Avec

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4bc}[(b-x)(c-y)]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{4bc}[(b+x)(c-y)]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{4bc}[(b+x)(c+y)]$$

$$N_4(x,y) = \frac{1}{4bc}[(b-x)(c+y)]$$

calcul de la matrice élémentaire

Elle est donnée par:

$$\left[K^e\right]=\int_{V^e}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dV$$

Soit

$$\left[K^e\right]=\int_{V^e}\left(\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}\\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\\ \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial y}\\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\\ \frac{\partial N_4}{\partial y}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y}\end{Bmatrix}\right)dV$$

En remplaçant les fonctions de forme et en intégrant suivant le domaine du triangle, on aura:

$$[K^e]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Les termes seront calculés selon cet exemple:

$$k_{11}^e=\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left[\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\frac{1}{16b^2c^2}\left[(y-c)^2+(x-b)^2\right]dxdy$$

$$=\frac{c^2+b^2}{3bc}$$

Les autres termes seront:

$$k_{12} = \frac{b^2 - 2c^2}{6bc} \qquad k_{22} = k_{11} \qquad k_{33} = k_{11}$$

$$k_{23} = k_{14} \qquad k_{34} = k_{12}$$

$$k_{13} = -\frac{b^2 + c^2}{6bc} \qquad k_{24} = k_{13} \qquad k_{44} = k_{11}$$

$$k_{14} = \frac{c^2 - 2b^2}{6bc}$$

L’autre intégrale sera:

$$\int_V wg(x,y)dV \qquad \int_V \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} g(x,y)dV$$

5.2.4 calcul de l'intégrale limite

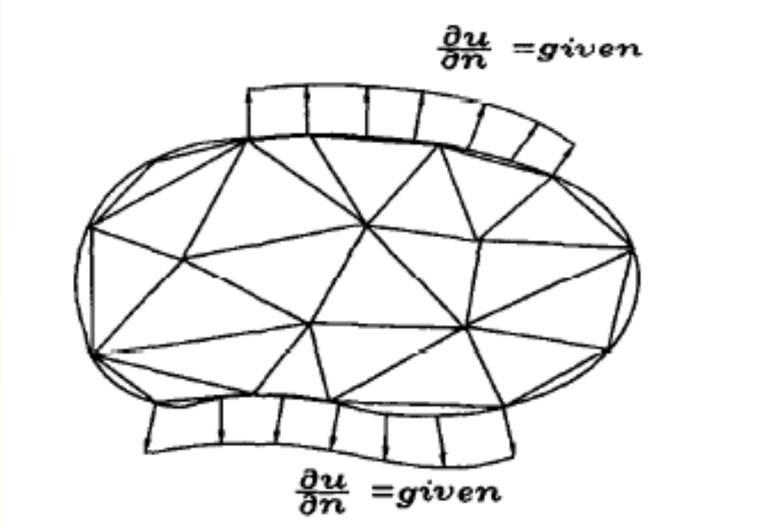
La 3[ème] intégrale à calculer est l'intégrale limite:

$$\int_{S_f} w \frac{\partial u}{\partial n} dS = \sum \int_{S^e} w \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

f, limite naturelle

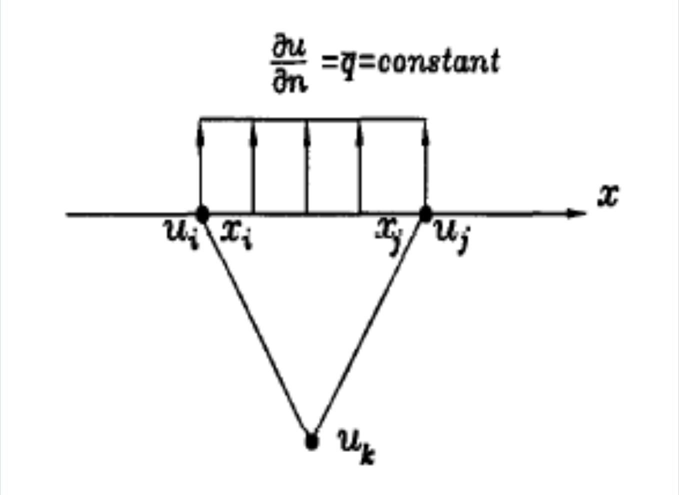
e , limite de l'élément

La sommation se fait sur les éléments de la frontière soumis à la condition de limite naturelle.



Exemple simple

Considérons le cas simple où le flux est appliqué sur un seul élément triangulaire // à l'axe « x ».



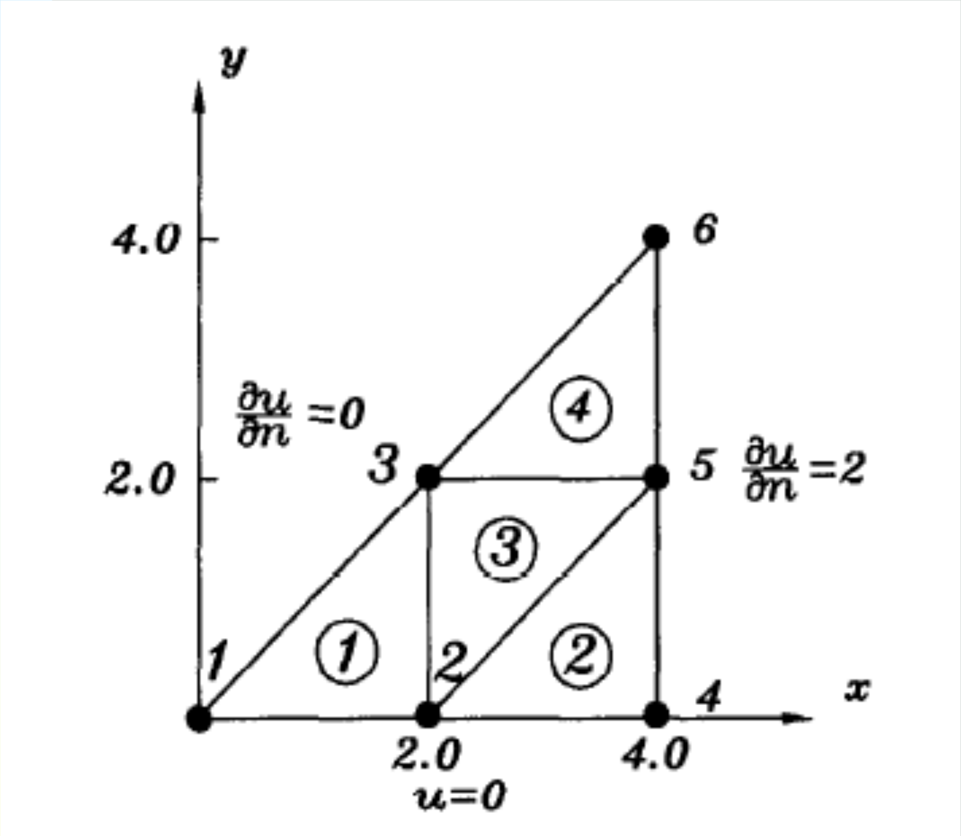
On utilise une fonction de forme linéaire à 1D puisque c'est appliqué entre 02 nœuds

$$\int_{S^e} w\frac{\partial u}{\partial n}dS=\bar{q}\int_{x_i}^{x_j}\begin{Bmatrix}\dfrac{x_j-x}{x_j-x_i}\\ \dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}\end{Bmatrix}dx=\frac{\bar{q}h_{ij}}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

Avec: $h_{ij}=x_j-x_i$

Application

On veut étudier l'exemple suivant par la MEF.



Un milieu composé de 04 éléments dont les CL sont montrées en fig.

On veut déterminer les inconnues u_i aux 06 nœuds.

Etape 1

Déterminer la matrice élémentaire de chaque élément.

(Voir les k_{ij} du triangle simple linéaire

Dans notre cas, ces matrices sont les mêmes (Nbr de 4)

$$\left[K^e\right]=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Etape 2

On doit assembler les 04 matrices élémentaires pour former la matrice totale du milieu.

Il faut respecter la numérotation globale

$$[K]=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1.0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & -0.5 & 2.0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Correspondant au vecteur nodal du système

$$\{u\}=\{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\}^T$$

Etape 3

Calcul des vecteurs (intégration limite du flux donné)

Soient les cotés 4-5 et 5-6 soumis aux flux =2

Or

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{q} h_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{q} h_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

De plus 1-3 et 3-6 ont un flux nul

Par assemblage des flux, on aura le vecteur global

$$\{F\} = \{F_1 \quad F_2 \quad 0.0 \quad F_4 \quad 4.0 \quad 2.0\}^T$$

Enfin, on obtient un système de 06x06 à résoudre

$$[K]\{u\}=\{F\}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1.0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & -0.5 & 2.0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

La résolution de ce système nous donne

$$\{u\}=\{0 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 6 \quad 10\}^T$$

Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

La méthode des différences finies

Merci. Fin du chapitre 6